

# 地球惑星科学実習 B-3: 常微分方程式の数値解法

岩山 隆寛\*

2015年5月29日, 6月5, 12日

## 1 はじめに

物理現象の発展を記述する方程式は, Newton の運動方程式, Maxwell 方程式, Navier-Stokes 方程式など, 微分方程式の形で書かれることが多い. 質点の運動を記述する方程式 (Newton の運動方程式) は, 質点の位置を未知変数とすると 2 階の微分方程式である. しかし, 運動量を導入すると, 1 階の連立微分方程式に書き下すことができる. そこで先ず 1 階の単一の常微分方程式,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad (1)$$

をある初期条件<sup>\*1</sup>(時間  $t = t_0 (= 0)$  における  $x(t)$  の値),

$$x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

のもとで数値的に解くことを考える.  $f$  は既知の関数である.

数値計算では連続的な変数は扱えないので, 時間  $t$  は  $t_0, t_1, t_2, \dots$  というとびとびの値になり,

$$t_1 - t_0 = \Delta t, t_2 - t_1 = \Delta t, \dots, \quad (3)$$

は刻み幅, もしくはステップ幅という. 初期条件が与えられた時に, 時間  $t = t_1, t_2, t_3, \dots$  における  $x(t)$  の値,  $x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots$  を求めていく.

(1) は形式的に積分すると,

$$x(t_i) = \int_{t_0}^{t_i} f(x(t), t) dt, \quad (4)$$

---

\* 神戸大学 大学院理学研究科 惑星学専攻. e-mail: iwayama@kobe-u.ac.jp

<sup>\*1</sup> (1) における  $t$  は時間でなくてもよいがここでは時間と呼ぶことにする.

とかける。即ち、 $x(t)$  を求めるには積分する必要がある。前回までに学んだ数値積分との違いは、(1) の右辺の  $f$  に  $x$  が含まれるか、含まれないかの違いである。もし、(1) の右辺の  $f$  に  $x$  が含まれないのであれば、(1) の問題は単に定積分、

$$x(t_i) = \int_{t_0}^{t_i} f(t) dt, \quad (5)$$

であり、前回までに学んだ知識で解ける。ここでは、 $f$  に未知変数  $x$  を含む場合を考える。

数値積分の際に、精度の異なる 2 つの数値積分法を学んだ。ここでも常微分方程式の精度の異なる 2 つの数値解法を紹介する。

## 2 Euler 法

### 2.1 解説

独立変数  $t$  を  $\Delta t > 0$  の一定の刻み幅で離散化、

$$t_k = k\Delta t, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

し、 $t_k$  における  $x$  の値を、

$$x(t_k) = x_k, \quad (7)$$

と表す。微分の定義を参照すると、

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_k} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{\Delta t}, \quad (8)$$

である。そこで、(1) の左辺を、

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_k} \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t}, \quad (9)$$

と近似し、(1) を

$$x_{k+1} = x_k + f(x_k, t_k)\Delta t \quad (10)$$

と変形する。(10) に従って常微分方程式を解く方法を Euler 法という。(9) のような微分の差分による置き換えは、前進差分と呼ばれる。<sup>\*2</sup> (10) は常微分方程式の数値解法の中で

---

<sup>\*2</sup> 他にも後退差分、

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_k} \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t}, \quad (11)$$

最も簡単なものである。初期条件  $t_0, x_0$  が与えられるとそれらを用いて  $f(x_0, t_0)$  を求め、(10) にしたがって、 $t_1$  における  $x_1$  が求まる。さらに、 $t_1, x_1$  から (10) に従って  $t_2$  における  $x_2$  が計算でき、... と次々に将来の時間における  $x$  の値が計算できる。

## 2.2 演習問題

1. 次の常微分方程式 ( $\lambda > 0$  とする) の解析解を求めなさい。さらに Euler 法により数値解を求めて、両者を比較しなさい。

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x, \quad x(0) = x_0. \quad (13)$$

数値解では、 $\lambda, x_0$  の値を自分で適当な数値において計算しなさい。

2. あなたの好きな 1 階の常微分方程式を挙げなさい。その解析解を示し、さらにその微分方程式を Euler 法で数値的に解き、解析解と数値解を比較しなさい。<sup>\*3</sup>

