

第 1 章

序論

本節では, 古典力学 (特に質点の力学) と流体力学との相違を強調しつつ, 流体力学の理論体系の特徴について述べる.

1.1 連続体の概念

すべての物質は原子や分子などの粒子より構成されるが, このような微細構造に立ち入らず質量が連続的に分布した (密度が時間, 空間の連続関数として与えられる) 仮想的な物体, **連続体**, として流体を取り扱うのが流体力学の立場である. このような近似は**連続体近似**と呼ばれる. 古典力学では, 物体を有限の質量を持つが大きさを持たない**質点**やその質点の集合体 (質点間の距離が変化しない理想的な物体が**剛体**である) と理想化し物理現象を記述する. 連続体近似という理想化は, このような古典力学における質点や剛体といった理想化に対応するものである.

上記のような連続体近似のもと, 流体力学では, 密度や速度, 温度などの物理量が, 空間内の**場の量**(位置ベクトル $\mathbf{r}$ と時間 t の連続関数) として与えられるものとする.

連続体近似は, 流体内部のある点 P における物理量の値を, P を含む微小体積 δV について, その物理量の平均値をもって定義することにより実現される. いま, 流体は質量 m を持った単原子もしくは単分子で構成されているとし, δV 内に含まれる原子・分子の個数を N , 点 P の位置ベクトルを $\mathbf{r}$ と表すと, 点 P における密度は

$$\rho(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{Nm}{\delta V} \quad (1.1)$$

で定義される.

一般に N は δV の大きさや t に依存して値が揺らぐために, $\rho(\mathbf{r}, t)$ も値が揺らぐ. $\rho(\mathbf{r}, t)$ が時間, 空間の連続関数として与えられるためには以下の 2 つの条件が必要である.

- 考える現象の空間スケール $L \gg (\delta V)^{1/3} \gg$ 流体を構成している原子・分子の平均自由行

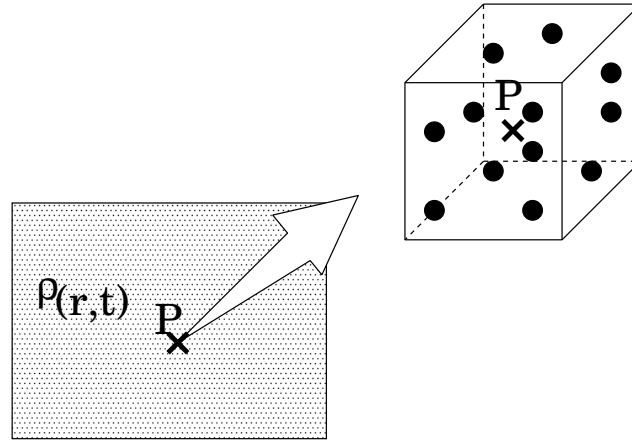


図 1.1 連続体では密度 ρ は時間空間の連続関数である．点 P における密度は， P を中心とする微小な体積要素に含まれる原子・分子の質量の平均値で定義する．

程^{*1} λ ．

もしくは λ と L の比

$$K = \frac{\lambda}{L} \quad (1.2)$$

を定義し， $K \ll 1$ のときである． K は特に **Knudsen 数**と呼ばれる．

- 考える現象の時間スケール $T \gg$ 流体を構成している原子・分子の平均緩和時間^{*2} τ ．

例： 以下によく知られた気象現象のもつ特徴的な空間・時間スケールを示す．

標準気圧，0°C の空気	$\lambda \sim 10^{-7}$ m	$\tau \sim 10^{-10}$ s
海陸風	$L = 1 \sim 10$ km	$T \sim 12$ h
高低気圧（総観規模現象）	$L \sim 10^3$ km	$T \sim 10$ day

このように気象現象の取り扱いには，連続体近似が適用できることがわかる．

1.2 流体粒子

流体力学ではしばしば**流体粒子**(fluid parcel または fluid particle) という言葉が登場する．これは，流体を構成している原子・分子などの粒子を言い表しているのではなく， δV 程度の大きさをもった流体の微小な塊のことである．すなわち，流体粒子の中には無数の原子・分子が含まれているが，考察の対象とする現象に比べて極めて小さく，点とみなすことができるような流体の一部分のことを指している．流体力学では，このような流体粒

