第4章　状態方程式

前章で導出した連続の方程式, 運動方程式, 熱力学的エネルギー方程式の 3 種類, 5 個の方程式には, 未知変数として, 密度 ρ, 速度 $\mathbf{v}$, 圧力 p, 内部エネルギー $\mathcal{U}$ の 6 つが含まれている. したがって, 方程式は閉じていないように見える. しかし熱力学的な物理量の間には一定の関数関係 (状態方程式) が存在し, ある熱力学的な変数は別の 2 つの熱力学的変数で表現することが可能である. したがって, 流体力学の基礎方程式は上記の 5 つで十分である. ここでは, 状態方程式の具体的な形を議論することにする.

4.1　状態方程式の例

地球流体力学では以下のような状態方程式に従う流体を考察の対称とする場合が多い.[1]

4.1.1　理想気体

希薄な気体では, 以下のような状態方程式がよい近似で成り立つ:

$$p = \rho R T. \tag{4.1}$$

注意： (4.1) は単位体積の理想気体の方程式である. 化学で習う n kmol の理想気体の状態方程式は

$$PV = nR^*T \tag{4.2}$$

である. ここで, R^* は普遍定数 ($R^* = 8.314 \times 10^3 \mathrm{J\,K^{-1}\,kmol^{-1}}$) である. 体積 V に含まれる理想気体の分子の質量を m kg, 理想気体の分子量を M すると, (4.2) は

$$P = \frac{m}{V}\frac{R^*}{M}T \tag{4.3}$$

[1]気象力学では地球大気を理想気体と扱い, 海洋力学では海洋を Boussinesq 流体として扱うことが多い.

となる. $\rho = m/V$ であるから, (4.1) と (4.3) を見比べると

$$R = \frac{R^*}{M} \tag{4.4}$$

という関係がなりたつことがわかる.

- 地球大気は窒素 (分子量 28) 75.5 %, 酸素 (分子量 32) 23.1 %, アルゴン (分子量 40) 1.3 %の混合気体なので[2], 平均分子量は $M = 28 \times 0.755 + 32 \times 0.231 + 40 \times 0.013 = 28.96$. したがって $R = R^*/28.96 = 287.1 \mathrm{J\,K^{-1}\,kg^{-1}}$ である.

演習問題：

金星大気, 火星大気の大気組成を調べ, これらの大気を理想気体とみなしたときの気体定数 R を求めなさい.

4.1.2 Boussinesq 流体

一般的な状態方程式 $\rho = f(p, T)$ をある基準の温度 T_0, 圧力 p_0 の周りで Taylor 展開して, 展開の 1 次の項までをとる：

$$\begin{aligned}
\rho = f(p,T) &= f(p_0, T_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_T (p - p_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_p (T - T_0) \\
&= \rho_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T (p - p_0) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p (T - T_0) \\
&= \rho_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T (p - p_0) + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p (T - T_0) \right\}
\end{aligned}$$

圧縮率 がゼロ, $\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = 0$, であるとすると,

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho_0 \left[1 - \alpha (T - T_0)\right], \qquad (4.5) \\
\alpha &\equiv -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p, \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

を得る. (4.5) の状態方程式に従う流体は **Boussinesq 流体**と呼ばれ, 水のように, 密度が圧力と独立であるような流体の状態方程式として用いられる. ここで, α は

[2]高度約 80 km あたりまでこのような成分比に保たれている.

体膨張係数, もしくは体膨張率と呼ばれる.[3] 海洋の場合には, 密度は塩分にも依存するので,

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \alpha(T - T_0) + \beta(s - s_0)\right], \tag{4.7}$$

$$\beta \equiv -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_{p,T} \tag{4.8}$$

が用いられる. ここで, s は塩分 (salinity) である. s の単位は, 海水 1 kg あたりの塩分のグラム数として計られる. また, β は, α との対応から, 塩分圧縮係数 (coefficient of saline contraction) と呼ばれる.

4.2 順圧流体の状態方程式

連続の方程式に現れる未知変数は, 密度 ρ と速度 $\mathbf{v}$ である. 一方, 運動方程式には上記のほかに圧力 p が未知変数として現れている. したがって, もし圧力と密度との間に一定の関数関係

$$\rho = \mathcal{F}(p) \tag{4.9}$$

が存在するとき, もしくは状態方程式の形で

$$f(p, \rho) = 0 \tag{4.10}$$

という流体を考えるならば, エネルギー方程式を持ち出さなくても, 連続の式と運動方程式のみで方程式は閉じるさせることができ, 流体の運動を決定できる. (4.9) あるいは (4.10) を満足するような流体を**順圧流体** (barotropic fluid) と呼ぶ. これは (4.10) 式で与えられる流体の等圧面と等密度面が平行であることからこのように呼ばれている. いっぽう一般の流体は密度, 圧力以外に例えば温度にも依存するので等密度面と等圧面は平行ではなく傾いている. このような流体は**傾圧流体** (baroclinic fluid) と呼ばれる. 順圧と言ういいかたは, 地球流体力学特有の呼び名で通常の流体力学では, barotropic fluid のことをバロトロピー流体と呼び (例えば今井功：流体力学 (岩波書店) 参照), 一方, baroclinic や傾圧と言う言葉はでてこない.

