第 0 章

種々雑多な補足

0.1　座標系

本講義ではほほ全体を通じてデカルト座標系 (Cartesian coordinate) をもちいて現象を記述する．地球の流体現象の記述には, 流体が球面上に束縛されているから本来ならば球面座標系（7.3 節）を用いて記述するべきであるが, 数学的取り扱いを簡単にするためにデカルト座標系を用いることにする.[*1] その他の座標系を用いる場合 (例えば 7.3 節) には, その都度それを説明することにする.

0.2　表記（notation）

0.2.1　ベクトル

ベクトル量は, 高校数学で習った上付きの矢印ではなく, 太字であらわす．すなわち, $\vec{A}$ ではなく $\boldsymbol{A}$ である.

0.2.2　単位ベクトル

デカルト座標系における x, y, z 方向の単位ベクトルは, 慣例にしたがってそれぞれ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ で表す．また, 時として $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ という表記を用いる.[*2] ここで

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k}, \tag{1}$$

である.

[*1] 運動が球面上の比較的狭い領域に限られている場合には, 球面上に局所的にデカルト座標系を張ることができる.

[*2] 和の規約を用いるときにはこのような表記が便利である.

地球流体力学では慣例として x, y, z 方向をそれぞれ, 東向き, 北向き, 鉛直上向きに取る.

0.2.3　位置ベクトル

位置ベクトルは, 慣例にしたがって $\boldsymbol{r}$ もしくは $\boldsymbol{x}$ と表す.[*3] デカルト座標系では, $\boldsymbol{r}$ を成分表示すると

$$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k} \tag{2}$$

と表される．ここで, x, y, z はそれぞれ $\boldsymbol{r}$ の x, y, z 成分である．高校数学で習ったように $\boldsymbol{r} = (x,\, y,\, z)$ という表記よりも, (2) のような単位ベクトルを明示する表記を用いる方を薦める．デカルト座標系のような直線直交座標系では, どちらの表記を用いても大差ないが, 曲線座標系や回転座標系を用いる場合には, 単位ベクトルを明記する表記をしないと大きな間違いを起こす可能性がある．このような例は後の章 (7 章）で示す.

なお, (1) のような単位ベクトルの表記法を用いる場合には

$$\boldsymbol{x} = x_1\,\boldsymbol{e}_1 + x_2\,\boldsymbol{e}_2 + x_3\,\boldsymbol{e}_3 \tag{3}$$

と記す.

0.2.4　速度場

速度場は $\boldsymbol{v}$ で表す．デカルト座標系で成分表示すると,

$$\boldsymbol{v} = u\,\boldsymbol{i} + v\,\boldsymbol{j} + w\,\boldsymbol{k} \tag{4}$$

である．u, v, w はそれぞれ $\boldsymbol{v}$ の x, y, z 方向の成分である.

気象学の慣例に拠れば, 西風 (westerly: $u > 0$), 東風 (easterly: $u < 0$), 北風 (northerly: $v < 0$), 南風 (southerly: $v > 0$) と風（流体）の流れてくる方向を指し示すのに対し, 海洋学では, これらはそれぞれ東向き流れ (eastward: $u > 0$), 西向き流れ (westward: $u < 0$), 南向き流れ (southward: $v < 0$), 北向き流れ (northward: $v > 0$), と流体の流れる向きを指し示す, という違いがある.

なお, (1) のような単位ベクトルの表記法を用いる場合には

$$\boldsymbol{v} = v_1\,\boldsymbol{e}_1 + v_2\,\boldsymbol{e}_2 + v_3\,\boldsymbol{e}_3 \tag{5}$$

と表記する.

[*3] これは記述する座標系には依存しないことに注意するべきである.

0.2.5 偏微分

偏微分記号, $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ は簡単化のために, $\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z$ と記す場合がある. $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ の場合には, $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ と書く. このような表記では微分演算子

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\,\frac{\partial}{\partial z}, \tag{6}$$

は

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{i}\,\partial_x + \boldsymbol{j}\,\partial_y + \boldsymbol{k}\,\partial_z, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_1\,\partial_1 + \boldsymbol{e}_2\,\partial_2 + \boldsymbol{e}_3\,\partial_3 \tag{8}$$

と表現される.