^{*1} 原子・分子が他の原子・分子と衝突せずに運動できる平均的距離．

^{*2} 個々の原子・分子が持っている運動エネルギーに差異ができた時に，それを衝突によって一様化するのに必要な平均的時間．

子に働く力を調べ、その運動を記述する運動方程式を立て、その解を調べることにより流体の運動を考察する。

1.3 応力

古典力学では、Newton の第二法則より、考察する物体に働く力の総和はその物体の運動量の時間変化率に等しい、として運動方程式をたてる。さらに、その方程式を解くことにより物体の運動状態を理解することができる。流体力学でも同様に流体粒子に働く力の総和が、流体粒子の運動量の時間変化率に等しいとして運動方程式を立て、それを境界条件、初期条件の下で解き、流体の運動を考察する。そこで、ここでは流体に働く力について考えてみる。

連続体に働く力には次の二種類がある。

- **体積力**(body force)：その大きさが物質の質量や体積に比例する力。これは重力、遠心力、Coliois 力などがその例であり、質点の力学でもおなじみのものである。
- **面積力**(surface force)：面を通して作用し、その大きさは、面の大きさに比例する。この力は、物質を構成する原子の相互作用に由来するもので、力の及ぶ範囲は要素の表面の極く薄い層に限られる。これは**連続体特有の力**である。

単位面積あたりに働く面積力を**応力**(stress) と呼ぶ。これは MKS 単位系では Nm^{-2} の次元を持つ。“力”という言葉がついているが、その次元は力の次元 N ではないことに注意すべきである。

連続体中の点 P における応力は、点 P を通る平面 S を選び、 S 上の P を含む単位面積を通して両側の連続体が及ぼしあう力 (法線 $\mathbf{n}$ の正の側から負の側へ及ぼす力) で定義し、 $\mathbf{T}_{\mathbf{n}}$ と表す。したがって $\mathbf{T}_{\mathbf{n}}$ は S の選び方、すなわち法線 $\mathbf{n}$ に依存する。また、力はベクトル量であるから大きさを持つ。したがって $\mathbf{T}_{\mathbf{n}}$ は 2 つの方向と 1 つの大きさによって定まる。これは、数学的には 2 階の**テンソル**(tensor) と呼ばれ、9 個の成分、 τ_{ij} , ($i, j = 1, 2, 3$), を持つ量である。したがって、 τ_{ij} は**応力テンソル**と呼ばれる。 x_j 軸に垂直な平面を通して、 x_j 軸の大きい側から小さい側へ作用する x_i 方向の力を τ_{ij} と定義する。

作用・反作用の法則を考えると、

$$\mathbf{T}_{-\mathbf{n}} = -\mathbf{T}_{\mathbf{n}} \quad (1.3)$$

の関係がある。

応力を面の接線方向の成分と法線方向の成分に分解し、それぞれを**接線応力**(tangential stress), または**せん断応力**(shear stress), **法線応力**(normal stress) と呼ぶ。法線応力は、

面の両側が押しあう場合は**圧力**(pressure), 引っ張りあう場合は**張力**(tension) となる.

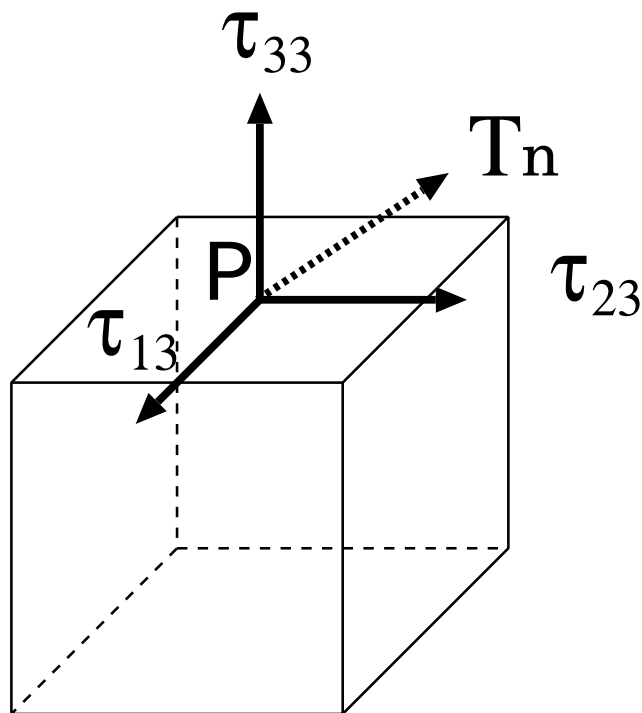


図 1.2 点 P を通る z 軸に垂直な平面を考える. このとき, P に働く応力 T_n は平面に水平な成分 τ_{13}, τ_{23} と垂直な成分 τ_{33} に分解できる.

