

地球流体力学講義ノート

岩山隆寛

平成14年6月18日

第1章 はじめに

1.1 授業のテーマと目標

本講義で扱う地球流体力学とは大気・海洋の運動を理解するために必要となる基本的な力学的概念を考察する学問分野である。¹

物質の三態、即ち、固体、液体、気体のうち、液体と気体は力を加えると変形し、流れるという共通の性質を持っている。そこで、気体と液体を一括して流体 (fluid) と呼び、その運動を調べる学問分野として流体力学 (fluid dynamics) が Newton の時代より発展し続けている。地球上に存在する気体・液体である大気・海洋 (これらを一括して地球流体 (geophysical fluid) と呼ぶ) も共通の流体力学的特性を持っている、と考えるのは、ごく自然な推論であろう。また、大気と海洋は共に地球という回転系上で重力場中に存在し、重力の効果によって軽い流体が重い流体の上に積み重なった密度成層状態にある。このように考察の対象である大気・海洋が同様な環境に存在しているという点からも、それらの運動が統一的に記述・理解できるであろうことは容易に想像がつく。

地球流体力学は、通常、流体力学を学んだあとに、そのひとつの応用 (回転密度成層流体力学) として論じられる。すなわち、地球流体力学のテキストや講義では、流体力学は既知であるとして議論を進めていくのである。しかしながら、本講義では、密度成層や回転の効果を考慮しない流体力学の基礎から話を始める。まず、流体现象を記述するための方法を解説し、基礎方程式の導出を行う。さらに地球流体现象を記述する上で基本的概念となる渦と波の解説を行う。² 特に本講義では流体力学や地球流体力学の物理学的学問体系に力点を置く。そこで、本講義で述べた基本概念を用いて大気・海洋現象がどのように記述できるのか、については、「大気水圏科学」の受講や、以下に挙げる参考書を参照して欲しい。

¹最近では地球流体力学は大気や海洋のみならず、地球内部に存在するマンツルの運動など、一般に回転系上の流動現象を扱う学問と拡張され、位置づけられている。

²地球流体力学におけるその他の重要な基本概念である「不安定性」については、修士課程対象の「大気水圏科学特論 II」で、「乱流」については博士課程対象の「地球流体物理学」で講述する。

1.2 成績の評価方法

学期中，学期末に行う二度の試験と授業中に適宜出すレポートを，試験 60% レポート 40 % の比率で採点し，単位の認定を行う。

1.3 教科書・参考書

教科書は特に指定しない。幾つか推薦図書を挙げておく。将来，気象学の勉強や研究を志す者は流体力学のテキストを一冊ぐらいいは手元に持っておくことを勧める。

- 流体力学

1. 今井功，「流体力学 (前編)」(裳華房)

著者は航空力学の専門家で，文化勲章受賞者である。応用数学にも強く，特殊関数などの本も執筆している。残念ながら前編出版後 30 年経っても後編は出版されていない。この本では粘性のない流体（完全流体）の力学から説き起こし，渦のない流れ，渦運動の力学，そして粘性流体へと議論を進めている。渦運動の章は特に詳しく，世界的に見てもこの本ほど詳しく渦運動を詳しく扱っている本は他にない。波を扱った章は残念ながらない（後編に掲載される予定である）。なお，この書籍のコンパクト版的な書籍として，今井功，「流体力学」(岩波書店) が出版されている。（私はまずこの全書版で流体力学の勉強をした。）

2. 巽友正，「流体力学」(培風館，新物理学シリーズ 21)

著者は乱流理論の専門家で，準正規理論と呼ばれる乱流の解析的理論の基礎を提唱した。今井との大きな違いは，粘性流体の運動方程式から話をはじめ，比較的初めの章で波の運動を扱っている点である。また，今井では書かれていない「乱流への遷移」や「乱流の統計理論」についての章が設けられていることも特徴のひとつである。³

最近，この本に準じた内容で初学者向けの巽友正，「連続体の力学」(岩波書店，岩波基礎物理シリーズ) が出版されている。

3. G. K. Batchelor，「An Introduction to Fluid Mechanics」(Cambridge U. P.)

³ 実在の流体は少なからず粘性を持っているために，まず実在する流体としての粘性流体を記述する上での概念や基礎方程式の導出を行い，数学的に扱いやすい理想的な非粘性流体の運動は，粘性流体の近似として位置づけている。しかしながら，このような構成にするとテンソルがテキストのはじめの方に登場し，たいていの人はこのテンソルの理解に苦しみ，流体力学の勉強をあきらめるようである。

著者は乱流理論の専門家で、流体力学で最も権威ある雑誌 Journal of Fluid Mechanics の創刊者である。残年ながら 1999 年に亡くなった。日本語訳が電機大学出版会から発行されている（訳者：橋本英典，松信八十男）。

4. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, 「Fluid Mechanics」(Pergamon Press)
物理学を学ぶ者は必ず手にする Landau - Lifshitz 理論物理学教程の 1 冊。Landau は 1962 年のノーベル物理学賞受賞者。東京書籍から翻訳が出版されている。
5. S. H. Lamb, 「Hydrodynamics」(Cambridge U. P.)
1879 年に初版が発行された流体力学の教科書の古典中の古典。著者は Sir の称号を持つ。現在手に入る版は第 6 版。東京書籍から翻訳が出版されている。

- 地球流体力学（気象力学）

1. 小倉義光, 「総観気象学入門」(東京大学出版会)
昨年出版された教科書。総観気象学とは、総観規模現象（高気圧や低気圧などの天気図に描かれる程度の大きさを持った気象現象）を扱う気象学の一分科である。このテキストは文科系・理科系を問わず大学 1 ~ 2 年生程度の学生の気象学のテキストとして名高い小倉義光「一般気象学（第 2 版）」(東京大学出版会) を読み終えた人を対象に、流体力学と熱力学を基礎に気象現象を解説している。程度は理科系の大学 3 ~ 4 回生向け。
2. J. Pedlosky, 「Geophysical Fluid Dynamics」(Springer)
地球流体力学のテキストとしては最も有名。
3. R. Salmon 「Lecture on Geophysical Fluid Dynamics」(Oxford U. P.)
数年前に出版された地球流体力学のテキスト。Hamilton 形式の流体力学の章が特徴。Review 以外で Hamilton 形式の流体力学が書かれているのはこの本だけ。
4. 小倉義光, 「気象力学通論」(東京大学出版会)
5. 木村龍治, 「地球流体力学入門: 大気と海洋の流れのしくみ」(東京堂出版, 気象学のプロムナード 13)

- 気象学一般

1. 小倉義光, 「一般気象学（第 2 版）」(東京大学出版会)
大学の教養課程科目としての気象学のテキストとしては最も有名。

1.4 連絡先

授業に対する質問や要望がある人は授業中（講義を中断してもかまわない）にするか，居室（自然科学研究科棟3号館西502号室）にくること．

e-mail:iwayama@kobe-u.ac.jp

へ電子メールを送ってもかまわない．ともかく遠慮なくどうぞ．講義に使う資料は授業中に配布するが，私のホームページ

<http://www.ahs.scitec.kobe-u.ac.jp/~iwayama/>

からもダウンロードできるようにする（つもりである）．

1.5 その他

学生の授業評価を総合すると，私の講義は，“板書の量が極めて多く，また速いために，授業中はノートに板書を書き写すのが精一杯で，理解にいたるには程遠い”，そうである．講義中に板書する内容は本ノートのようにプリントとして配るので，積極的に活用してほしい．

