

## 第 5 章

# 大気鉛直構造

### 5.1 問題設定

本章では、前章までの知識をもとに地球大気鉛直構造について考察する。地球大気は

- 非粘性流体
- 理想気体の状態方程式に従う
- 乾燥している（水蒸気は含まない）
- 鉛直方向には静止した（もしくは鉛直速度が極めて小さく無視できる）状態

と仮定する。

流体に働く外力  $\mathcal{K}$  は重力のみ、 $\mathcal{K} = -gk$ 、とする。ここで、 $g$  は定数でなく高度依存性があってもよい。そのような  $g$  の表現は

$$g = \frac{GM}{(a+z)^2}. \quad (5.1)$$

ここで、 $G$  は万有引力定数、 $M$  は地球の質量、 $a$  は地球の平均半径、 $z$  は平均海水面からの高度である。

重力場中で流体が鉛直方向に静止しているとき ( $w = 0$ ) の力のバランスは、運動方程式 (3.18b) の  $z$  成分より、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (5.2)$$

と書ける。この式は、1.5 節で議論した静水圧平衡の式である。静水圧平衡の式 (5.3) と理想気体の状態方程式 (4.1) から得られる幾つかの考察を行う。以下では簡単化のために鉛直 1 次元問題として議論する。このとき、(5.2) は

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (5.3)$$

となる。

## 5.2 気圧の鉛直プロファイル

簡単化のために、重力加速度は高さに依存しない定数  $g_0$  とする。<sup>\*1</sup> さらに、大気は等温（温度  $T_0$ ）であると仮定する。このとき、静水圧平衡の式 (5.3) と理想気体の状態方程式から

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_0}{RT_0} dz$$

が得られ、この式を高度  $0 \sim z$  まで積分して整理すると、気圧の鉛直プロファイルを与える式

$$p(z) = p(0) e^{-z/H} \quad (5.4)$$

が得られる。ここで、

$$H \equiv \frac{RT_0}{g_0} \quad (5.5)$$

である。(5.4) は、気圧は高度と共に指数関数的に減少していくことを示している。

図 5.1 に 2005 年 8 月 30 日 9 時に神戸大学 自然科学総合研究棟 3 号館屋上から放球したラジオゾンデによって観測された気圧と気温の鉛直プロファイルを示す。実際の気温は鉛直方向には等温ではないが、気圧の鉛直変化に比べると気温のそれは穏やかなので、近似的に等温とみなすことができ、したがって気圧は高さとともに近似的に指数関数的に減少していくことがわかる。また、(5.3) が成り立つ仮定である静止状態は、実際の大気では必ずしも満足されているわけではないが、観測によると大気の状態は静水圧平衡から導かれる結果とよく一致していることもわかる。

$H$  はスケールハイト (scale height) と呼ばれ、気圧が  $e^{-1}$  になる高度であり、大雑把に言うと大気の厚さを表す。地球を温度 255K の等温大気と仮定するとスケールハイトは約 7 km である。

スケールハイトは鉛直方向の大気の質量分布の重心の位置と解釈することもできる。等温大気の場合には、気圧の鉛直分布 (5.4) と同様に、密度も

$$\rho(z) = \rho(0) e^{-z/H} \quad (5.6)$$

<sup>\*1</sup> 我々が日常の経験する大気現象は高度約 15km よりも下層の対流圏で起こっている。地上の重力加速度に比べて、高度 15km 上空における重力加速度は小さくなるが、その量は非常に僅かで 0.2% ほどである。そこで、ここでは重力加速度を定数として扱うことにする。

という鉛直プロファイルを持つ. 鉛直方向の質量分布の重心  $z_G$  は

$$z_G \equiv \frac{\int_0^\infty z \rho(z) dz}{\int_0^\infty \rho(z) dz} \quad (5.7)$$