1.4 流体の定義

先に, 気体と液体を一括して流体と呼ぶと述べたが, 先に定義した応力の概念を用いると, 流体は以下のように明確に定義できる: “**静止状態では接線応力が現れず, かつ法線応力が圧力である連続体**を流体と定義する.” ここで, 「静止状態では」という断りが重要である. なぜなら, もし接線応力が現れたら, 僅かの力で変形するという性質のために, 流体は静止状態にあり得ない. また, 法線応力が張力の場合には, その面から流体は裂けてしまうからである.

法線応力に関して次の性質が証明できる. “静止状態, 運動状態を問わず**接線応力が常に 0 ならば, 法線応力は考える面の選び方によらない.**” これは, 接線応力が常に 0 ならば, 応力が圧力のみで等方テンソルであることを述べている.

———[証明]———

[問題設定:] 点 P を頂点とし, 底辺が微小な三角形 PAB , 高さが単位長の三角柱を考える. PA, PB, AB に働く法線応力 (圧力) をそれぞれ p_1, p_2, p_3 , とする. また, $PA = l_1, PB = l_2, \angle A = \alpha_1, \angle B = \alpha_2$ とする.

- 静止状態で体積力が働いていない場合: 微小物体に働く圧力の AB 方向の成分は,

$$p_1 l_1 \sin \alpha_1 - p_2 l_2 \sin \alpha_2 = 0.$$

正弦定理

$$\frac{\sin \alpha_1}{l_2} = \frac{\sin \alpha_2}{l_1}$$

より,

$$p_1 = p_2.$$

したがって圧力は P を通る平面の選び方に依存しない.

- 静止状態で体積力が働いている場合: 体積力は上記のような微小物体を考えたときに $\mathcal{O}(l^2)$ の大きさで, 面積力に比べて高次の微量量になる. したがって, l が非常に小さい場合には, 体積力の効果は面積力の効果に比べて無視できる. したがって, 先の議論が適用できる.
- 運動状態の場合: 質量と加速度の積を D'Alembert の原理によって慣性力として静力学 (静止状態) の問題に帰着させる. さらに慣性力は体積力であるから, 先の議論がそのまま適用できる.

—————[証明終り]—————

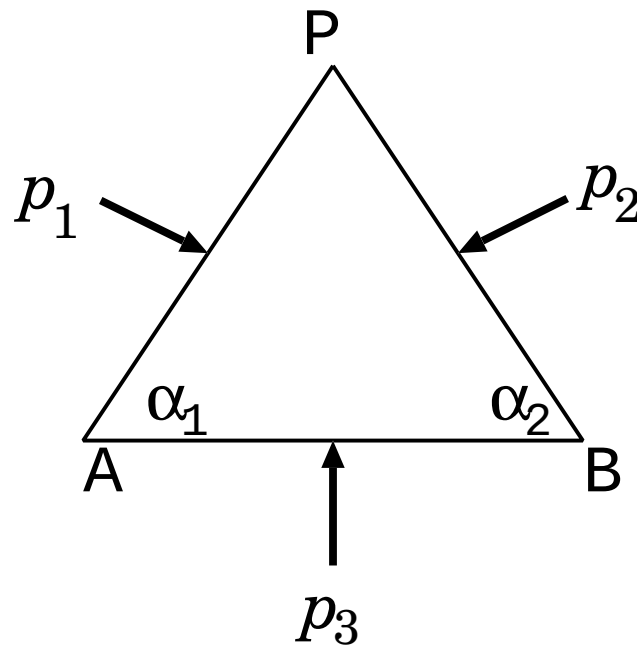


図 1.3 点 P を頂点とする単位高さの微小な三角柱に働く面積力.