## 2.3 サンプルプログラム

(13) を Euler 法で解くプログラムの例を以下に示す。以下では、 $\lambda = 1, \Delta t = 10^{-3}$ 、初期条件  $x(0) = 1$  のもとで (13) を  $t = 10$  まで解いている。全ての時間で  $x$  の値を出力するのではなく、 $10^{-1}$  毎に results.dat というファイルに  $t$  と  $x$  の値を書きだしている。書き出しの形式は、符号、仮数部、指数部を合わせて 12 ケタで、仮数部を少数以下 5 桁となるように指定している。

---

や中央差分,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_k} \approx \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2\Delta t}, \quad (12)$$

と呼ばれる微分の近似表現がある。

<sup>\*3</sup> 地球惑星科学基礎 III 演習で 1 階の常微分方程式の演習問題を解きました。

```
c sample program for numerical integration of an ordinary differential equation
c produced by Takahiro IWAYAMA
c 2015.05.27
c23456789012345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012
```

```
program ode
```

```
implicit none
```

```
integer i, k, k_max, k_out
```

```
real*8 t, dt, t_out, x, a, t_max
```

```
parameter (t_max=10.0d0, dt=1.0d-3, t_out=1.0d-1)
```

```
real*8 x_out(0:int(t_max/t_out)), f
```

```
k_max=int(t_max/dt)
```

```
k_out=int(t_out/dt)
```

```
k=0
```

```
c initial condition
```

```
x=1.d0
```

```
t=0.d0
```

```
x_out(k)=x
```

```
c time evolution
```

```
do 10 i=1,k_max
```

```
t=dbl(i)*dt
```

```
c evlotuion
```

```
x=x+f(x,t)*dt
```

```
c output control
```

```
if (mod(i,k_out)==0) then
```

```
k=k+1
```

```
x_out(k)=x
```

```
endif
```

```
10 continue
```

```

open(10,file='results.dat')
do 20 k=0,int(t_max/t_out)
    write(10,'(1x,E12.5,1x,E12.5)') k*k_out*dt, x_out(k)
20    continue
close(10)

stop
end

```

c-----

```

real*8 function f(x,t)

real*8 x,t,lambda
lambda=1.0

f=-lambda*x

return
end

```

## 2.4 結果

(13) を Euler 法により数値的に解いた結果と解析解 ( $x(t) = e^{-t}$ ) を図 1 に示す. 数値計算の条件は, 時間刻み  $\Delta t = 10^{-3}$ , 初期条件  $x(0) = 1$ ,  $\lambda = 1$  で  $t = 10$  まで倍精度で解いている. 図 1 からわかるように, 数値解は解析解をよく表現できていることがわかる.\*4

## 2.5 Gnuplot の使い方についてのメモ

- $x$  軸のラベルを  $t$  にする.

```
gnuplot> set xlabel "t"
```

---

\*4 図示して目で比べるのではなく, 解析解と数値解の相対誤差を時間の関数として表現してもよいがここではそれは割愛した.