で計算される. 実際に (5.7) に (5.6) を代入すると

$$z_G = H \quad (5.8)$$

が得られる

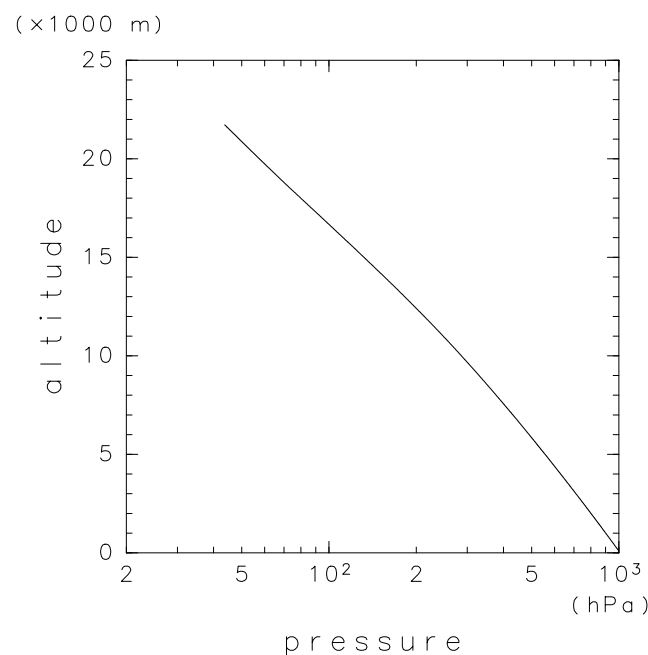


図 5.1 2005 年 8 月 30 日 9 時に神戸大学自然科学総合研究棟 3 号館屋上から放球したラジオゾンデによって観測された気圧の鉛直プロファイル.

### 5.3 測高公式

本節ではより厳密に重力加速度の鉛直依存性を考慮にいたした議論を行い, 圧力と高度さの関係を議論する.

平均海水面 ( $z = 0$ ) から高度  $z$  まで単位質量の空気塊を上昇させたときに, それに要する仕事  $\Phi$  を ジオポテンシャル (geopotential),  $Z \equiv \Phi/g_0$  をジオポテンシャル高度 (geopotential height) と呼ぶ:

$$\Phi(z) \equiv \int_0^z g dz. \quad (5.9)$$

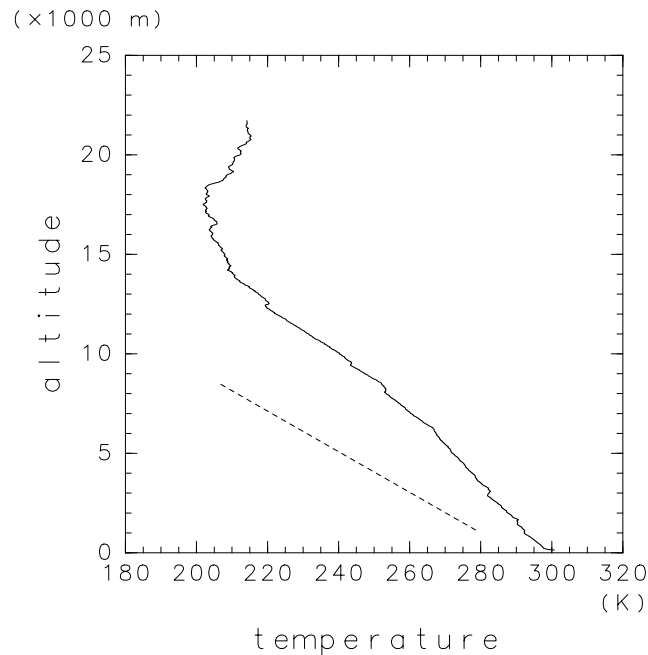


図 5.2 図 5.1 と同様. ただし, 気温のプロファイル. 点線は乾燥断熱減率に従う気温の変化を示している.

ここで,  $g_0$  は平均海水面における全球平均重力加速度  $g_0 = 9.81 \text{ m s}^{-2}$  である. ジオポテンシャル高度は対流圏や下部成層圏では幾何学的高度  $z$  とほぼ同じ数値をとる.