先に述べた順圧流体として例えば以下のような場合が考えられる.

[3] (4.6) にマイナス符号を付けて, 膨張率を定義する理由は, 一般に気体は等圧下で温度を加えれば膨張し密度は減るからである. すなわち, $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p < 0$. 従って, 膨張率を正の量として定義するために, マイナス符号をつけている. ρ_0 で除する理由は「率」にするためである.

4.2.1　非圧縮一様流体

非圧縮 $\dfrac{D\rho}{Dt} = 0$ で, 至るところ密度が一様な流体 (incompressible homogeneous fluid) では,

$$\rho = const. \tag{4.11}$$

このとき, 流体力学の基礎方程式は極めて簡単になる．例えば Newton 流体の場合には, 運動方程式は

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{K}, \tag{4.12}$$

ここで, $P = p/\rho$ である．また連続の方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{4.13}$$

である．即ち，未知変数は $\mathbf{v}, P$ なので，上記の 2 種類の方程式で問題は閉じる．上記のような方程式に従う流体の運動は, 現実的な流れの予報や解析という目的ではなく, Navier-Stokes 方程式が持つ数理物理的性質を調べる目的で研究されている．

4.2.2　断熱変化する流体

流体の熱伝導性が悪い場合には, 運動に際して状態変化は断熱的となる．理想気体の状態変化を圧力 p, 密度 ρ, エントロピー S で記述すると

$$p = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}\,\rho^\gamma \exp\left(\frac{S - S_0}{C_v}\right) \tag{4.14}$$

と書ける．ここで添字 0 の付いた物理量は, ある基準となる状態を表す．また γ は定積比熱 C_v と定圧比熱 C_p の比 $\gamma = C_p/C_v$ である．断熱過程ではエントロピーが状態変化中で保存される ($S = S_0$) ので, (4.14) は

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \tag{4.15}$$

となる．

演習問題：

熱力学の第一法則 $d\mathcal{U} = T\,dS - p\,d(\rho^{-1})$, 理想気体の状態方程式 $p = \rho RT$, さらに $d\mathcal{U} = C_v\,dT$ を用いて, (4.14) を導きなさい．

演習問題：

(4.15) は Poisson の関係式と呼ばれる．Poisson の関係式を理想気体の状態方程式を使って, T, p で表現すると,

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \tag{4.16}$$

となることを示しなさい．ここで, T_0 は p_0 における温度である．

ポリトロープ大気

惑星大気の構造を議論する場合に，その圧力，密度，温度の間に適当な関数関係を仮定する場合がある．そのうちの代表的なものは**ポリトロープ大気**の近似と呼ばれ，仮定する温度，圧力，密度間の関数関係は，(4.15) や (4.16) である．ただし，この場合には γ は**ポリトロピック指数** (polytropic exponent) と呼ばれる量で必ずしも比熱比 ($= C_p/C_v$) ではない．ポリトロープ大気においては，(4.15) や (4.16) は状態方程式とみなすべきではなく，熱輸送に関する近似とみなすべきである．すなわち，状態方程式とみなせば γ は比熱比で自動的に与えられてしまうが，ポリトロープ大気の場合には状況に応じて値が変わりえる．例えば，熱効率のよい等温大気では $\gamma = 1$ とおき，大気の鉛直温度勾配が断熱温度勾配になっているような状況では，γ は比熱比にとる．

4.3 温位

(4.16) は熱力学においては

$$p^{R/C_p} T = \mathrm{const} \tag{4.17}$$

などと表現される場合が多く, T_0, p_0 という量を導入してそれを問題にすることはほとんどないが, 地球流体力学では, T_0 は温位 (potential temperature) と呼ばれ, 重要な役割を果たす物理量である．

鉛直方向にある温度プロファイルを持った大気を考え, ある高度 z において気圧 $p(z)$, 温度 $T(z)$ を持った空気塊を気圧が p_0 を持つ高度まで (通常 $p_0 = 1000\mathrm{hPa}$ が用いられる), 断熱的に移動させたとき, 空気塊が持つ温度 T_0 を, 高度 z にある空気塊が持っている温位と定義する．通常, 温位は記号的に θ と表される．安定性の議論を行うと, 温位の鉛直分布 $\theta(z)$ により, 鉛直方向の大気の安定度を見積もることが出来ることがわかる．

この量はエントロピー S との間に

$$S = C_p \ln \theta + \mathrm{const} \tag{4.18}$$

の関係がある. 地球流体力学ではエントロピーよりも温位を使って現象を表現することが通例である.

演習問題：

(4.18) を導出しなさい.