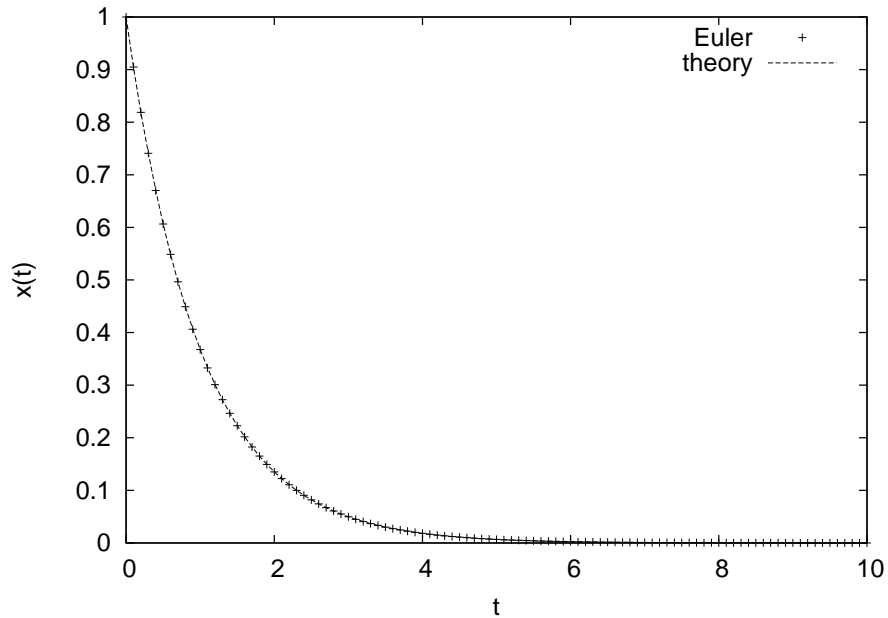


図1 Euler 法による数値計算で求めた (13) の解 (+ 印) とその解析解 (破線) の比較.

- $y$  軸のラベルを  $x(t)$  にする.

```
gnuplot> set ylabel "x(t)"
```

- results.dat にあるデータと  $\sin x$  の関数形を表示し, 右上の凡例を results.dat は Euler,  $\sin x$  は  $\sin(x)$  にする.

```
gnuplot> p 'results.dat' title 'Euler', sin(x) title 'sin(x)'
```

- 図の出力を画面ではなく tex ファイルに張り込むために eps 形式のファイルに出力する. その際, 軸のラベルなどの文字は 20 ポイントのお気さにする.

```
gnuplot> set terminal postscript eps 20
```

- 図の出力先のファイルとして figure.eps を指定する.

```
gnuplot> set output "figure.eps"
```

- 図を再描画する

```
gnuplot> replot
```

## 2.6 T<sub>E</sub>X の使い方についてのメモ

前小節の図 1 のように T<sub>E</sub>X の文章に図を張る場合には, 図を eps 形式の図 (たとえば ode1.eps) を用意する. T<sub>E</sub>X の文章のプリアンブルを次のようにする:

```
\documentclass[a4]{jsarticle}
\usepackages[dvipdfmx]{graphicx} <-これを追加する.
```

さらに T<sub>E</sub>X 内の図を張り込みたい場所に,

```
\begin{figure}[htbp]
  \begin{center}
    \includegraphics[width=7cm,angle=270]{ode1.eps}
    \vspace{2zw}
    \caption{図の説明.}\label{fig_1}
  \end{center}
\end{figure}
```

と記述する.

## 2.7 精度

常微分方程式を解くときには, 微分を差分で表現しているのでそれに伴う誤差,

$$e_k \equiv x(t_k) - x_k, \quad (14)$$

が存在する. Euler 法の誤差を見積もってみる.  $x(t_k)$  を解析解,  $x_k$  を数値解とする. このとき Euler 法の誤差は,

$$e_{k+1} = x(t_{k+1}) - x_{k+1} = x(t_{k+1}) - \{x_k + f(x_k, t_k)\Delta t\}$$

ここで,  $t = t_k$  においては解析解と数値解は一致している,  $x_k = x(t_k)$ , と仮定し, さらに  $x(t_{k+1})$  を  $t_k$  の周りで Taylor 展開する:

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= \left\{ x(t_k) + \Delta t \frac{dx(t_k)}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{d^2x(t_k)}{dt^2} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \right\} - \{x_k + f(x_k, t_k)\Delta t\} \\ &= \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{d^2x(t_k)}{dt^2} + \mathcal{O}(\Delta t^3). \end{aligned} \quad (15)$$

つまり, Euler 法の誤差は  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$  であり, Euler 法は  $\Delta t$  の 1 次まで正しい計算法である. そこで 1 次の公式とも呼ばれる. Euler 法における誤差は無限に続く Taylor 展開を  $\Delta t$  の 1 次の項で打ち切ったために生じたものであり, 打ち切り誤差であるといえる.

## 2.8 2 階の常微分方程式

### 2.8.1 解説

質量  $m$  の質点の運動に関する Newton の運動方程式,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x, \dot{x}, t), \quad (16)$$

は, 時間に関する 2 階の微分方程式である. ここで, 質点に働く  $F$  は質点の位置と速度  $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$ , 時間  $t$  に依存するとした. 運動量  $p \equiv m\dot{x}$  を導入すれば, (16) は

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}, \quad (17)$$

$$\frac{dp}{dt} = F\left(x, \frac{p}{m}, t\right), \quad (18)$$

と 1 階の連立常微分方程式として書ける. そこで, 2 階の常微分方程式も上の節で述べた 1 階の常微分方程式の数値解法の知識を使えば, 数値的に解けることになる.

