第 8 章

回転系上の運動方程式の簡単な応用

前章において提出された回転系上の運動方程式の応用として簡単な流れ場を考察してみる.

8.1　バランスした流れ：傾度風平衡

■状況設定　鉛直軸 z の周りに一定の角速度 $f/2$ で回転している系の上の流体運動を考察する. 流体運動をこの回転系上の座標系で記述する. 流体は, 非圧縮・非粘性・均質（一様な密度 ρ_0 をもつ）流体とし, ある点 O を中心に時間的に一定の速さ V で旋回する水平 2 次元的運動をしているとする. このような流れ場を考察する場合には, O を原点とし, 回転軸を z 方向とする 3 次元円筒座標系 (r, θ, z) を用いるのが便利である. この座標系の動径方向, 方位角方向, 鉛直方向の単位ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_z$ とする.[*1]

ここで考察する流れ場は, 大きな規模では, 高気圧や低気圧の周りを廻る風の場, 小さな規模では竜巻に伴う旋回する風, コーヒーカップやティーカップ内の流体を掻き回したときの流れ場を想定している.

議論の出発点である運動方程式はベクトル形式で

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} + f \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\nabla} p - g \boldsymbol{e}_z \tag{8.1}$$

である. 3 次元円筒座標系では微分演算子 $\boldsymbol{\nabla}$ は次のように表現される：

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \tag{8.2}$$

流体の速度 $\boldsymbol{v}$ は円筒座標系では一般に

$$\boldsymbol{v} = v_r \boldsymbol{e}_r + v_\theta \boldsymbol{e}_\theta + v_z \boldsymbol{e}_z \tag{8.3}$$

[*1] 3 次元円筒座標系の 3 つの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_z$ のうち $\boldsymbol{e}_\theta$ は θ の関数であること注意せよ.

とかけるが, 今の状況設定のもとでは

$$\boldsymbol{v} = V(r,\theta,z)\boldsymbol{e}_\theta \tag{8.4}$$

である.

方位角方向の流れ V は連続の式を考慮すると以下のように方位角 θ に依存しないことがわかる. 非圧縮性流体の連続の式は,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0 \tag{8.5}$$

である. (8.5) に (8.2), (8.4) を代入すると,

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(V\boldsymbol{e}_\theta) &= \boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_\theta\frac{\partial V}{\partial r}+V\boldsymbol{e}_r\cdot\frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial r}\\ &\quad+\boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}+\frac{V}{r}\boldsymbol{e}_\theta\cdot\frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial\theta}\\ &\quad+\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_\theta\frac{\partial V}{\partial z}+V\boldsymbol{e}_z\cdot\frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial z}\\ &= V\boldsymbol{e}_r\cdot\frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}+\frac{V}{r}\boldsymbol{e}_\theta\cdot\frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial\theta}+V\boldsymbol{e}_z\cdot\frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial z}.\end{aligned}$$

単位ベクトルの直交性, および, 単位ベクトル $\boldsymbol{e}_\theta$ の微分が

$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial\theta}=-\boldsymbol{e}_r,\quad \frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial z}=0, \tag{8.6}$$

であることを考慮すると, (8.5) は

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = 0 \tag{8.7}$$

となる. つまり, この式から V は θ に依存しないことがわかる.

運動方程式 (8.1) に (8.2), (8.4) を代入し, $V(r,z)$ の従う方程式に書き換える.

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial t}\boldsymbol{e}_\theta=0,$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}=\frac{V}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(V\boldsymbol{e}_\theta)=-\frac{V^2}{r}\boldsymbol{e}_r,$$

$$f\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{v}=-fV\boldsymbol{e}_r,$$

$$\boldsymbol{\nabla}p=\frac{\partial p}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{e}_z,$$

より, r, θ, z 方向の運動方程式はそれぞれ

$$\frac{V^2}{r} + fV - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \tag{8.8}$$

$$\frac{1}{\rho_0 r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \tag{8.9}$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} + g = 0, \tag{8.10}$$

となる．(8.8) の左辺第 1 項は流体粒子が旋回運動を行うことによる遠心力を表し, 第 2 項は Coriolis 力, 第 3 項は動径方向の気圧傾度力を表す．動径方向にはこの 3 つの力がバランスして定常的な流れが実現している．このようなバランスは**傾度風平衡**（gradient wind balance）と呼ばれている．(8.9) は圧力 p が θ に依存しないことを示しており, このことから水平面内では等圧線は同心円状になることがわかる．(8.10) は鉛直方向の流れがないことから, 鉛直方向の気圧傾度力と重力がバランスした静力学平衡が成り立っていることを示している．

