

2006 年度 地球流体力学 中間試験 模範解答

担当：岩山隆寛

試験日：2006 年 6 月 6 日

コメント：ベクトルとスカラーの違いを理解できていない人が多くいました。例えば、 e_z は単位ベクトルであるので、 e はベクトル表式に書くべき（太文字か上付きの矢印をつける）なのにそのようにしていない人がたくさんいました。問題に e_z は単位ベクトルと明記してありますよね。

また、 $\nabla \cdot (\rho v)$ の計算で内積の記号 \cdot が抜け落ちている人も多くいました。 f, g を共に x の関数とすると、 fg の微分は chain rule により

$$\frac{d}{dx}(fg) = g \frac{d}{dx}f + f \frac{d}{dx}g \quad (8)$$

ですよね。 $\nabla \cdot (\rho v)$ も基本的に上記と同じです。

$$\nabla \cdot (\rho v) = v \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot v \quad (9)$$

です。(8) と (9) の対応関係がわかりますよね？このとき内積の記号 \cdot がどこに付くかのココロは以下の通りです：

- まず左辺の $\nabla \cdot (\rho v)$ はスカラー量である事を念頭に置く。
- 次に chain rule の適用で、右辺第一項は ∇ が ρ に作用したもの掛ける v である。 ∇ がスカラー量の ρ に作用したものは唯一 ρ の勾配 $\nabla \rho$ しかありえない。この量はベクトル量である。それとベクトル量 v との積でスカラー量となるためには、積は内積でなければいけない。したがって、 $(\nabla \rho) \cdot v$ となる。さらに内積は掛け算の順序を交換してもいいので、 $v \cdot \nabla \rho$ 。
- chain rule の第二項は ∇ が v に作用する。 ∇ が v に作用する仕方は、発散 $\nabla \cdot v$ か、もしくは回転 $\nabla \times v$ のいずれかである。前者はスカラー量であり、後者はベクトル量である。 ∇ が v に作用した結果とスカラー量 ρ との積がスカラー量になるためには、 ∇ が v に作用したものはスカラー量でなければいけない。そこで、 ∇ が v に作用したものは $\nabla \cdot v$ であり、chain rule の第二項は $\rho \nabla \cdot v$ となる。

全く同じ理由から， S, V をそれぞれ任意のスカラー量とベクトル量とするときに，

$$\nabla \times (SV) = (\nabla S) \times V + S \nabla \times V \quad (10)$$

となることはすぐにわかります．(9), (10) はベクトル解析の恒等式として，公式集に出ているものですが，別に公式集など参照しなくても，微分の chain rule とベクトル演算を理解していればすぐに導けます．

今回は，ベクトル記号を使っていない，内積記号が落ちている人も にしておきましたが，次回は容赦なく \times にします．

以下は模範解答です．

1. (a) (A) : 質量保存則．

(1) 式の名称：連続の式．

(b) (B) : 運動量保存則．

(2) 式の名称：運動方程式．

(c) (C) : エネルギー保存則．

(3) 式の名称：(熱力学的) エネルギー方程式．

(d) Euler の方法：この方法では，空間に固定された点と時間の関数として流体の運動状態を記述する．即ち，場の立場で流体の運動を記述する．独立変数は x, y, z, t である．

Lagrange の方法：流体を無数の粒子の集団と考え，各粒子の運動を追跡することにより，流体の運動状態を記述する．独立変数は流体粒子の初期位置 a, b, c 及び，時間 t である．

(e) $\frac{D}{Dt}$ は Lagrange 微分と呼ばれ，流体粒子に付随した物理量の時間変化率を表すものである．一方， $\frac{\partial}{\partial t}$ はある空間中の一点で観測される物理量の時間変化率を表すものである．両者を結びつける関係式は

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla$$

である．

(f) (1) の左辺は,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \\ &= \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}.\end{aligned}$$

従って, 求める式は

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

(2) については, $\frac{D}{Dt}$ と $\frac{\partial}{\partial t}$ との関係 (設問 (e) の結果) から直接

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g\mathbf{e}_z,$$

となる.