### 2.8.2 演習問題

次の常微分方程式の解析解を求めなさい. さらに Euler 法により数値解を求めて, 両者を比較しなさい.



1. ばね定数  $k$  の線形ばねに繋がれた質量  $m$  の質点の運動方程式は次の 2 階の微分方程式,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (19)$$

に書ける. これを  $m = 1, k = 1$ , 初期条件,  $x(0) = 1, dx(0)/dt = 0$ , のもとで解くことを考える. (19) は以下のような 1 階の連立常微分方程式に書き直すことができる:

$$\frac{dx}{dt} = p, \quad x(0) = 1. \quad (20)$$

$$\frac{dp}{dt} = -x, \quad p(0) = 0. \quad (21)$$

ここで,  $p$  は運動量である.

■ヒント 1 階の単一の常微分方程式を解くプログラムを利用して,

$$\frac{dx}{dt} = G(x, p, t), \quad (22)$$

$$\frac{dp}{dt} = F(x, p, t), \quad (23)$$

を解くプログラムを書く. そのための作業の概要は, 次のとおりです:

- (a) 新しい変数として  $p$  を導入する.
- (b) 新しい変数  $p$  の初期条件を設定する.
- (c) ファイルに書きだす変数は,  $t, x, p$  とする.
- (d) 上記の変更に合わせて, FORMAT 文を変更する.
- (e) 関数  $F$  を  $x, t$  を変数とする関数から,  $x, p, t$  を変数とする関数に書き換える.
- (f) 新たに  $G(x, p, t)$  という関数を導入する.

■ サンプルプログラム 以下にサンうるプログラムを添付する.

```
c sample program for numerical integration of an ordinary differential equation  
c with 2nd order
```

```
c produced by Takahiro IWAYAMA
```

```
c 2015.05.27-0605
```

```
c23456789012345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012
```

```
program ode
```

```
implicit none
```

```
integer i, k, k_max, k_out
```

```
real*8 t, dt, t_out, x, a, t_max, p
```

```
parameter (t_max=100.0d0, dt=1.0d-3, t_out=1.0d-1)
```

```
real*8 x_out(0:int(t_max/t_out)), f, x_work
```

```
real*8 p_out(0:int(t_max/t_out)), g, p_work
```

```
k_max=int(t_max/dt)
```

```
k_out=int(t_out/dt)
```

```
k=0
```

```
c initial condition
```

```
x=1.d0
```

```
p=0.d0
```

```
t=0.d0
```

```
x_out(k)=x
```

```
p_out(k)=p
```

```
c time evolution
```

```
do 10 i=1,k_max
```

```
t=dbl(i)*dt
```

```
c evlotuion
```

```
x_work=x+f(x,p,t)*dt
```

```
p_work=p+g(x,p,t)*dt
```

```

        x=x_work
        p=p_work
c output control
        if (mod(i,k_out)==0) then
            k=k+1
            x_out(k)=x
            p_out(k)=p
        endif
10    continue

        open(10,file='mov.dat')
        do 20 k=0,int(t_max/t_out)
            write(10,'(1x,E12.5,1x,E12.5,1x,E12.5)') k*k_out*dt, x_out(k),
&    p_out(k)
20    continue
        close(10)

        stop
        end
c-----
        real*8 function f(x,p,t)

        real*8  x, p, t, m
        m=1.0

        f=p/m

        return
        end
c-----
        real*8 function g(x,p,t)

        real*8  x, p, t, k

```

```

k=1.0

g=-k*x

return
end

```

■結果 図 2, 3, 4 に (19) を上で指定された条件のもとで解いた解析解 ( $x(t) = \cos(t)$ ,  $p(t) = -\sin(t)$ ) と Euler 法による数値解を示す ( $x(t) - p(t)$  平面は位相空間と呼ばれる. 長時間の解の軌道を見るのに便利な表記である.). 図 2, 3 によると, 数値解と解析解は一致しているように見えるが, 図 4 を見ると振動の振幅が時間とともに増大していつていることがわかる.

- あなたの好きな 2 階の常微分方程式を挙げ, その解析解を示しなさい. またその微分方程式を適当な初期条件のもとで Euler 法によって数値的に解き, 解析解と数値解を比較しなさい.