8.2　傾度風平衡の吟味

前節で得られたバランスの式, 特に動径方向の式 (8.8), を吟味してみる．

吟味 0：　流れ場 V は鉛直方向に依存しないことが導ける．即ち, 今のような状況設定では, 流れ場は回転軸方向に一様化する (どの高さでも流速 V は同じ値である．　即ち金太郎飴状態.) 動径方向の式を z に関して微分すると

$$\left(2\frac{V}{r} + f\right)\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z} = 0. \tag{8.11}$$

一方, 静水圧平衡の式 (8.10) を r で微分すると,

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z} = 0. \tag{8.12}$$

したがって, (8.11) は

$$\left(2\frac{V}{r} + f\right)\frac{\partial V}{\partial z} = 0. \tag{8.13}$$

一般に, $2\frac{V}{r} - f \neq 0$ なので,

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \tag{8.14}$$

が導かれる．回転する流体において, 回転軸方向に流れが一様化する性質は **Taylor–Proudman の定理**と呼ばれている．

(8.8) は気圧場が与えられたときの速度場 V に関する 2 次方程式とみなすことができる．そこで 2 次方程式の解の公式を適用し, V を求めてみる：

$$V = \frac{1}{2}\left\{-fr \pm \sqrt{(fr)^2 + \frac{4r}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r}}\right\}. \tag{8.15}$$

注意： $\frac{\partial p}{\partial r}$ の符号によって, 高気圧的気圧分布と低気圧的気圧分布が表現できることに注意しなさい．前節で述べたように水平面内では等圧線は同心円状である．そこで $\frac{\partial p}{\partial r} > 0$ の時は原点 O から遠ざかるにしたがって気圧は増えていくことを表しており, したがってこのときは台風や低気圧のような気圧分布 (低気圧的気圧分布) になっている．同様に $\frac{\partial p}{\partial r} < 0$ は高気圧的気圧分布を表している．

吟味 1: 速度場 V は実数でなければならない．このことから (8.15) の根号の中は正の値でなければならない．すなわち判別式

$$\frac{\partial p}{\partial r} > -\frac{\rho_0 f^2 r}{4} \tag{8.16}$$

を得る． (8.16) は動径方向の気圧傾度には下限が存在することを示している．$\frac{\partial p}{\partial r} < 0$ は高気圧に対応するが, 高気圧の気圧傾度の値 $|\frac{\partial p}{\partial r}|$ には制限があるのに対し, 低気圧のそれには制限はない．（気圧傾度力で高気圧, 低気圧の強さを表したとすれば（そのよう表し方は一般には用いられていないが）, 高気圧の強さには制限があるが, 低気圧の大きさには制限はない, 即ちいくらでも強い低気圧が存在できることになる.）

吟味 2： 低気圧の周りを廻る風の向きを考える． 低気圧的な気圧分布は $\frac{\partial p}{\partial r} > 0$ である．このとき (8.15) の 2 つの解は

$$V_+ = \frac{1}{2}\left\{-fr + \sqrt{(fr)^2 + \left|\frac{4r}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r}\right|}\right\}, \tag{8.17a}$$

$$V_- = \frac{1}{2}\left\{-fr - \sqrt{(fr)^2 + \left|\frac{4r}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r}\right|}\right\} \tag{8.17b}$$

と表現できる．$f > 0$ のとき, $V_+ > 0$, $V_- < 0$ である．つまり低気圧的気圧分布の周りを廻る風は反時計回り (V_+) も時計回り（V_-）も可能である．このことは日常経験的に知られている（もしくは初等教育で習った）北半球では低気圧の周りを廻る風は反時計回りであることと対比される．V_+ の解は日常経験に合致するが, V_- の解は日常経験と矛盾する．しかしながら日常経験と一見矛盾するような解は, ある特別の場合を考えることにより実現できることがわかる．なお, 速度の大きさは $|V_-| > |V_+|$ の関係がある．

吟味３：　高気圧の周りを廻る風の向きを考える．高気圧的な気圧分布は $\frac{\partial p}{\partial r} < 0$ である．このとき (8.15) の 2 つの解は

$$V_+ = \frac{1}{2}\left\{-fr + \sqrt{(fr)^2 - \left|\frac{4r}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r}\right|}\right\}, \tag{8.18a}$$

$$V_- = \frac{1}{2}\left\{-fr - \sqrt{(fr)^2 - \left|\frac{4r}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r}\right|}\right\} \tag{8.18b}$$