第2章 種々雑多な補足

2.1 座標系

本講義ではほぼ全体を通じてデカルト座標系 (Cartesian coordinate) をもちいて現象を記述する。地球の流体现象の記述には、流体が球面上に束縛されているから本来ならば球面座標系を用いて記述するべきであるが、数学的取り扱いの簡単化のためにデカルト座標系を用いることにする。¹その他の座標系を用いる場合には、その都度それを説明することにする。

2.2 表記 (notation)

2.2.1 ベクトル

ベクトル量は、高校数学で習った上付きの矢印ではなく、太字であらわす。すなわち、 \vec{A} ではなく A である。

2.2.2 単位ベクトル

デカルト座標系における x, y, z 方向の単位ベクトルは、慣例にしたがってそれぞれ i, j, k で表す。また、時として e_1, e_2, e_3 という表記を用いる。ここで

$$e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k, \quad (2.1)$$

である。

地球流体力学では慣例として x, y, z 方向をそれぞれ、東、北、鉛直向きに取る。

¹運動が球面上の比較的狭い領域に限られている場合には、球面上に局所的にデカルト座標系を張ることができる。

2.2.3 位置ベクトル

位置ベクトルは、慣例にしたがって r もしくは x と表す。²
 デカルト座標系では、 r を成分表示すると

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \quad (2.2)$$

と表される。ここで、 x, y, z はそれぞれ、 r の x, y, z 成分である。高校数学で習ったように $r = (x, y, z)$ という表記よりも、(2.2) のような表記を用いる方を薦める。³

なお、(2.1) のような単位ベクトルの表記法を用いる場合には

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.3)$$

と表記する。

2.2.4 速度場

速度場は v で表す。デカルト座標系で成分表示すると、

$$\mathbf{v} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k} \quad (2.4)$$

である。 u, v, w はそれぞれ \mathbf{v} の x, y, z 方向の成分である。⁴

なお、(2.1) のような単位ベクトルの表記法を用いる場合には

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.5)$$

と表記する。

²これは記述する座標系には依存しないことに注意するべきである。

³デカルト座標系のような直線直交座標系では、どちらの表記を用いても大差ないが、曲線座標系を用いる場合には、顕著である。この例は後の章で示す。

⁴気象学の慣例に拠れば、西風 (westerly: $u > 0$)、東風 (easterly: $u < 0$)、北風 (northerly: $v < 0$)、南風 (southerly: $v > 0$) と風 (流体) の流れてくる方向を指し示すのに対し、海洋では、これらはそれぞれ東向き流れ (eastward: $u > 0$)、西向き流れ (westward: $u < 0$)、南向き流れ (southward: $v < 0$)、北向き流れ (northward: $v > 0$)、と流体の流れる向きを指し示す、という違いがある。

2.2.5 偏微分

偏微分記号, $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ は簡単化のために, $\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z$ と記す場合がある. $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ の場合には, $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ と書く. このような表記では微分演算子 ∇ は

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.6)$$

$$= \mathbf{i} \partial_x + \mathbf{j} \partial_y + \mathbf{k} \partial_z, \quad (2.7)$$

$$= \mathbf{e}_1 \partial_1 + \mathbf{e}_2 \partial_2 + \mathbf{e}_3 \partial_3 \quad (2.8)$$

となる.

2.3 和の規約 (summation rules, Einstein's notation)

一つの項の中に同じアルファベットの添字が 2 回用いられているとき, その添字について 1 から 3 までの和をとる. すなわち,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3, \\ &= \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i, \\ &= x_i \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (2.9)$$

最後の表式に注目! 和の規約とはつまり \sum を省略することである.

注意 1: 添字はどんな記号でも良い. とにかく 2 回繰り返して出てきたら和をとればよい. つまり $x_i \mathbf{e}_i = x_j \mathbf{e}_j = x_k \mathbf{e}_k$ である.

注意 2: 2 次元空間であれば, 和は 1 ~ 2 にわたってとる.

例:

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i. \quad (2.10)$$

$$\nabla \psi = \mathbf{e}_i \partial_i \psi. \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} df(x_1, x_2, x_3) &= dx_1 (\partial_1 f) + dx_2 (\partial_2 f) + dx_3 (\partial_3 f) \\ &= dx_i (\partial_i f). \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.4 Kronecker のデルタ

2つの添え字を持ち，以下のような性質を持つ量を Kronecker のデルタという：

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0, & (i, j \text{ が異なる値を持つとき}). \\ 1, & (i, j \text{ が同じ値を持つとき}). \end{cases} \quad (2.13)$$

Kronecker のデルタの別の定義は

$$\delta_{ij} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (2.14)$$

である。

例：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= (\mathbf{e}_i \partial_i) \cdot (A_j \mathbf{e}_j) \\ &= \delta_{ij} \partial_i A_j = \partial_j A_j. \end{aligned} \quad (2.15)$$

演習問題：

Kronecker のデルタの定義と和の規約を用いて，以下の量を計算しなさい。

1. δ_{ii}
2. $\delta_{ij} A_j$

2.5 Eddington のイプシロン

3つの添え字を持ち，以下のような性質を持つ量を Eddington のイプシロンという：

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1, & (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \text{ のとき}. \\ -1, & (i, j, k) = (3, 2, 1), (2, 1, 3), (1, 3, 2) \text{ のとき}. \\ 0, & \text{それ以外のとき}. \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}. \quad (2.17)$$

$\varepsilon_{ijk} = 1$ となる場合は $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ の偶置換， $\varepsilon_{ijk} = -1$ となる場合は $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ の奇置換のという。

例

行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

の行列式は, Eddington のイプシロンを用いると

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

とあらわせる. また二つのベクトル A と B とのベクトル積は

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i A_j B_k. \end{aligned} \quad (2.19)$$

となる. 同様にして回転演算は

$$\begin{aligned} \nabla \times A &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j A_k \end{aligned} \quad (2.20)$$

と表現できる.

演習問題

1. (2.18) を確かめなさい.
2. ベクトル解析に現れる公式は, δ_{ij} , ε_{ijk} や和の規約を使うと容易に証明できる. 次にあげる公式を, δ_{ij} , ε_{ijk} や和の規約を使って証明しなさい.
 - (a) ベクトル積に関する公式 $B \times A = -A \times B$,
 - (b) ベクトル三重積に関する公式

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B),$$

3. $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$ を確かめなさい.