## 3 Adams-Bashforth 法

### 3.1 解説

前節では 1 次の公式の Euler 法についてみた. より高次の公式を導こう. ここでは 2 次の公式である Adams-Bashforth 法を導く.

$x(t_{k+1})$  の Taylor 展開において,  $\Delta t$  の 2 次までの項を残すことを考える:

$$\begin{aligned}
x(t_{k+1}) &= x(t_k) + \frac{dx(t_k)}{dt} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{d^2x(t_k)}{dt^2} \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\
&= x(t_k) + f(x(t_k), t_k) \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{df(x(t_k), t_k)}{dt} \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\
&\approx x_k + f(x_k, t_k) \Delta t + \frac{1}{2} \frac{f(x_k, t_k) - f(x_{k-1}, t_{k-1})}{\Delta t} \Delta t^2 \\
&= x_k + \left( \frac{3}{2} f(x_k, t_k) - \frac{1}{2} f(x_{k-1}, t_{k-1}) \right) \Delta t.
\end{aligned} \tag{24}$$

ここで  $f$  の微分は, 後方差分により近似した. 即ち,

$$x_{k+1} = x_k + \left( \frac{3}{2} f(x_k, t_k) - \frac{1}{2} f(x_{k-1}, t_{k-1}) \right) \Delta t \tag{25}$$

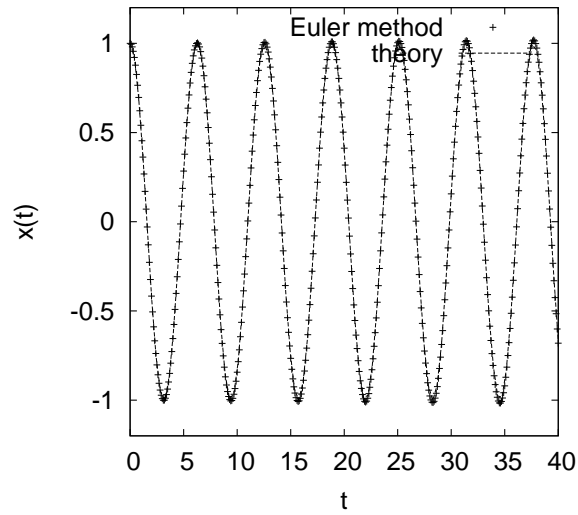


図2 Euler法による数値計算で求めた(19)の解(+印)とその解析解(破線)の比較( $x(t)$ の時系列).

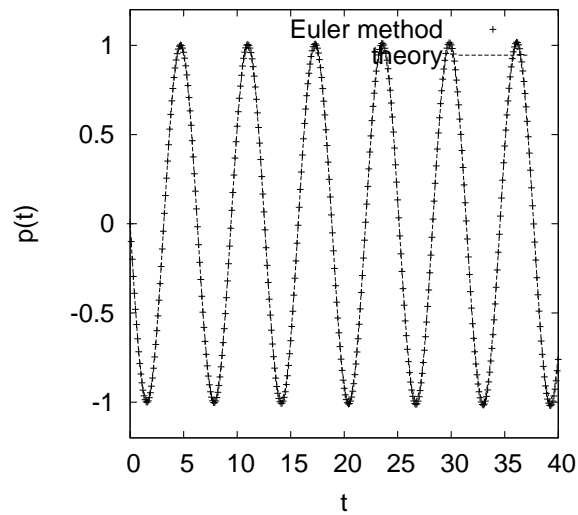


図3 Euler法による数値計算で求めた(19)の解(+印)とその解析解(破線)の比較( $p(t)$ の時系列).

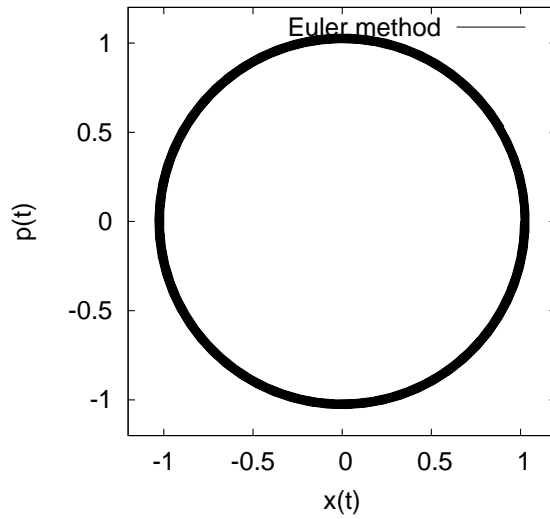


図4 Euler法による数値計算で求めた(19)の解の位相空間の軌道.  $t = 100$ までを  
 図示している. 解析解は半径1の円であるが時間とともにわずかに半径が増大していっ  
 ている.

