2009 年度　地球流体力学　レポート課題

担当：岩山隆寛

提出期限：8 月 6 日 (木)17:00.
提出場所：自然科学総合研究棟 3 号館 502 号室

解答に際しての注意：ベクトルとスカラーの違いに注意すること！また，解答は答えのみ書くのではなく，議論の展開がわかるように途中経過も詳細に書きなさい．(もちろん穴埋め問題は別です．)

1. **(流体力学の基礎方程式に関する問題)**
流体力学の基礎方程式に関する以下の設問に答えなさい.

流体力学の基礎方程式は, 物理学における 3 つの重要な保存則 (　A　), (　B　), エネルギー保存則を具体的に数式で書き表したものにより構成される.
例えば, 重力場中の非粘性流体の基礎方程式は, 以下の式で与えられる:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nabla} p - g \boldsymbol{e}_z, \tag{2}$$

$$c_p \frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} - \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t} = J. \tag{3}$$

ここで, t は時間, $\boldsymbol{\nabla}$ は勾配演算子, ρ は密度, $\boldsymbol{v}$ は流速, p は圧力, g は重力加速度, $\boldsymbol{e}_z$ は z 方向の単位ベクトル, c_p は定圧比熱, T は温度, J は単位時間・単位質量あたりの加熱率である.

(a) (　A　) を具体的に書き表した数式が (1) である. (　A　) にあてはまる適当な言葉, 及び (1) 式の名称を答えなさい.

(b) (　B　) を具体的に書き表した数式が (2) である. (　B　) にあてはまる適当な言葉, 及び (2) 式の名称を答えなさい.

(c) 流体力学には現象を記述する 2 つの記述法が存在する. それぞれの記述法の

名称とその特徴について述べなさい．

(d) 方程式 (1)〜(3) に示されているように，流体力学には 2 つの時間微分 $\dfrac{\partial}{\partial t}, \dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ が存在する．後者の微分の名称，それぞれの微分の特徴について述べなさい．さらに前者と後者を結びつける関係式を **ベクトル形式で書きなさい**．(**注意：この問題は $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ 導出の過程は書かなくてよい．**)

2. **(移流項に関する問題)**

ある観測所の 50km 北の地点では観測所よりも 3.0 K 気温が低いとする．もし $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ の北風が吹いていて，空気塊の温度は変化しないものとする．このとき，観測所における気温の時間変化率を求めなさい．

3. **(静水圧平衡の問題)**

大気は理想気体の状態方程式に従い，静水圧平衡の状態にあると仮定する．即ち，静水圧平衡の式

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g \tag{4}$$

および理想気体の状態方程式

$$p = \rho R T \tag{5}$$

を議論の出発点として以下の設問に答えなさい．ここで，R, T はそれぞれ気体定数と温度である．なお，重力加速度 g は高さに依存せず, 定数であると仮定する．

(a) 大気が一様な温度 T_0 であると仮定する．このとき，気圧の鉛直プロファイルは指数関数

$$p(z) = p(0)\exp(-z/H), \tag{6}$$

$$H = \frac{RT_0}{g}, \tag{7}$$

であること, 密度の鉛直プロファイルが

$$\rho(z) = \rho(0)\exp(-z/H), \tag{8}$$

になることを示しなさい．

(b) 大気が一様な温度減率をもつ場合, 即ち $T(z) = T_0 - \Gamma z$，ここで T_0 は地上気温，$\Gamma > 0$ は温度減率で定数である場合に, 以下の設問に答えなさい．

i. 気圧の鉛直プロファイルを求めなさい．（気圧を z の関数として書き下す．**注意：** (6) **の式は使用できないことに注意．例年,** T **の鉛直依存性の式を** (6) **に代入する解答が目立つ．** (6) **は温度が一様な場合に導かれた式なの**

で，この設問の状況では使用できない．静水圧平衡の式，理想気体の状態方程式に戻って，T が高さに依存する場合に，(6) に相当する式を導出しなければならない．）

ii. 大気は有限の高さで終わることを上で導いた式を用いて示しなさい．

4. **流体力学方程式系の応用**

円筒形の容器に密度が一様な非圧縮性流体（液体）が入っている．この液体が円筒容器の中心軸を中心とした定常旋回運動をしている場合に，液面の形を考察する．以下の設問に答えなさい．なお，液体は容器からこぼれないものとする．

座標系　：円筒容器の底面の中心 O を原点とし，円筒の中心軸を z 軸とする円筒座標系 (r, θ, z) で現象を記述することにする．r, θ, z 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_z$ と表す．

慣性系の運動方程式　：速度場を $\boldsymbol{v} = V(r)\boldsymbol{e}_\theta$ としたとき，(2) を r, θ, z 方向成分に関する式に展開すると，それぞれ

$$-\frac{V^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{9}$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \tag{11}$$

となる．ここで 密度 ρ，重力加速度 g は共に一定とする．

上記の方程式の導出の際の注意　：円筒座標系における微分演算子 $\boldsymbol{\nabla}$ は

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{12}$$

と表される．また，単位ベクトルの空間微分のうち，ゼロでないものは以下の２つである：

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} = -\boldsymbol{e}_r,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta} = \boldsymbol{e}_\theta.$$

(a) ベクトル形式の運動方程式 (2) から，(9) を導出しなさい．

(b) (9) は r 方向の力のバランスを表す．このバランスの式の名称を答えなさい．

(c) (11) は鉛直方向の力のバランスを表す．このバランスの式の名称を答えなさい．

(d) (11) のバランスの式を鉛直方向に 0 から z まで積分すると

$$p(r,\, z) = \rho g \left(h(r) - z\right) \tag{13}$$

が得られることを示しなさい．なお，簡単化のために液面 $z = h$ における圧力 $p(r,\, h)$ は 0 とする． (**注：導出の過程がわかるように解答しなさい．補足：この式により，圧力と液体の深さが結び付けられる.**)

(e) 液体は剛体運動をしていると仮定する．即ち，液体の回転角速度を ω(= 一定) とすると，$V = r\omega$ である．このとき， (9) と (13) を利用して，液面の形 h を r の関数として求めなさい．(**ヒント:** (9) **と** (13) **から，** h **に関する 1 階の微分方程式を導出し，その解を求める.**)