2.6 Gaussの定理

閉曲面 S で囲まれた体積 V について、以下の2つの定理が成り立つ。⁵

I: 任意のベクトル \boldsymbol{v} に対して以下の式がなりたつ:

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{v} \, dV = \iint_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}, \quad (2.21)$$

ここで、 $d\boldsymbol{S}$ は法線 \boldsymbol{n} 、微小面積 dS を持つ面積要素である。

II: 任意のスカラー Q に対して以下の式がなりたつ:

$$\iint_S Q n_i \, dS = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial x_i} \, dV, \quad (2.22)$$

ここで、 n_i は法線 \boldsymbol{n} の i 方向の成分である。

Iが通常の(電磁気学で登場する) Gaussの定理である。

演習問題:

(2.22) を証明しなさい。

2.7 Stokesの定理

任意のベクトル \boldsymbol{v} に対し、以下の式が成り立つ:

$$\oint_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot d\boldsymbol{S}. \quad (2.23)$$

ここで S は C を縁とする任意の曲面である。つまり、 C は固定されているのに対して、 S はどんな形でもよい。また、 S は閉曲面でないことに注意せよ。 \boldsymbol{n} は S 上に立てられた外向き法線である。曲面 S 上に立てられた法線は、線積分において C 上を右回りに進むときに、右ネジの進む方向にとる。

演習問題

S を任意の閉曲面とすると、積分

$$\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \quad (2.24)$$

を証明しなさい。ここで \boldsymbol{v} は任意のベクトルである。

⁵部分積分を行うことにより、証明できる。

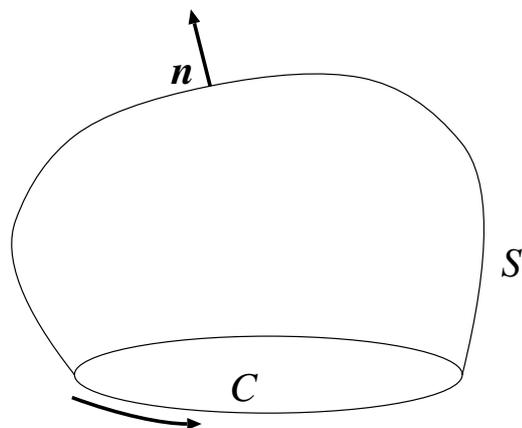


図 2.1: Stokes の定理を適用する閉曲線 C , C を縁とする曲面 S , および曲面上の法線ベクトルの関係.

ヒント 1 : Stokes の定理を使って計算をする. 通常 Stokes の定理は閉曲線 C に沿った線積分を面積積分に直すときに用いる. すなわち, (2.23) を左から右にたどる. しかし, ここではその逆をたどる.

ヒント 2 : Stokes の定理を使うためには, 問題の閉曲面を 2 つに割る. 例えば, 閉曲面として球 (地球) を想像し, それを大円 (赤道) で 2 つに割る. そうすると各々の半球 (北半球と南半球) は, Stokes の定理が要求している閉曲線 (赤道) を縁とする曲面になる. 北半球側で面積積分を実行するとき, 面積積分を Stokes の定理を用いて線積分に変換する. 赤道上で積分する際の積分経路の向きに注意する. (東向きか西向きか)

即ち, (2.24) 式の積分を 2 つに分割し, それぞれに付いて Stokes の定理を適用して積分値を見積もる. (任意の閉曲面として, このヒントのような球 (地球) を想像してもよい.)

ヒント 3 : (あるいは別解) : デカルト座標系を採用し, (2.24) の積分を具体的に書き表すと

$$\iint_S (\partial_x v - \partial_y u) dx dy \quad (2.25)$$

となる. 上記の積分を実行し, S が閉曲面, 即ち物理量は x, y に付いて周期的であるとして値を見積もる. (これは閉曲面をドーナツ様のものと考えている場合に相当する.)

第3章 序論

本節では、古典力学 (特に質点の力学) と流体力学との相違を強調しつつ、流体力学の理論体系の特徴について述べる。

3.1 連続体の概念

すべての物質は原子や分子などの粒子より構成されるが、このような微細構造に立ち入らず質量が連続的に分布した (密度が時間、空間の連続関数として与えられる) 仮想的な物体、連続体、として流体を取り扱うのが流体力学の立場である。このような近似は連続体近似と呼ばれる。古典力学では、物体を有限の質量を持つが大きさを持たない質点やその質点の集合体 (質点間の距離が変化しない理想的な物体が剛体である) と理想化し物理現象を記述した。連続体近似という理想化は、このような古典力学における質点や剛体といった理想化に対応するものである。

連続体近似は、流体内部のある点 P における物理量の値を、 P を含む微小体積 δv についてのその物理量の平均値をもって定義することにより実現される。すなわち、点 P の位置ベクトルを \boldsymbol{r} と表すと、点 P における密度は

$$\rho(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{Nm}{\delta v} \quad (3.1)$$

で表される。ここで、 m は流体を構成している原子、もしくは分子の質量、 N は δv 内に含まれる原子・分子の個数である。

一般に N は δv の大きさや t に依存して値が揺らぐ。平均値が存在し、それが時間、空間の連続関数として与えられるためには以下の2つの条件が必要である。

- 考える現象の空間スケール $L \gg (\delta v)^{1/3} \gg$ 流体を構成している原子・分子の平均自由行程¹ λ .
もしくは λ と L の比

$$K = \frac{\lambda}{L} \quad (3.2)$$

を定義し、 $K \ll 1$ のときである。 K は特にKnudsen数と呼ばれる。

¹原子・分子が他の原子・分子と衝突せずに運動できる平均的距離。

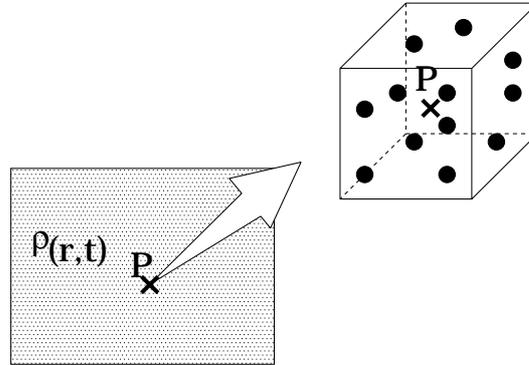


図 3.1: 連続体では密度 ρ は時間空間の連続関数である. 点 P における密度は, P を中心とする微小な体積要素に含まれる原子・分子の質量の平均値で定義する.

- 考える現象の時間スケール $T \gg$ 流体を構成している原子・分子の平均緩和時間² τ .

例: 以下に良く知られた気象現象のもつ特徴的な空間・時間スケールを示す.

標準気圧, 0°C の空気	$\lambda \sim 10^{-7}$ m	$\tau \sim 10^{-10}$ s
海陸風	$L = 1 \sim 10$ km	$T \sim 12$ h
高低気圧 (総観規模現象)	$L \sim 10^3$ km	$T \sim 10$ day

このように気象現象の取り扱いには, 連続体近似が適用できることがわかる.

流体力学ではしばしば流体粒子(fluid parcel/fluid particle)という言葉が登場する. これは流体を構成している原子・分子などの粒子を言い表しているのではなく, δv 程度の大きさをもった流体の微小な塊のことである. すなわち, 流体粒子の中には無数の原子・分子が含まれているが, 考察の対象とする現象に比べて極めて小さく, 点とみなすことができるような流体の一部分のことを指している. 流体力学では, このような流体粒子に働く力を調べ, その運動を記述する運動方程式を立て, その解を調べることにより流体の運動を考察する.

3.2 応力

古典力学では, Newton の第二法則より, 考察する物体に働く力の総和はその物体の運動量の時間変化率に等しい, として運動方程式を立てる. さらに, その方程式

²個々の原子・分子が持っている運動エネルギーに差異ができた時に, それを衝突によって一様化するのに必要な平均的時間.