にしたがって常微分方程式を数値的に解く方法は  $\Delta t$  の2次まで正しく, この  
 方法を Adams-Bashforth 法という. この方法では, 2つの時間における関数の値  
 $f(x_k, t_k), f(x_{k-1}, t_{k-1})$  が必要である. そこで  $t_0$  から数値計算を始める場合, 何らかの  
 方法 (例えば Euler 法) で  $t_1$  における微分方程式の解を得ておく必要がある.

### 3.2 演習問題

次の常微分方程式を Adams-Bashforth 法により数値解を求めて, 解析解と比較しな  
 さい.

1. ばね定数  $k$  の線形ばねに繋がれた質量  $m$  の質点の運動方程式は次の2階の微分方  
 程式,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (26)$$

に書ける. これを  $m = 1, k = 1$ , 初期条件,  $x(0) = 1, dx(0)/dt = 0$ , のもとで解く  
 ことを考える. (19) は以下のような1階の連立常微分方程式に書き直すことがで

きる:

$$\frac{dx}{dt} = p, \quad x(0) = 1. \quad (27)$$

$$\frac{dp}{dt} = -x, \quad p(0) = 0. \quad (28)$$

ここで,  $p$  は運動量である.

■結果 図5に(26)を上で指定された条件のもとで Adams-Bashforth 法によって解いた数値解の位相空間の軌道を示す. Euler 法による解(図4)と異なり, 振動の振幅は1に保たれていることがわかる.

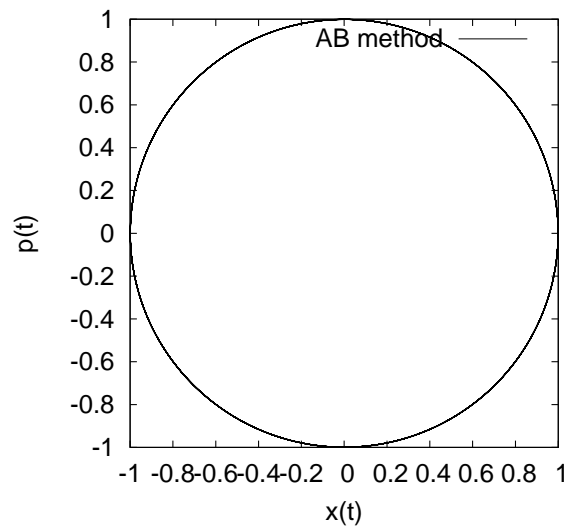


図5 Adams-Bashforth 法による数値計算で求めた(26)の解の位相空間の軌道.  $t = 100$  までを図示している.

## 4 適合性, 安定性

微分方程式を差分で近似して解く場合に, 注意しておくべき事項, 2点についてまとめた.

## 4.1 適合性

差分間隔  $\Delta t$  を 0 にした極限で、差分方程式は微分方程式に一致しなければならない。これを適合性という。差分の切断誤差が  $\Delta t$  の 1 次以上であれば、その差分は適合性を満たす。

## 4.2 安定性

数値解の誤差  $e_k$  が、 $\Delta t$  を固定して  $k \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow \infty$ ) のときに有界の場合に、その差分による解法は安定である、という。もしくは、どのような初期条件に対しても安定な数値解をもつ場合、その差分による解法は安定である、という。