と表現できる．$f > 0$ のとき, $V_+ < 0$, $V_- < 0$ である．つまり高気圧的気圧分布の周りを廻る風は常に時計回りである．反時計回りの風は吹かない．このことは日常経験的に知られている（もしくは初等教育で習った）北半球では高気圧の周りを廻る風は時計回りであることに合致している．ただし, 速度の大きさは低気圧的気圧分布のときと同様に $|V_-| > |V_+|$ の関係がある．

8.3　幾つかの特殊な場合

8.3.1　Rossby 数

(8.8) の左辺第 1 項は, 速度場の Lagrange 微分（慣性項と呼ばれる）から生じた項である．一方, (8.8) の左辺第 2 項は Coriolis 力項である．慣性項の大きさと Coriolis 力項の大きさの相対的な卓越性は **Rossby 数**と呼ばれる無次元の量で特徴付けることができる．今の場合, Rossby 数は

$$Ro \equiv \frac{[\text{慣性項}]}{[\text{Coriolis 力項}]} = \frac{V^2/r}{fV} = \frac{V}{fr} \tag{8.19}$$

である．$Ro \gg 1$ は Coriolis 力項に比べて慣性力項が支配的である場合を表し, $Ro \ll 1$ は慣性力項に比べて Coriolis 力項が支配的である場合を表す．

以下ではそれぞれの場合について考察する．

8.3.2　旋衡風平衡：（$Ro \gg 1$ の場合）

$Ro \gg 1$ のとき, 慣性力項に比べて Coriolis 力項は相対的に小さい．そこで, Coriolis 力項を無視する．これは (8.15) において $f = 0$ とおいた場合に相当する．(8.15) は

$$V = \pm\sqrt{\frac{r}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r}} \tag{8.20}$$

となる．根号の中は正でなければいけないので, したがってこの場合には $\frac{\partial p}{\partial r} > 0$, すなわち低気圧的な圧力分布しか実現できない．これは, コーヒーや紅茶をかき回したときに時

計回りにかき回しても反時計回りにかき回しても中心付近の水面が凹むことからも理解できる.（静水圧平衡が成り立っているときに, ある点における圧力はその点よりの上に載っている流体に質量に比例することは, 第で議論した.）この場合のように遠心力と気圧傾度力がバランスした状態は**旋衡風平衡** (cyclostrophic balance) と呼ばれる. 傾度風平衡における (8.17) における $V_- < 0$ （北半球における時計回りの低気圧解）は旋衡風平衡における時計回りの解 ((8.20) の負の値を持つ解) に対応する.

8.3.3 地衡風平衡：($Ro \ll 1$ の場合)

$Ro \ll 1$ のとき, Coriolis 項に比べて遠心力項は相対的に小さい. そこで, 遠心力項を無視する. これは (8.8) において $r \to \infty$ とおいた場合に相当する. (8.15) は

$$V = \frac{1}{\rho_0 f}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{8.21}$$

となる. この場合のように Coriolis 力項と気圧傾度力項がバランスした状態は**地衡流平衡** (geostrophic balance) と呼ばれる. $f > 0$ の場合には低圧部を左に見るように流体は流れる.

8.3.4 慣性振動

いままでの議論では気圧傾度力は常に存在し, Coriolis 力項と遠心力項の相対的な大きさの違いをもとに流れの性質を見てきた. 最後に, 気圧傾度力が無視できる場合を考察しよう. このときには, (8.15) で自明でない解は,

$$V = -fr \tag{8.22}$$

となる. このような流れによって流体粒子が半径 r の円周上を一周する時間（周期）を見積もると, $T = 2\pi r/|V| = 2\pi/|f|$ となる. 座標系の回転角速度が $f/2$ なので, T は座標系の回転周期の半分の周期である. この周期は慣性周期, このような周期現象（振動現象）は**慣性振動** (inertial oscillation) と呼ばれている. 慣性振動は海洋で観測さている. *2

*2 慣性振動は大気では観測されていないらしい. 何故観測されないのか明確な説明は私の知る限り未だない. 慣性振動の周期が座標系の回転の周期の半分である理由は, なかなか深遠な問題である. この点について興味のある人は, Durran, D., 1993: Is the Coriolis force really responsible for the inertial oscillation? Bull. Amer. Meteor. Soc., **74**, 2179–2184. を参照のこと.