を解くことにより物体の運動状態を理解することができる。流体力学でも同様に流体粒子に働く力の総和が、流体粒子の運動量の時間変化率に等しいとして運動方程式を立て、それを解き、流体の運動を考察する。そこで、ここでは流体に働く力について考えてみる。

連続体に働く力には次の二種類がある。

- 体積力(body force)：その大きさが物質の質量や体積に比例する力。これは重力、遠心力、Coliois 力などがその例であり、質点の力学でもおなじみのものである。
- 面積力(surface force)：面を通して作用し、その大きさは、面の大きさに比例する。この力は、物質を構成する原子の相互作用に由来するもので、力の及ぶ範囲は要素の表面の極く薄い層に限られる。これは連続体特有の力である。

単位面積あたりに働く面積力を応力(stress)と呼ぶ。これは MKS 単位系では Nm^{-2} の次元を持つ。“力”という言葉がついているが、その次元は力の次元 N ではないことに注意するべきである。

連続体中の点 P における応力は、点 P を通る平面 S を選び、S 上の P を含む単位面積を通して両側の連続体が及ぼしあう力(法線 n の正の側から負の側へ及ぼす力)で定義し、 T_n と表す。したがって T_n は S の選び方、すなわち法線 n に依存する。また、力はベクトル量であるから大きさや方向を持つ。したがって T_n は 2 つの方向と 1 つの大きさによって定まる。これは、数学的には 2 階のテンソル(tensor)と呼ばれ、9 個の成分、 τ_{ij} , ($i, j = 1, 2, 3$), を持つ量である。したがって、 τ_{ij} は応力テンソルと呼ばれる。 x_j 軸に垂直な平面を通して、 x_j 軸の大きい側から小さい側へ作用する x_i 方向の力を τ_{ij} と定義する。

作用・反作用の法則を考えると、

$$T_{-n} = -T_n \quad (3.3)$$

の関係がある。

応力を面の接線方向の成分と法線方向の成分に分解し、それぞれを接線応力(tangential stress)、またはせん断応力(shear stress)、法線応力(normal stress)と呼ぶ。法線応力は、面の両側が押しあう場合は圧力(pressure)、引っ張りあう場合は張力(tension)となる。

3.3 流体の定義

先に、気体と液体を一括して流体と呼ぶと述べたが、先に定義した応力の概念を用いると、流体は以下のように明確に定義できる：“静止状態では接線応力が現れ

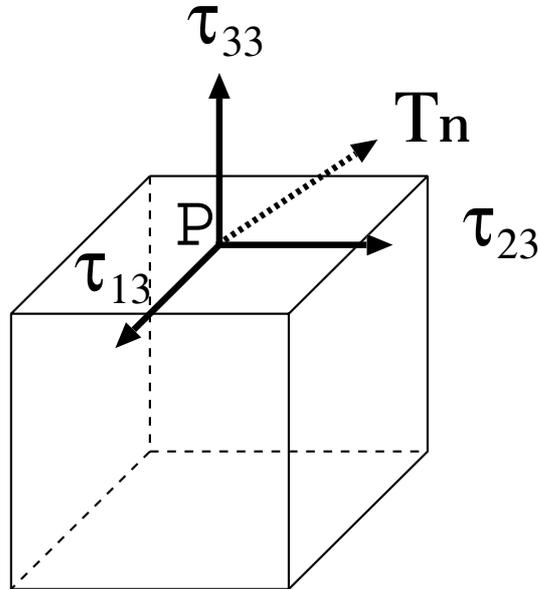


図 3.2: 点 P を通る z 軸に垂直な平面を考える. このとき, P に働く応力 T_n は平面に水平な成分 τ_{13}, τ_{23} と垂直な成分 τ_{33} に分解できる.

ず, かつ法線応力が圧力である連続体を流体と定義する.” ここで, 「静止状態では」という断りが重要である. なぜなら, もし接線応力が現れたら, 僅かの力で変形するという性質のために, 流体は静止状態にあり得ない. また, 法線応力が張力の場合には, その面から流体は裂けてしまうからである.

法線応力に関して次の性質が証明できる. “静止状態, 運動状態を問わず接線応力が常に 0 ならば, 法線応力は考える面の選び方によらない.” これは, 接線応力が常に 0 ならば, 応力が圧力のみで等方テンソルであることを述べている.

—————[証明]—————

[問題設定:] 点 P を頂点とし, 底辺が微小な三角形 PAB, 高さが単位長の三角柱を考える. PA, PB, AB に働く法線応力(圧力)をそれぞれ p_1, p_2, p_3 , とする. また, $PA = l_1, PB = l_2, \angle A = \alpha_1, \angle B = \alpha_2$ とする.

- 静止状態で体積力が働いていない場合: 微小物体に働く圧力の AB 方向の成分は,

$$p_1 l_1 \sin \alpha_1 - p_2 l_2 \sin \alpha_2 = 0.$$

正弦定理

$$\frac{\sin \alpha_1}{l_2} = \frac{\sin \alpha_2}{l_1}$$

より,

$$p_1 = p_2.$$

したがって圧力は P を通る平面の選び方に依存しない.

- 静止状態で体積力が働いている場合: 体積力は上記のような微小物体を考えたときに $O(l^2)$ の大きさで, 面積力に比べて高次の微量になる. したがって, l が非常に小さい場合には, 体積力の効果は面積力の効果に比べて無視できる. したがって, 先の議論が適用できる.
- 運動状態の場合: 質量と加速度の積を D'Alembert の原理によって慣性力として静力学 (静止状態) の問題に帰着させる. さらに慣性力は体積力であるから, 先の議論がそのまま適用できる.

—————[証明終了]—————

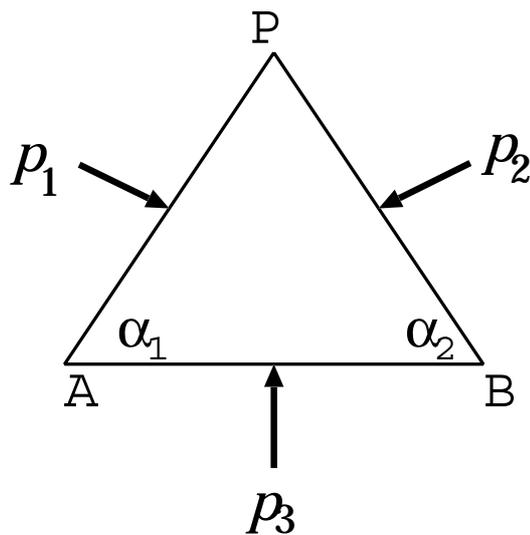


図 3.3: 点 P を頂点とする単位高さの微小な三角柱に働く面積力.

3.4 流体の種類

流体のもつ物性的性質によって, 流体をいくつかのカテゴリに分類することができる.