差分法が安定でない場合には、時間積分の途中でオーバーフローを起こして望みの時間までの積分ができない。そのため、差分法の安定性を調べることは実用上重要である。

以下では、差分法の安定性を調べる方法の中で一番よく使われる方法、von Neumann の方法を紹介する。 $t = t_k$  における微分方程式の解を  $x_k$  とする。 $x_{k+1} = \lambda x_k$  として、増幅因子  $\lambda$  を導入する。差分法が安定であるためには、

$$|x_k| = |\lambda| |x_{k-1}| = \dots = |\lambda|^k |x_0| < B, \quad (29)$$

ここで、 $B$  はある有限の数である。(29) を変形して、

$$k \ln |\lambda| < \ln \frac{B}{|x_0|} \equiv B'.$$

$k = t/\Delta t$  に注意すると、

$$\begin{aligned} \ln |\lambda| &< \frac{B'}{t} \Delta t \\ \therefore \ln |\lambda| &\leq \mathcal{O}(\Delta t). \end{aligned} \quad (30)$$

(30) より差分法が安定であるための条件として、

$$|\lambda| \leq 1 + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (31)$$

を得る。(31) は von Neumann の条件と呼ばれる。微分方程式の真の解が単調に増加するのでなければ、(31) は

$$|\lambda| \leq 1, \quad (32)$$

である。



### 4.3 例

#### 1. 減衰の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -ax, \quad (a > 0) \quad (33)$$

について, Euler 法と Adams-Bashforth 法の安定性を調べてみる.

Euler 法によると, (33) は

$$x_{k+1} = x_k - a\Delta t x_k \quad (34)$$

である. (34) に  $x_k = \lambda x_{k-1}$  を代入して,

$$\lambda = 1 - a\Delta t. \quad (35)$$

$a\Delta t < 1$  ならば (35) は von Neumann の条件を満足している.

いっぽう, Adams-Bashforth 法によると, (33) は

$$x_{k+1} = x_k - \frac{a\Delta t}{2} (3x_k - x_{k-1}) \quad (36)$$

である. (36) に  $x_k = \lambda x_{k-1}$  を代入して,

$$\lambda^2 = \lambda - \frac{a\Delta t}{2} (3\lambda - 1). \quad (37)$$

(35) は 2 つの根,

$$\lambda_+ = \frac{1}{2} \left\{ \left( 1 - \frac{3a\Delta t}{2} \right) + \sqrt{1 - a\Delta t - \frac{9}{4}a^2\Delta t^2} \right\}, \quad (38a)$$

$$\lambda_- = \frac{1}{2} \left\{ \left( 1 - \frac{3a\Delta t}{2} \right) - \sqrt{1 - a\Delta t - \frac{9}{4}a^2\Delta t^2} \right\}, \quad (38b)$$

$$(38c)$$

を持ち,  $a\Delta t \ll 1$  で  $O(a^2\Delta t^2)$  を無視すると,  $\lambda_+ \approx 1 - a\Delta t/2$ ,  $\lambda_- \approx -a\Delta t/2$  となる.  $\lambda_+$  は Euler 法を適用した時に得られた増幅因子と同じものであるが,  $\lambda_-$  は差分化の手続きによって生じたモード増幅因子である.  $x_k^{(+)} = \lambda_+^k x_0^{(+)}$ ,  $x_k^{(-)} = \lambda_-^k x_0^{(-)}$  は, それぞれ, 物理モード, 計算モードと呼ばれ, 差分方程式の解はこの線形結合で  $x_k = \alpha x_k^{(+)} + \beta x_k^{(-)}$  と書ける. ここで,  $\alpha, \beta$  は初期条件から決ま

る定数である。計算モードが現れないようにするためには、慎重に初期条件を選ばないといけないが、解くべき方程式が複雑な場合には、ここで展開しているような解析は困難なので、計算モードがゼロとなる初期条件を選ぶことはほとんど不可能である。また、数値計算では丸め誤差を伴うので計算モードの除去は困難である。そこで、計算モードの増幅率が負となる差分解法が望まれる。

減衰型の方程式に Adams-Bashforth 法を適用して数値計算した場合に、計算モードは減衰する。なお、物理モードは Euler 法と同様に von Neumann の条件を満足している。

#### 4.4 演習問題

振動の微分方程式,

$$\frac{dx}{dt} = i\omega x, \quad (39)$$

に関して、Euler 法と Adams-Bashforth 法による計算の安定性を評価しなさい。

#### 参考文献

- 大関 誠, 「スペクトルモデル入門」, 気象研究ノート 第 211 号, 日本気象学会, 2006 年.
- 川上 一郎, 「数値計算」, 第 6 章, 岩波書店, 1989 年.