(5.9) の積分変数を静水圧平衡の式を用いて  $z$  から  $p$  に変数変換する. このとき理想気体の状態方程式を用いて, (5.3) の密度  $\rho$  を圧力  $p$  と温度  $T$  で書きかえておく. 結果は

$$\Phi(z) - \Phi(0) = -R \int_{p(0)}^{p(z)} T \, d \ln p \quad (5.10)$$

である. (5.10) は測高方程式 (hypsometric equation) と呼ばれる. (5.10) より, 気圧面  $p_1$  と  $p_2$  の厚さ (ジオポテンシャルの差であり, 層厚 (thickness) と呼ばれる)\*<sup>2</sup>は

$$Z_T \equiv Z(p_2) - Z(p_1) = -\frac{R}{g_0} \int_{p_1}^{p_2} T \, d \ln p, \quad (5.11)$$

で与えられる. 気球に観測機器 (ラジオゾンデ) を係留して放球し, 大気気温や気圧を観測したとき, それらの値と (5.11) を用いて温度, 気圧の値を  $Z$  の関数としてすなわちジオポテンシャル高度の関数として表現することができる.

ここで, ある気圧  $p_1$  と  $p_2$  の間にある大気平均温度  $\langle T \rangle$  を

$$\langle T \rangle \equiv \frac{\int_{p_1}^{p_2} T \, d \ln p}{\int_{p_1}^{p_2} d \ln p} \quad (5.12)$$

\*<sup>2</sup>  $p_1 > p_2$  即ち,  $p_1$  面が  $p_2$  面よりも下層にあるとする.

で定義する. このとき  $p_1$  面と  $p_2$  面の層厚は

$$Z_T = -H \ln(p_2/p_1) \quad (5.13)$$

$$H \equiv \frac{R \langle T \rangle}{g_0}, \quad (5.14)$$

で与えられる. 即ち, ある与えられた 2 つの気圧面の層厚はその気層の平均温度に比例する.

## 5.4 乾燥大気の鉛直方向の安定性

5.2 節では, 静水圧平衡の式と理想気体の状態方程式から気圧の鉛直プロファイルを導いた. 気温の鉛直プロファイルは, 太陽からの太陽放射や地球から射出する赤外線を中心とした地球放射が大気にどのように吸収されるか, といった議論により導かれる. このような議論は大気放射学として知られており, 後期に開講される「地球および惑星大気科学」において扱われるだろう. 本節では, 放射の議論は抜きにして, 静水圧平衡の式と理想気体の状態方程式から導かれる, 気温の鉛直プロファイルを規定する規範について議論する.

以下の議論はパーセル法と呼ばれる方法である. パーセル法は系をパーセルとその外界とに分離し, パーセルが運動しても外界はその影響を受けないと仮定する考え方である.

密度成層した鉛直 1 次元の水蒸気を含まない静止大気を考える. 今, 初期に高度  $z$  にある流体粒子 (パーセル) を  $z + \Delta z$  まで変位させたときの運動についてを考える. <sup>\*3</sup> ここでは以下のような仮定をおく.

- 流体粒子の変位は微小量
- 流体粒子の変位は断熱過程
- 流体粒子の持つ圧力と, その外界の圧力とは常に等しい
- 外界は静水圧平衡の状態にある

このとき, 流体粒子の持つ温位,

$$\theta = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^\kappa, \quad (5.15)$$

は変位の前後で一定に保たれる. ここで  $\kappa = \frac{R}{C_p}$  である. なぜならば, 温位はエントロピー  $S$  と (4.20) の関係で結ばれ, エントロピーは断熱過程において一定に保たれるから

<sup>\*3</sup> 水蒸気を含む場合, 気圧や気温の変化によって水蒸気が凝結し潜熱の解放が起こるので, この議論のように断熱という仮定が成り立たなくなる.