3.4.1 完全流体と粘性流体

流体の隣り合った部分が異なる速度を持つとき、この速度差をなくすように接線応力が現れる性質が粘性(viscosity)である。³

- 完全流体(inviscid/perfect/ideal fluid)：粘性のない流体、すなわち運動中でも接線応力が現れない流体。先の定理から、この流体に働く応力は圧力のみである。すなわち、

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}. \quad (3.4)$$

これは高度の理想化であるが、自然現象をよく記述できる。

- 粘性流体(viscous fluid)：非完全流体のこと。実在の流体は少なからず粘性を持っており、したがって実在の流体はすべて粘性流体である。粘性流体で特に重要なものとしてNewton流体(Newtonian fluid)と呼ばれるものがある。これは速度勾配に比例する接線応力を生じるような流体のことである。Newton流体では応力テンソルは

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (3.5)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.6)$$

で与えられる。 μ は粘性率 (coefficient of viscosity) と呼ばれる。Newton流体は実在の流体の非常によい近似になっている。(3.5) で粘性係数 μ を 0 とすれば、それは(3.4) に帰着することがわかる。

補足： (3.5) の導出は、この講義では割愛する。導出の仕方は、たとえば先に紹介した巽の教科書を参照のこと。(3.5) の導出には、応力は速度勾配に比例するであろうという物理的考察と、テンソルに関するいくつかの知識を必要とする。⁴ 流体力学の教科書を自習するとき、初学者はまずここで壁にあたり、悪いケースでは流体力学の勉強をあきらめてしまう。テンソルをしらなくても流体力学のかなりの部分(完全流体の力学)を語ることは可能であり、また地球流体现象では多くの場合、境界層⁵以外では、粘性の効果は重要ではなく、完全流体の

³一般に物理量にムラ、非均質性、があると、物質を構成している原子・分子の微視的な乱雑運動によって、そのような不均一性をなくすように物理量の拡散が起こる。運動量の拡散が粘性である。

⁴といっても、任意のテンソルは対称テンソルと反対称テンソルの和で書くことができる、といった程度のことであり、また2階のテンソルはであればこれは行列の形に書き表すことができるので、線形代数学を知っていれば造作ないことである。

⁵これは固体壁のごく近傍に形成される。たとえばの地球大気では粘性が効く層は地表から数百メートルから1キロメートル程度の高さの大気層で、そこは全大気のせいぜい1割程度の質量の大気しか存在していない。

力学によって説明される現象がほとんどである。そこで本講義ではテンソルの話はとりあえず後回しにして、テンソルを用いなくても語れる流体力学をまず講ずることになっている。

3.4.2 圧縮性

気体と液体の違いは、前者が容易に圧縮できるのに対して、後者は圧縮しにくいという点であろう。そこで縮む縮まないの区別は、気体・液体の区別のように思われがちである。しかしながら、流体力学では気体でも非圧縮性流体として取り扱うこともあるし、逆に液体でも圧縮性を考慮する場合がある。

流体の圧縮性によって生じる特徴的現象は音波である。⁶ したがって流体の縮む、縮まないの区別は、音波を基準に区別され、必ずしも気体・液体の区別を指すものではない。音速を用いて流体を種別すると、

- 圧縮性流体(compressible fluid)：音速が有限の速さで伝わる流体。
- 非圧縮性流体(incompressible fluid)：音速が無限の速さで伝わる流体。

と言えよう。⁷ 大気海洋の大規模な運動では、現象の起こる速さが音速に比べて極めて遅いことから音波の影響は無視され、地球流体力学では流体を非圧縮性流体と見做す。⁸

演習問題：

1. 理想気体の状態方程式 $p = \rho RT$ 、及び熱力学の第1法則 $T dS = c_v dT + p d(\frac{1}{\rho})$ を用いて、断熱変化における圧力 p と密度 ρ の間になりたつ関係式 $p = C\rho^\gamma$ (Poisson の関係式) を導きなさい。ここで、 T 、 S 、 c_v 、 R 、 C はそれぞれ温度、エントロピー、定積比熱、気体定数、任意定数で、 γ は定積比熱 c_v と定圧比熱 $c_p = c_v + R$ との比、 $\gamma = c_p/c_v$ である。

2. 前問の結果を用いて、気温 300 K の空気中を伝播する音波の速度 $c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}$ を求める。

(a) $\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}$ が速度の次元を持つことを確かめなさい。

⁶音速 c は等 entropy 状態において、圧力に対する密度の変化率によって定義される。すなわち $c \equiv \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_S}$ 。

⁷注目する現象の速度が音速に近いか、より遅いかで区別することもある。

⁸鉛直方向の温度変化に対してのみ密度変化を起こすような流体 (Bussinesq 流体) を考察する場合もある。しかしこの場合にも、音速は無限大として取り扱われている。このような流体については後で述べることにする。

- (b) $c_v = \frac{5}{2}R$, $c_p = \frac{7}{2}R$, $R = 287 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ のとき, c の値を求めなさい. (余力のある人は理科年表などを調べて, 今求めた数値を年表に記載されている数値を比較しなさい.)

3.5 流れの記述

3.5.1 流れを表す物理量

流体の運動状態を指定するための物理量には

- 運動学的な量 (動的な量): 流速 v ,
- 熱力学的な量 (静的な量): 応力 (圧力) p , 温度 T , 密度 ρ , 内部エネルギー E , エントロピー S , ...

が考えられる.⁹ このうち熱力学によると, 第二のカテゴリーに属する物理量は, 任意の2つが独立であることが知られている. したがって, 流れの記述に必要な物理量の個数は, 流速の3成分と熱力学的量2個のあわせて5個である.¹⁰

流体の運動状態を記述するために必要な変数の個数は5個, すなわち未知変数が5個であるから, これらを決定するためには5つの方程式をたてて, それを解く必要がある. 5つの方程式とは何であろうか? 流体の運動も物理現象であり, 物理法則にしたがっているので, 物理学における基本的な保存則は満足されている. その保存則は, 運動量保存則, エネルギー保存則, 質量保存則である. 運動量はベクトル量であるから3成分ある. またエネルギー, 質量はスカラー量であるからそれぞれ1個である. すなわちこれら5つの量に対する保存則が成り立つ. この5個の保存則を具体的に数式で表したものが, 流体力学の基礎方程式であり, それを解くことによって流体の運動を決定することができる.

3.5.2 流れを表す方法

流体の運動状態を記述する方法には通常二通りの方法が用いられる.

⁹気象通報では, ある地点のある時刻における風向, 風速, 気温, 気圧, 天気を放送している. このうち, 風向, 風速, が速度ベクトル v であり, 気温, 気圧がそれぞれ T , p である. 天気は物理量ではないことに注意.

¹⁰ d 次元空間中であれば, $d+2$ 個の変数が必要である. ここでは, 取りあえず最も日常的な3次元空間の場合で話をすすめている.

Lagrange の方法 (Lagrange 的記述)

この方法では、流体を無数の流体粒子の集団と見なし、各粒子の運動を追跡することにより流体の運動を記述する。すなわち、ある時刻 $t = t_0$ に (a, b, c) に存在していた流体粒子が時刻 t に (x, y, z) に来たとする。このとき x, y, z は a, b, c, t の関数として、

$$\begin{aligned} x &= f_1(a, b, c, t), \\ y &= f_2(a, b, c, t), \\ z &= f_3(a, b, c, t), \end{aligned} \quad (3.7)$$

のように表される。これら f_1, f_2, f_3 の関数形がわかれば、流体の運動が完全に知れたことになる。 t_0 は任意であるが通常 $t_0 = 0$ が選ばれる。(3.7) は (a, b, c) という名前(もしくはラベル)の流体粒子の運動を表しており、 (a, b, c) は物質座標(material coordinates)と呼ばれる。ある時刻における空間の一点 (a, b, c) に存在する流体粒子は唯一であるために、これを持ってして流体粒子を識別することができる、すなわち、 (a, b, c) を流体粒子の名前として用いることができるのである。

この記述方法は質点系の力学と非常によく対応関係がある。¹¹ たとえば N 個の質点系の運動を考えたときに、質点系の力学では i 番目 ($i = 1, 2, \dots, N$) の質点の任意の時刻 t における位置 (x_i, y_i, z_i) を問題にする。ここで i は粒子の名前(粒子の識別子)である。

質点系と流体系の大きな違いは次の2点である。

- 質点の名前 i は離散的量であるが、流体粒子の名前 (a, b, c) は連続的量である。
- 質点系の場合には各質点はバラバラに運動をする。一方流体の運動では、流体は連続体であるから隣り合う流体粒子(近い名前の流体粒子)は互いに似た運動をする。

~ Lagrange 微分 ~

各流体粒子に付随した物理量の時間的変化、時間微分、をLagrange 微分(または物質微分, material differentiation)と呼び

$$\frac{D}{Dt}$$

で表す。Lagrange の方法では、物理量 F のLagrange 微分は

$$\frac{DF}{Dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{a,b,c} \quad (3.8)$$

¹¹Lagrange 的記述がもっとも naive に(質点系の Hamilton 力学の延長として)流体力学を Hamilton 形式で記述できる。

	流体力学 (Lagrange 的記述)	古典力学 (質点系)
粒子の識別子	物質座標 (a, b, c) : 連続的量	i : 離散的量
時間微分	$\frac{D}{Dt}$	$\frac{d}{dt}$

表 3.1: 流体力学における Lagrange 的記述と質点系の力学との対応関係.