2. Euler 的な温度変化率と Lagrange 的な温度変化率との関係は,

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T$$

である. 観測所で観測される温度の変化率は $\frac{\partial T}{\partial t}$ であり, 空気塊の温度変化率は $\frac{DT}{Dt}$ である. 従って, ここで求めるのは前者の量であり, 問題で与えられた条件から以下の式の右辺の各項の大きさを見積もることにより求められる:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{DT}{Dt} - \mathbf{v} \cdot \nabla T.$$

空気塊の温度は変化しないので, $\frac{DT}{Dt} = 0$ である. 次に, 観測所の 50km 北の地点では観測所よりも 3.0 K 気温が低いので, 北向きに y 座標を取ると, 温度勾配 ∇T は y 成分のみで

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} = \left(\frac{-3.0 \text{ K}}{50 \text{ km}} \right) \mathbf{j}$$

である. ここで, \mathbf{j} は y 方向の単位ベクトルである. いっぽう, 10 ms^{-1} の北風は

$$\mathbf{v} = (-10 \text{ ms}^{-1}) \mathbf{j}$$

と表現できる. 従って, 観測所における温度の変化率は

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= 0 - (-10 \text{ ms}^{-1}) \times \left(\frac{-3.0 \text{ K}}{50 \text{ km}} \right) = -6.0 \times 10^{-4} \text{ K s}^{-1} \\ &\simeq 2.2 \text{ Kh}^{-1}.\end{aligned}$$

3. (a) 静水圧平衡の式と理想気体の状態方程式を用いて密度 ρ を消去すると,

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\rho g}{RT} \quad (11)$$

が得られる。気圧と温度から任意の気圧面の高度を計算する式 (測高公式) は、上式を変数分離し、

$$dz = -\frac{RT}{g} \frac{dp}{p},$$

高度 $z = 0 \sim z$ まで積分する。(高度 $0, z$ における気圧をそれぞれ $p(0), p(z)$ と表す。)

$$\begin{aligned} \int_0^z dz &= -\int_{p(0)}^{p(z)} \frac{RT}{g} \frac{dp}{p}, \\ z &= -\int_{p(0)}^{p(z)} \frac{RT}{g} d \ln p. \end{aligned} \quad (12)$$

最後の表式が求める式である。なお、重力加速度 g は定数と考えているので、積分の外に出してもよい。

[別解] (11) で変数分離の方法を変えて、

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT} dz \quad (13)$$

と表現し、同様に積分する：

$$\begin{aligned} \int_{p(0)}^{p(z)} \frac{dp}{p} &= -\int_0^z \frac{g}{RT} dz, \\ \ln \frac{p(z)}{p(0)} &= -\int_0^z \frac{g}{RT} dz, \\ p(z) &= p(0) \exp\left(-\int_0^z \frac{g}{RT} dz\right) \end{aligned} \quad (14)$$

としてもよい。

(b) (12) もしくは (14) において、 $T = T_0$ (定数) とすると、(重力加速度 g も気体定数 R も定数であるので) 積分が実行できて、

$$\begin{aligned} p(z) &= p(0) \exp(-z/H), \\ H &= \frac{RT_0}{g}, \end{aligned}$$

が得られる。

(c) この場合には, (14) の表式を用いる.

i. $T(z) = T_0 - \Gamma z$ を (14) に代入すると,

$$\begin{aligned} p(z) &= p(0) \exp \left(-\frac{g}{R} \int_0^z \frac{1}{T_0 - \Gamma z} dz \right), \\ p(z) &= p(0) \exp \left\{ \frac{g}{R\Gamma} \ln \left(\frac{T_0 - \Gamma z}{T_0} \right) \right\}, \\ p(z) &= p(0) \exp \left[\ln \left\{ \left(\frac{T_0 - \Gamma z}{T_0} \right)^{g/(R\Gamma)} \right\} \right], \\ p(z) &= p(0) \left(\frac{T_0 - \Gamma z}{T_0} \right)^{g/(R\Gamma)}. \end{aligned} \tag{15}$$

最後の表式が求める式である.

ii. (15) において, $z = T_0/\Gamma$ で気圧はゼロになることから, このような温度構造では大気は有限の高さまでしか存在しないことになる. 実は気圧がゼロになる高さ $z = T_0/\Gamma$ は温度がゼロになる高さ ($T = T_0 - \Gamma z = 0$ を満足する z) として, 測高公式を用いなくても求められる.