である。なお、温位  $\theta$  は状態方程式 (4.1) を用いて圧力と密度で表現すると、

$$\theta = \frac{p_0}{R\rho} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma}, \quad (5.16)$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}, \quad (5.17)$$

と表現できる。

流体粒子の持つ物理量を添え字  $p$  であらわし、一方、流体粒子の外界の物理量を添え字  $env$  であらわすことにする。流体粒子の運動方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \Delta z}{Dt^2} &= -\frac{1}{\rho_p(z + \Delta z)} \left( \frac{dp_{env}}{dz} \right)_{z+\Delta z} - g \\ &= \frac{\rho_{env}(z + \Delta z) - \rho_p(z + \Delta z)}{\rho_p(z + \Delta z)} g. \end{aligned}$$

と書ける。ここで添え字  $(\bullet)_{z+\Delta z}$  は  $z + \Delta z$  においてカッコ内の物理量を見積もることを表している。第1式から第2式への変形は、外界が静水圧平衡の状態にあることを用いた。

高度  $z + \Delta z$  における外界の密度、および流体粒子の密度を求める。外界の密度は  $\mathcal{O}(\Delta z)$  の範囲内で

$$\rho_{env}(z + \Delta z) = \rho_{env}(z) + \left( \frac{d\rho_{env}}{dz} \right)_z \Delta z \quad (5.18)$$

である。同様に、流体粒子の密度は

$$\rho_p(z + \Delta z) = \rho_p(z) + \frac{d\rho_p}{dz} \Delta z$$

である。ここで、密度の鉛直微分は (5.16) を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_p}{dz} &= \frac{d}{dz} \left[ \frac{p_0}{R\theta_p} \left( \frac{p_p}{p_0} \right)^{1/\gamma} \right] \\ &= \frac{1}{\gamma} \frac{p_0}{R\theta_p} \left( \frac{p_p}{p_0} \right)^{1/\gamma} \frac{1}{p_p} \frac{dp_p}{dz} \\ &= \left( \frac{\rho_p}{\gamma} \frac{d \ln p_p}{dz} \right)_z, \end{aligned} \quad (5.19)$$

と書ける。さらに流体粒子の初期位置  $z$  では流体粒子内の物理量と外界の物理量は等しいので<sup>\*4</sup>,  $\rho_p(z) = \rho_{env}(z)$  である。また仮定より,  $p_p = p_{env}$  である。これらを用いて、

$$\rho_p(z + \Delta z) = \rho_{env}(z) + \left( \frac{\rho_{env}}{\gamma} \frac{d \ln p_{env}}{dz} \right)_z \Delta z, \quad (5.20)$$

<sup>\*4</sup> なぜなら流体粒子と外界の区別はないから。

(5.20), (5.18) を用いると, 流体粒子の運動方程式は  $\mathcal{O}(\Delta z)$  の範囲内で

$$\frac{D^2 \Delta z}{Dt^2} = g \left( \frac{d \ln \rho_{\text{env}}}{dz} - \frac{1}{\gamma} \frac{d \ln p_{\text{env}}}{dz} \right)_z \Delta z.$$

(5.16) を用いると上式は

$$\frac{D^2 \Delta z}{Dt^2} = -g \left( \frac{d \ln \theta_{\text{env}}}{dz} \right)_z \Delta z \quad (5.21)$$

と表される.

この方程式は, 流体粒子の外界の温位の鉛直プロファイルに依存して, 流体粒子の運動の形態が異なることを示している. 定数係数の 2 階の微分方程式の知識から,

- $\left( \frac{d\theta_{\text{env}}}{dz} \right)_z > 0$  であれば, 流体粒子は変位に伴って復元力を受け, 高度  $z$  を中心とした振動運動を起こす.
- $\left( \frac{d\theta_{\text{env}}}{dz} \right)_z < 0$  であれば流体粒子の変位は時間とともに指数関数的に増大してしまう.

ことがわかる. 即ち,  $\left( \frac{d\theta_{\text{env}}}{dz} \right)_z < 0$  のような環境場は不安定である. したがって, 微小擾乱に対して鉛直方向に大気が安定であるためには,  $\left( \frac{d\theta_{\text{env}}}{dz} \right)_z > 0$  でなければいけない.  $\left( \frac{d\theta_{\text{env}}}{dz} \right)_z = 0$  が安定と不安定の境となる.

図 5.3 に実際に観測された 図 5.1, 5.2 に対応する温位を示した. 温位は高さとともに増大し, 特に高度 15 km よりも上空では温位の増大は著しい. この高度領域は下部成層圏である.