と表せる. これは古典力学でいうところの $\frac{d}{dt}$ に対応するものである.

Euler の方法 (Euler 的記述)

この方法では任意の時刻 t において, 空間の各点 (x, y, z) で物理量 v, T, ρ, p, \dots を指定することによって流体の運動を記述する. すなわち, 場の立場である. 物理学において, 場の立場で現象を記述する代表的分野として, 電磁気学があげられる. 電磁気学と流体力学ではしばしば同じ方程式が登場する. 歴史的には電磁気学よりも先に流体力学が学問的に体系化されており, 流体力学の体系を参考にして電磁気学が体系化されたのである.

Euler 的記述と Lagrange 的記述の大きく異なる点は, 変数 x, y, z が Lagrange 的記述では従属変数なのに対し, Euler 的記述では独立変数であることである.

~ Lagrange 微分の Euler 的表現 ~

流体粒子に付随したある物理量 F の Euler 的表記は $F(x, y, z, t)$ である. この量の Lagrange 微分を Euler の方法で記述することを考える. ある時刻 t で $\mathbf{r} = (x, y, z)$ にあった流体粒子が, 時刻 $t + \Delta t$ において $\mathbf{r} + \mathbf{v}\Delta t = (x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t)$ に移動したとする. このとき流体粒子に付随した F の変化 ΔF は,

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, t + \Delta t) - F(x, y, z, t) \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \right) \Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2), \\ \frac{DF}{Dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.9)$$

と計算される. ここで $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$ は Δt の二次以上の項を表す. F は任意で

あるから, Lagrange 微分の Euler 的表現として

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\end{aligned}\quad (3.10)$$

を得る.

注意: (3.10) の第 2 の表現に特に注意すること. $\mathbf{v} \cdot \nabla$ は決して $\nabla \cdot \mathbf{v}$ とは等しくない! ∇ は演算子であるから演算の順序を入れ換えては意味が違ってくる. 例年, 両者の区別ができない人が非常に多い. $\mathbf{v} \cdot \nabla$ は演算子で, 何か関数に食いついて初めて数値をとりえる (つまり $\mathbf{v} \cdot \nabla$ は飢えている) のに対し, $\nabla \cdot \mathbf{v}$ はそれ自身で明確な数値を持ちえる.

以下に 2 つの記述を表にしてまとめておく.

	Langrange の方法	Euler の方法
立場	粒子的	場
独立変数	a, b, c, t	x, y, z, t
従属変数	$x, y, z; p, \rho, T, \dots$	$u, v, w; p, \rho, T, \dots$
Lagrange 微分, $\frac{D}{Dt}$	$\frac{\partial}{\partial t}$	$\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$

演習問題:

- ある三変数関数 $f(a, b, c)$ があつたとき, 偏微分は $\partial f / \partial a$ とは, 独立変数 b, c を一定とおき, 独立変数 a で f を偏微分するという意味である. 一定とおく独立変数を添え字として明示的に $(\partial f / \partial a)_{b,c}$ と示すほうが, より親切な表記であるが, 独立変数の組がよくわかっている場合には, しばしば一定とおく変数を省略してしまう. Lagrange 的記述における $\partial / \partial t$ と Euler 的記述における $\partial / \partial t$ ではそれぞれ何を一定として偏微分を行っているかを述べなさい.
- Lagrange 微分の Euler 的表現(3.10) で登場した $\mathbf{v} \cdot \nabla$ を和の規約を使って表しなさい.

3.6 気圧傾度力

3.2 節で流体に働く力は体積力と面積力に分類でき, 単位面積あたりに働く力は応力と呼ばれると説明した. 流体粒子に関する運動方程式を建てる時には, 流体

に働く力として体積力はそのままの形で方程式中の項に現れるが、面積力（応力）に関しては、そのままの形では現れてこない。このことは例えば体積力である重力が鉛直方向の単位体積あたりの流体粒子の運動方程式に ρg という形で現れ、これが N/m^3 という単位体積あたりの物体に働く力の次元を持つのに対し、応力はそのままでは N/m^2 という ρg とは異なる次元を持つことから察することができるであろう。

本節では、静止した流体を考え、これを構成する流体粒子に働く力がバランスしている、という考えから、流体粒子に働く正味の圧力について考えてみることにする。

重力場中で密度 ρ を持つ流体の静止状態を考える。図 3.4 で表される状況で、注目する流体要素（低面積 dS 、厚さ dz ）に働く力を考える。流体要素に働く力は、重力（体積力）と圧力（面積力）のみである。¹² 流体要素上面には鉛直下向きに圧力に伴う面積力 $p(x, y, z + dz)dS$ が、流体要素下面には鉛直上向きに圧力に伴う面積力 $p(x, y, z)dS$ が働いている。これと重力 $\rho g dS dz$ がつりあって流体は静止状態を保っている。したがって、鉛直上向きを正の方向にとると力の釣合は、

$$-p(x, y, z + dz)dS - \rho g dz dS + p(x, y, z)dS = 0 \quad (3.11)$$

である。 dz が微小のとき、 $p(x, y, z + dz)$ は

$$p(x, y, z + dz) = p(x, y, z) + \frac{\partial p}{\partial z} dz + \mathcal{O}(dz^2) \quad (3.12)$$

と Taylor 展開できる。ここで、 $\mathcal{O}(dz^2)$ は dz の 2 次以上の微小量という意味である。この展開を (3.11) の第 1 項に適用し整理すると、

$$\left\{ -\frac{\partial p}{\partial z} + \mathcal{O}(dz^2) - \rho g \right\} dz dS = 0. \quad (3.13)$$

上式を単位体積あたりに働く力で表現するため $dz dS$ で割り、更に $dz dS \rightarrow 0$ の極限をとって流体粒子に働く力を求める。このとき、 $\mathcal{O}(dz^2)$ の項は消え、

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0 \quad (3.14)$$

が得られる。(3.14) 式は静力学平衡(hydrostatic balance)の式と呼ばれ、地球流体力学における最も基本的なバランスの式の一つである。¹³ 第二項は重力であるから鉛直下向きである。したがって正味の圧力は鉛直上向きに働きバランスを保っている

¹²3.3 節参照: 流体とは静止状態では応力は圧力のみである。

¹³このバランスは鉛直方向に関するものである。水平方向のバランスとして基本的なものは、Coriolis 力と水平方向の気圧傾度力がバランスした地衡流平衡 (geostrophic balance) である。