1.5 圧力傾度力

1.3 節で流体に働く力は体積力と面積力に分類でき、単位面積あたりに働く力は応力と呼ばれると説明した。流体粒子に関する運動方程式をたてるときには、流体に働く力として体積力はそのままの形で方程式中の項に現れるが、面積力（応力）に関しては、そのままの形では現れてこない。このことは例えば体積力である重力が鉛直方向の単位体積あたりの流体粒子の運動方程式に ρg という形で現れ、これが N/m^3 という単位体積あたりの物体に働く力の次元を持つのに対し、応力はそのままでは N/m^2 という ρg とは異なる次元を持つことから察することができるであろう。

本節では、静止した流体を考え、これを構成する流体粒子に働く力がバランスしている、という考えから、流体粒子に働く正味の圧力について考えてみることにする。

重力場中（重力加速度を g で表し、定数と仮定する）で密度 ρ を持つ流体の静止状態を考える。図 1.4 で表される状況で、注目する流体要素（底面積 dS 、厚さ dz ）に働く力を考える。流体要素に働く力は、重力（体積力）と圧力（面積力）のみである。^{*3} 流体要素上面には鉛直下向きに圧力に伴う面積力 $p(x, y, z + dz)dS$ が、流体要素下面には鉛直上向きに圧力に伴う面積力 $p(x, y, z)dS$ が働いている。これと重力 $\rho g dz dS$ が釣りあって流体は静止状態を保っている。したがって、鉛直上向きを正の方向にとると力の釣合は、

$$-p(x, y, z + dz)dS - \rho g dz dS + p(x, y, z)dS = 0 \quad (1.4)$$

である。 dz が微小のとき、 $p(x, y, z + dz)$ は

$$p(x, y, z + dz) = p(x, y, z) + \frac{\partial p}{\partial z} dz + \mathcal{O}(dz^2) \quad (1.5)$$

と Taylor 展開できる。ここで、 $\mathcal{O}(dz^2)$ は dz の 2 次以上の微小量という意味である。この展開を (1.4) の第 1 項に適用し整理すると、

$$\left\{ -\frac{\partial p}{\partial z} + \mathcal{O}(dz^2) - \rho g \right\} dz dS = 0. \quad (1.6)$$

上式を単位体積あたりに働く力で表現するため $dz dS$ で割り、更に $dz \rightarrow 0$, $dS \rightarrow 0$ の極限をとって流体粒子に働く力を求める。このとき、 $\mathcal{O}(dz^2)$ の項は消え、

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0 \quad (1.7)$$

が得られる。

^{*3} 1.4 節参照：流体とは静止状態では応力は圧力のみである。

(1.7) 式は**静力学平衡**（もしくは**静水圧平衡**）(hydrostatic balance) の式と呼ばれ、地球流体力学における最も基本的なバランスの式の一つである。^{*4} 第二項は重力であるから鉛直下向きである。したがって正味の圧力は鉛直上向きに働きバランスを保っていることがわかる。 ρ, g 共に正の量である事から、(1.7) が成り立つためには、 $\frac{\partial p}{\partial z} < 0$ でなければいけない。すなわち、**重力場中では気圧は高度と共に減少していく**。(1.7) の第一項を見ると、流体粒子に働く正味の圧力は p の空間微分によって与えられることがわかる。まったく同様な考え方で、流体粒子に働く x, y 方向の正味の圧力に伴う力は単位体積あたりそれぞれ $-\frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{\partial p}{\partial y}$ となる。ベクトル形式で書くと、正味の圧力に伴う流体粒子に働く単位体積あたりの力は

$$-\nabla p \quad (1.8)$$

となる。この力は圧力（気象では気圧）の勾配に比例するので、**圧力勾配力**、または**気圧傾度力**(pressure gradient force) と呼ばれる。(1.8) でマイナス符号は、気圧の高いほうから低いほうに向けて気圧傾度力は働くことを意味している。