0.3 Gauss の定理

閉曲面 S で囲まれた体積 V について, 以下の 2 つの定理が成り立つ.[*4]

I: 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して以下の式がなりたつ:

$$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = \iint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}, \tag{9}$$

ここで, $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ は法線ベクトル $\boldsymbol{n}$, 微小面積 $\mathrm{d}S$ を持つ面積要素である.

II: 任意のスカラー Q に対して以下の式がなりたつ:

$$\iint_S Q\,n_i\,\mathrm{d}S = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial x_i}\,\mathrm{d}V, \tag{10}$$

ここで, n_i は法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の i 方向の成分である.

I が通常の（電磁気学で登場する）Gauss の定理である.

演習問題:

(10) を証明しなさい.

0.4 Stokes の定理

任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し, 以下の式が成り立つ:

$$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_{\mathrm{S}} (\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{11}$$

[*4] 部分積分を行うことにより, 証明できる.

ここで S は閉曲線 C を縁とする任意の曲面である．つまり, C は固定されているのに対して, S はどんな形でもよい．また, S は閉曲面でないことに注意せよ．$\boldsymbol{n}$ は S 上に立てられた外向き法線である．曲面 S 上に立てられた法線ベクトルは, 線積分において C 上を右回りに進むときに, 右ネジの進む方向にとる．

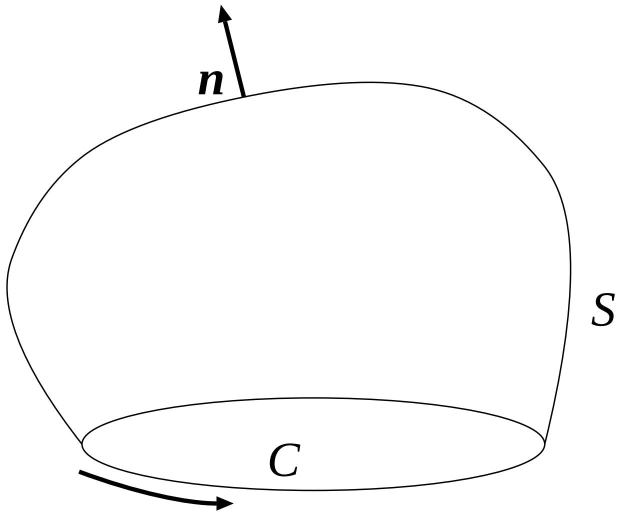

図 1　Stokes の定理を適用する閉曲線 C, C を縁とする曲面 S, および曲面上の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の関係.

演習問題

S を任意の閉曲面とするとき, 積分

$$\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{12}$$

を証明しなさい．ここで $\boldsymbol{v}$ は任意のベクトルである．

ヒント１：　Stokes の定理を使って計算をする．通常 Stokes の定理は閉曲線 C に沿った線積分を面積積分に直すときに用いる．すなわち, (11) を左から右にたどる．しかし, ここではその逆をたどる．

ヒント２：　Stokes の定理を使うためには, 問題の閉曲面を 2 つに割る．例えば, 閉曲面として球 (地球) を想像し, それを大円 (赤道) で 2 つに割る．そうすると各々の半球 (北半球と南半球) は, Stokes の定理が要求している閉曲線 (赤道) を縁とする曲面になる．北半球側で面積積分を実行するとき, 面積積分を Stokes の定理を用いて線積分に変換する．赤道上で積分する際の積分経路の向きに注意する．(東向きか西向きか)

即ち, (12) 式の積分を 2 つに分割し, それぞれに付いて Stokes の定理を適用し

て積分値を見積もる. (任意の閉曲面として, このヒントのような球 (地球) を想像してもよい.)

ヒント３：(あるいは別解)：　デカルト座標系を採用し, (12) の積分を具体的に書き表すと

$$\int\!\!\int_{\mathrm{S}} (\partial_x v - \partial_y u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{13}$$

となる. 上記の積分を実行し, S が閉曲面, 即ち物理量は x, y について周期的であるとして値を見積もる. (これは閉曲面をドーナツ状のものと考えている場合に相当する.)