ることがわかる。(3.14)の第一項を見ると、流体粒子に働く正味の圧力は p の空間微分によって与えられることがわかる。まったく同様な考え方で、流体粒子に働く x, y 方向の圧力に伴う力は単位体積あたりそれぞれ $-\frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{\partial p}{\partial y}$ となる。ベクトル形式で書くと、圧力に伴う流体粒子に働く力は $-\nabla p$ となる。この力は圧力(気象では気圧)の勾配に比例するので、圧力勾配力、または気圧傾度力(pressure gradient force)と呼ばれる。

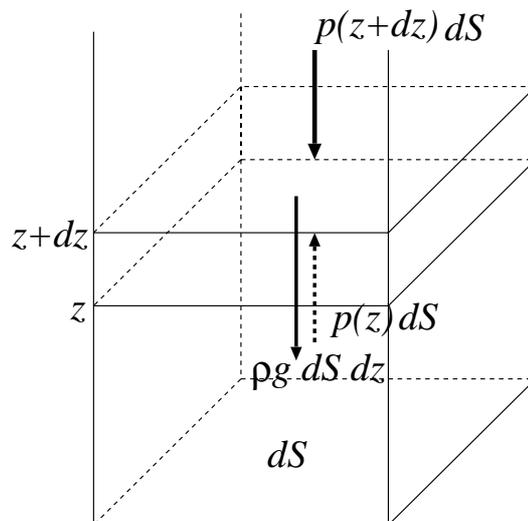


図 3.4: 重力場中における底面積 dS 、高度 z と $z + dz$ の間にある密度 ρ の流体に働く力。

アルキメデスの原理

全節と同じ状況で、底面積 dS 、厚さ dz の流体要素の部分のみ密度 ρ' を持つ別の物体(流体でも、固体でもかまわない)で置き換えたとする。このとき、物体に働く力は(3.11)を参考にすると、

$$-p(x, y, z + dz)dS - \rho'g dz dS + p(x, y, z)dS \quad (3.15)$$

となる。第1項と第3項は前節の議論から $\rho g dS dz$ に等しい。そこで、(3.15)は

$$(\rho - \rho')gdS dz \quad (3.16)$$

である。もし、 $\rho > \rho'$ のとき、すなわち、流体の密度よりも沈めた物体の密度の方が小さい場合は、(3.16) > 0 となり、物体は上向きの力を受ける。その力は、物体の

質量と物体の押し退けた流体の質量の差に比例する。これは例えば水を張った風呂桶に洗面器を逆さに静かに押し沈めたときに腕が受ける力である。

さて理化学辞典 [岩波書店] を紐解くと、

浮力: (buoyancy force) “地球上 (一様な重力場中) では、流体内にある物体にはその表面に作用する流体の圧力のため、全体として上向きの力を受ける。これを浮力という。浮力の大きさと作用点とは、物体の押し退けた流体の重さと重心とに一致する (アルキメデスの原理)”

とある。上記の文章でいう浮力は、(3.15) における

$$-p(x, y, z + dz)dS + p(x, y, z)dS \quad (3.17)$$

である。(3.17) に静力学平衡の関係を適用した時、

$$-p(x, y, z + dz)dS + p(x, y, z)dS = \rho g dS dz \quad (3.18)$$

となり、浮力 (左辺) は物体が押し退けた流体の重さ (右辺) に等しいことがわかる。つまりアルキメデスの原理とは静力学平衡の式の言い換えである。

第4章 流体力学の基礎方程式(1):連続の方程式

3.5.1 節では, 流体の運動を記述するために必要な変数は流速 v と独立な熱力学的変数 2 個であり, これらの未知変数を決定するために必要な法則は, 質量保存則, 運動量保存則, エネルギー保存則であることを述べた. 本章と引き続く幾つかの章では, これらの保存則を具体的に書き下すことにより, 流体力学の基礎方程式を提示する.

流体は不生不滅であることを具体的に書き表した数式が連続の方程式(equation of continuity)である. 先ず Euler 的立場から Euler の連続の方程式を導く. 引き続く節では, Lagrange 的立場からの Lagrange の連続の方程式の導出を紹介し, それと Euler の連続の式との関係について述べる.

4.1 Euler の連続の方程式

空間に固定された任意の閉曲面 S を考える.¹ S に囲まれた領域を V とする. 任意の時刻で V に含まれる質量は,

$$\iiint_V \rho \, dV$$

である. そこで単位時間あたりの V の質量変化は,

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV$$

と表せる. いっぽう上記の質量変化は単位時間に V の表面 S を通って V 内に流れ込んだ流体の質量に等しい筈である. 単位時間に微小面積 dS を通過する流体の質量は, 底面 dS 高さ v_n の円柱に含まれる流体の質量に等しい. ここで, v_n は流速 v の微小面積に垂直な成分で $v_n = v \cdot n$ である (図 4.1 参照). そこで, 単位時

¹Euler 的観点なので, 考察の対象とする曲面は空間に固定されていて, 形は変えない.

間に S を通って V 内に流れ込んだ流体の質量は

$$-\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = -\iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \, dV$$

である。ここで S の表面に立てられた法線ベクトル \mathbf{n} は外向きであるため、流れ込む流体に対しては負符号が付くことに注意せよ。また上式の変形に Gauss の発散定理 (2.6 節参照) を用いた。上の考察から質量保存則は

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV = -\iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \, dV.$$

または,

$$\iiint_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right\} dV = 0,$$

と表せる。領域 V は任意なので、上式が恒等的に成り立つためには被積分関数は 0 でなければならない。したがって、質量保存則は微分形で

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.1)$$

となる。これが連続の方程式である。Lagrange 微分 $\frac{D}{Dt}$ を用いると、連続の方程式は

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.2)$$

と書ける。

演習問題:

1. 和の規約 (2.3 節参照) を用いて、連続の式 (4.1) を表現しなさい。
2. Lagrange 微分 $\frac{D}{Dt}$ を用いると、連続の方程式 (4.1) は (4.2) と書けることを確かめなさい。

● 非圧縮性流体の場合: このとき運動中に密度が一様に保たれる, $\frac{D\rho}{Dt} = 0$, ので連続の方程式は,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.3)$$

となる。

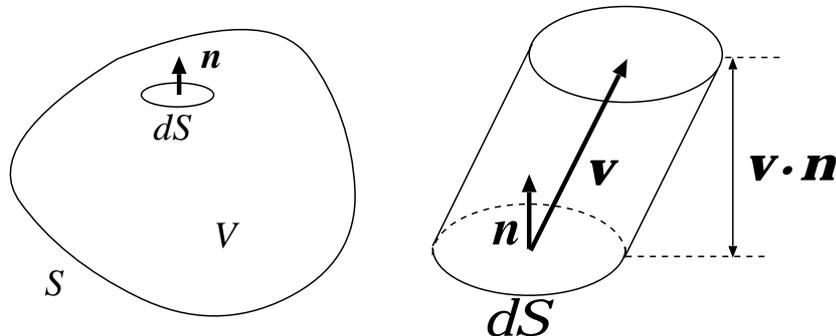


図 4.1: 質量保存則を適用する任意の体積 V と単位時間あたり微小面積領域 dS を通過する流体の体積.