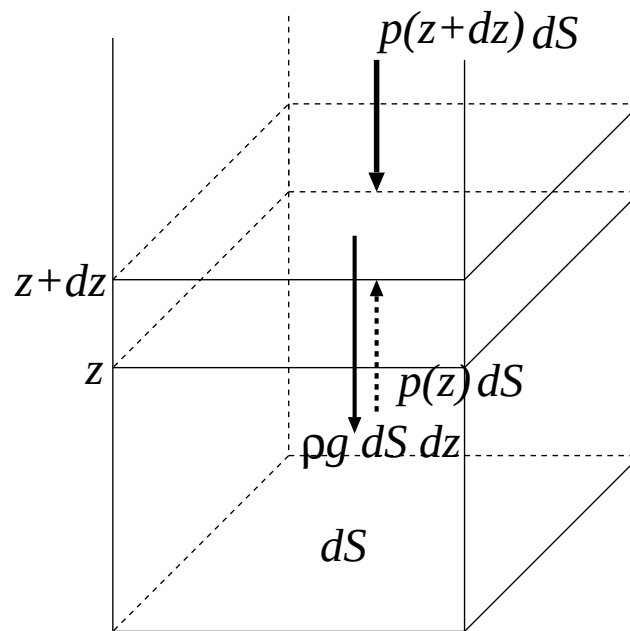


図 1.4 重力場中における底面積 dS 、高度 z と $z + dz$ の間にある密度 ρ の流体に働く力。

^{*4} このバランスは鉛直方向に関するものである。水平方向のバランスとして基本的なものは、Coriolis 力と水平方向の気圧傾度力がバランスした地衡流平衡 (geostrophic balance) である。

1.5.1 幾つかの考察

大気圧とは...

いま簡単化のために大気は鉛直方向にのみ構造を持つとしよう (p は z のみの関数と考える). このとき静力学平衡の式 (1.7) は常微分を用いて

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (1.9)$$

とかける. (1.9) を高度 z から無限大まで積分する. ここで, $z \rightarrow \infty$ では大気は存在しない, すなわち $p(z \rightarrow \infty) = 0$ とすると,

$$p(z) = \int_z^{\infty} \rho g dz \quad (1.10)$$

が得られる. (1.10) は高度 z における大気圧は底面積 1 m^2 , 高さが $z \sim \infty$ の気柱の中にある空気の重さに等しいことを言い表している.

演習問題

地上気圧が 1000 hPa のとき, 1 m^2 の上空にある空気の質量を求めなさい. ただし, 重力加速度は高度に依存せず一定値 $g = 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ とする.

アルキメデスの原理

全節と同じ状況で, 底面積 dS , 厚さ dz の流体要素の部分のみ密度 ρ' を持つ別の物体 (流体でも, 固体でもかまわない) で置き換えたとする. このとき, 物体に働く力は (1.4) を参考にとすると,

$$-p(x, y, z + dz)dS - \rho' g dz dS + p(x, y, z)dS \quad (1.11)$$

となる. 第 1 項と第 3 項は前節の議論から $\rho g dS dz$ に等しい. そこで, (1.11) は

$$(\rho - \rho')g dS dz \quad (1.12)$$

である. もし, $\rho > \rho'$ のとき, すなわち, 流体の密度よりも沈めた物体の密度の方が小さい場合は, (1.12) > 0 となり, 物体は上向きの力を受ける. その力は, 物体の質量と物体の押し退けた流体の質量の差に比例する. これは例えば水を張った風呂桶に洗面器を逆さに静かに押し沈めたときに腕が受ける力である.

さて理化学辞典 [岩波書店] を紐解くと,

浮力: (buoyancy force) “地球上 (一様な重力場中) では, 流体内にある物体にはその表面に作用する流体の圧力のため, 全体として上向きの力を受ける. これを浮力という. 浮力の大きさと作用点とは, 物体の押し退けた流体の重さと重心とに一致する (アルキメデスの原理)”

とある. 上記の文章でいう浮力は, (1.11) における

$$-p(x, y, z + dz)dS + p(x, y, z)dS \quad (1.13)$$

である. (1.13) に静力学平衡の関係を適用した時,

$$-p(x, y, z + dz)dS + p(x, y, z)dS = \rho g dS dz \quad (1.14)$$

となり, 浮力の大きさ (左辺) は物体が押し退けた流体の重さ (右辺) に等しいことがわかる. つまりアルキメデスの原理とは静力学平衡の式の言い換えである.

1.6 流体の種類

流体のもつ物性的性質によって, 流体をいくつかのカテゴリーに分類することができる.

1.6.1 完全流体と粘性流体

流体の隣り合った部分が異なる速度を持つとき, この速度差をなくすように接線応力が現れる性質が**粘性**(viscosity) である.*5

- **完全流体**(inviscid/perfect/ideal fluid): 粘性のない流体, すなわち運動中でも接線応力が現れない流体. 先の定理から, この流体に働く応力は圧力のみである. すなわち,

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}. \quad (1.15)$$

これは高度の理想化であるが, 自然現象をよく記述できる.

- **粘性流体**(viscous fluid): 非完全流体のこと. 実在の流体は少なからず粘性を持っており, したがって実在の流体はすべて粘性流体である. 粘性流体で特に重要なものとして **Newton 流体**(Newtonian fluid) と呼ばれるものがある. これは速度勾配に比例する接線応力を生じるような流体のことである. Newton 流体では応力テ

*5 一般に物理量にムラ, 非均質性, があると, 物質を構成している原子・分子の微視的な乱雑運動によって, そのような不均一性をなくすように物理量の拡散が起こる. 運動量の拡散が粘性である.