#### 5.4.1 乾燥断熱減率

水蒸気を含まない大気について, 鉛直方向の安定性の境となる温度プロファイルを求めて見る. 先の温位の鉛直プロファイルを温度で表現すると,

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dz} &= \frac{d}{dz} \left\{ T \left( \frac{p_0}{p} \right)^\kappa \right\} \\ &= \left( \frac{p_0}{p} \right)^\kappa \left( \frac{dT}{dz} - \frac{\kappa T}{p} \frac{dp}{dz} \right). \end{aligned}$$

安定性の境は  $\frac{d\theta}{dz} = 0$  であり, また静水圧平衡の式と理想気体の状態方程式を用いると, 上式から

$$\Gamma_d \equiv -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{C_p} \quad (5.22)$$

が得られる.  $\Gamma_d$  は乾燥断熱減率と呼ばれ, 地球大気の場合,  $\Gamma_d = 9.8 \text{ K/km}$  の値をとる.

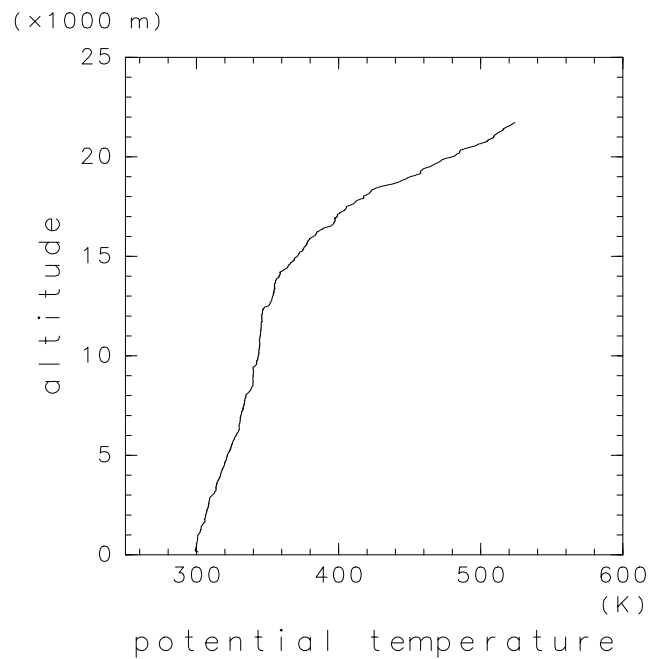


図 5.3 図 5.1 と同様. ただし, 温位のプロファイル.

#### 5.4.2 Brunt–Väisälä 振動数

(5.21) の形の微分方程式は  $\frac{d \ln \theta_{env}}{dz} > 0$  の時,

$$\Delta z = C_+ e^{iNt} + C_- e^{-iNt} \quad (5.23)$$

$$N \equiv \sqrt{g \frac{d \ln \theta_{env}}{dz}} \quad (5.24)$$

のような振動数  $N$  で振動する解をもつ. このような振動数は Brunt–Väisälä 振動数と呼ばれるものである.

観測によると Brunt–Väisälä 振動数は対流圏で  $N \sim 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  である.

#### 演習問題

1. 高度  $z = 0$  において重力加速度が  $g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2$  であるとする. このとき幾何学的な高度  $z = 100 \text{ km}$  におけるジオポテンシャル高度  $Z$  と幾何学的高度  $z$  との差を求めなさい.
2.  $g, T$  が高さに依存性しないと仮定し, (5.3) から, (5.4) を導きなさい.



3. 重力加速度  $g$  を定数と仮定する. 気温が高さとともに

$$T(z) = T_0 - \Gamma z \quad (5.25)$$

と一定の減率で減少するとき, 静水圧平衡の式, 理想気体の状態方程式を用いて気圧と高度との間の関係

$$p(z) = p(0) \left( 1 - \frac{\Gamma}{T_0} z \right)^{g/(R\Gamma)} \quad (5.26)$$

を求めなさい. さらに, このような温度分布を持つ大気は有限の高さで終わる (有限の高度で気圧が 0 になる) ことを証明しなさい.

4. (5.16) を導出しなさい.