ンソルは

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij} \right) \quad (1.16)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.17)$$

で与えられる． μ は粘性率 (coefficient of viscosity) と呼ばれる．Newton 流体は実在の流体の非常に近い近似になっている．(1.16) で粘性係数 μ を 0 とすれば，それは (1.15) に帰着することがわかる．

補足 : (1.16) の導出は，この講義では割愛する．導出の仕方は，たとえば先に紹介した異の教科書を参照のこと．(1.16) の導出には，応力は速度勾配に比例するであろうという物理的考察と，テンソルに関するいくつかの知識を必要とする．*⁶ 流体力学の教科書を自習するとき，初学者はまずここで壁にあたり，悪いケースでは流体力学の勉強をあきらめてしまう．テンソルをしらなくても流体力学のかなりの部分（完全流体の力学）を語ることが可能であり，また地球流体現象では多くの場合，境界層*⁷以外では，粘性の効果は重要ではなく，完全流体の力学によって説明される現象がほとんどである．そこで本講義ではテンソルの話はとりあえず後回しにして，テンソルを用いなくても語れる流体力学をまず講ずることにしている．

1.6.2 圧縮性

気体と液体の違いは，前者が容易に圧縮できるのに対して，後者は圧縮しにくいという点であろう．そこで縮む縮まないの区別は，気体・液体の区別のように思われがちである．しかしながら，流体力学では気体でも非圧縮性流体として取り扱うこともあるし，逆に液体でも圧縮性を考慮する場合がある．

流体の圧縮性によって生じる特徴的現象は音波である．*⁸ したがって流体の縮む，縮まないの区別は，音波を基準に区別され，必ずしも気体・液体の区別を指すものではない．音速を用いて流体を種別すると，

- **圧縮性流体**(compressible fluid)：音速が有限の速さで伝わる流体．
- **非圧縮性流体**(incompressible fluid)：音速が無限の速さで伝わる流体．

*⁶ といっても，任意のテンソルは対称テンソルと反対称テンソルの和で書くことができる，といった程度のものであり，また 2 階のテンソルはであればこれは行列の形に書き表すことができるので，線形代数学を知っていれば造作ないことである．

*⁷ これは固体壁のごく近傍に形成される．たとえばの地球大気では粘性が効く層は地表から数百メートルから 1 キロメートル程度の高さの大気層で，そこは全大気のせいぜい 1 割程度の質量の大気しか存在していない．

*⁸ 音速 c は等 entropy 状態において，圧力に対する密度の変化率によって定義される．すなわち $c \equiv \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_S}$ ．

と言えよう.*⁹ 大気海洋の大規模な運動では、現象の起こる速さが音速に比べて極めて遅いことから音波の影響は無視され、地球流体力学では流体を非圧縮性流体と見做す.*¹⁰

演習問題:

- 理想気体の状態方程式 $p = \rho RT$, 及び熱力学の第1法則 $T dS = c_v dT + p d(\frac{1}{\rho})$ を用いて、断熱変化における圧力 p と密度 ρ の間になりたつ関係式 $p = C\rho^\gamma$ (Poisson の関係式) を導きなさい。ここで、 T , S , c_v , R , C はそれぞれ温度、エントロピー、定積比熱、気体定数、任意定数で、 γ は定積比熱 c_v と定圧比熱 $c_p = c_v + R$ との比, $\gamma = c_p/c_v$ である。
- 前問の結果を用いて、気温 300 K の空気中を伝播する音波の速度 $c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}$ を求める。
 - $\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}$ が速度の次元を持つことを確かめなさい。
 - $c_v = \frac{5}{2}R$, $c_p = \frac{7}{2}R$, $R = 287 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ のとき, c の値を求めなさい。(余力のある人は理科年表などを調べて、今求めた数値を年表に記載されている数値と比較しなさい。)

*⁹ 注目する現象の速度が音速に近い、より遅いかで区別することもある。

*¹⁰ 鉛直方向の温度変化に対してのみ密度変化を起こすような流体 (Bussinesq 流体) を考察する場合もある。しかしこの場合にも、音速は無限大として取り扱われている。このような流体については後で述べることにする。