4.2 Lagrange の連続の方程式

時刻 $t = t_0$ において閉曲面 S_0 によって囲まれた領域 V_0 を構成していた流体粒子が時間とともに流され、変形され、時刻 t において閉曲面 S で囲まれた領域 V になったとする。しかしながら Lagrange 的観点では流体粒子の履歴を追跡するので、考察する領域を構成する流体粒子は時間が経過しても変わらない。考察する領域の質量は不変であることから：

$$\iiint_{V_0} \rho_0 dx_0 dy_0 dz_0 = \iiint_V \rho dx dy dz.$$

流体粒子の物質座標 (a, b, c) として $t = t_0$ の値 (x_0, y_0, z_0) をとり、上式を abc -空間内の積分に変換する：

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \iiint_{V_0} \rho_0 dx_0 dy_0 dz_0 = \iiint_{V_0} \rho_0 da db dc, \\ \text{左辺} &= \iiint_V \rho dx dy dz = \iiint_{V_0} \rho \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} da db dc. \end{aligned}$$

ここで、 $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)}$ は、 xyz 空間から abc 空間へ変換するときに見える Jacobian である。したがって

$$\rho \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \rho_0 \quad (4.4)$$

が Lagrange の連続の方程式である。ここで、 ρ_0 は a, b, c のみの関数である。²

²このことについては、4.3 節も参照せよ。

- 非圧縮性流体の場合: このとき $\rho = \rho_0$ であるから, 連続の方程式は

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = 1 \quad (4.5)$$

と書ける.

4.3 Eulerの連続の方程式とLagrangeの連続の方程式 との関係

Euler的な立場とLagrange的な立場からそれぞれ連続の方程式を導出したが, 両者はどのような関係にあるのかをここで述べておく.

Lagrangeの連続の方程式(4.4)に現れたJacobianを,

$$J \equiv \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} \quad (4.6)$$

と定義する. したがって, (4.4)は $\rho J = \rho_0$ と書ける. (4.4)をLagrange微分すると,

$$\frac{D\rho}{Dt} J + \rho \frac{DJ}{Dt} = 0. \quad (4.7)$$

第2項はchain ruleを用いて

$$\begin{aligned} \frac{DJ}{Dt} &= \frac{\partial\left(\frac{Dx}{Dt}, y, z\right)}{\partial(a, b, c)} + \frac{\partial\left(x, \frac{Dy}{Dt}, z\right)}{\partial(a, b, c)} + \frac{\partial\left(x, y, \frac{Dz}{Dt}\right)}{\partial(a, b, c)} \\ &= \left\{ \frac{\partial\left(\frac{Dx}{Dt}, y, z\right)}{\partial(x, y, z)} + \frac{\partial\left(x, \frac{Dy}{Dt}, z\right)}{\partial(x, y, z)} + \frac{\partial\left(x, y, \frac{Dz}{Dt}\right)}{\partial(x, y, z)} \right\} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) J \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{v}) J \end{aligned} \quad (4.8)$$

と計算される.³ (4.8)を(4.7)に代入して整理すると, Eulerの連続の方程式

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

が導かれる. つまりLagrangeの連続の方程式をLagrange微分したものがEulerの連続の方程式である.

³ D/Dt はLagrangeの方法では, a, b, c を一定とおいた t の偏微分 $(\partial_t)_{a,b,c}$ であるので, 分母の x, y, z にしか作用しない.

逆に Euler の連続の方程式を Lagrange の連続の方程式に書き直す時には, (4.2) の左辺第一項は既に Lagrange 微分を書けていることから, あとは第二項の発散を Lagrange 的立場での独立変数 (物質座標) で表現 (変数変換) してやればよい. (4.8) によると, $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = J^{-1} DJ/Dt$ であるから, (4.2) は

$$\frac{D\rho}{Dt} + \frac{\rho}{J} \frac{DJ}{Dt} = 0.$$

整理すると

$$\frac{D}{Dt} (\rho J) = 0 \tag{4.9}$$

となる. つまり ρJ は時間に依存しない定数 ρ_0 になる. ただし Lagrange 的立場では $D/Dt = (\partial_t)_{a,b,c}$ なので, ρ_0 は a, b, c には依存することに注意.

第5章 流体力学の基礎方程式(2): 運動方程式

“運動量の時間変化は、物体に作用している力の総和に等しい”, という Newton の第二法則を流体に対して適用し, 具体的に書き表した数式がここで述べる運動方程式である. 前章と同様に先ず Euler 的立場から Euler の運動方程式を導出する. 引き続き節では Euler の連続の方程式を Lagrange の連続の方程式に書き直した時と同様の手法を用いて, すなわち Euler の運動方程式の独立変数 (x, y, z) を Lagrange 的立場での独立変数 (a, b, c) に変換して, Lagrange の運動方程式を導く方法を紹介する.

5.1 Euler の運動方程式

ここでは表記に和の規約 (2.3 節参照) を用いる. 空間に固定された閉曲面 S を考える. S に囲まれた領域を V とする. V に含まれる流体が持つ i 方向の運動量は $\int_V \rho v_i dV$ である. したがって, 単位時間あたり V に含まれる流体の運動量の時間変化は

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho v_i dV$$

である.

考える流体に作用する力は体積力と面積力である. i 方向に働く面積力は応力テンソル τ_{ij} を用いて,

$$\iint_S \tau_{ij} n_j dS$$

と表せる. また単位質量あたりに働く i 方向の体積力を \mathcal{K}_i とすると V に働く i 方向の体積力は

$$\iiint_V \rho \mathcal{K}_i dV$$

と表せる.

上記の効果以外に流体が運動量を携帯して S を通じて V 内に流入する効果がある. すなわち流体が” 流れる” ことに起因した項がさらに付加される. これは Euler の連続の方程式を導出するときに行ったものと同様の議論により,

$$- \iint_S (\rho v_i) v_j n_j dS$$

と表せる.¹ 以上の議論から V 内の運動量の時間変化は, V に働く体積力, S に作用する面積力と S を通じて流れ込む運動量との総和に等しい. したがって,

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho v_i dV = \iiint_V \rho \mathcal{K}_i dV + \iint_S \tau_{ij} n_j dS - \iint_S (\rho v_i) v_j n_j dS \quad (5.1)$$

上式右辺第二項と第三項を 2.6 節の Gauss の定理を用いて変形する. このとき, これらは

$$\iint_S \tau_{ij} n_j dS - \iint_S (\rho v_i) v_j n_j dS = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} - \rho v_i v_j) dV$$

と書き換えられる. したがって (5.1) は

$$\iiint_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) - \rho \mathcal{K}_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) \right\} dV = 0 \quad (5.2)$$

となる. ここで V が任意であることを考慮すると, 上式の被積分関数はゼロでなければならない. したがって, 微分形の運動量保存則

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = \rho \mathcal{K}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} \quad (5.3)$$

が得られる.

さらにこの方程式を書き換える. (5.3) の左辺を展開する:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) &= v_i \frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) &= \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j). \end{aligned}$$

このうち第一式右辺第一項と第二式右辺第二項は連続の方程式 (4.1) より相殺される. そこで (5.3) は

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \rho \mathcal{K}_i,$$

¹図 4.1 参照. 連続の式の導出では, V の表面を通じて流入する流体の質量を考えたので, 微小体積 $v_n dS$ に密度を乗じた. ここでは運動量保存則を考えるので, V の表面を通じて流入する流体の運動量は, 微小体積 $v_n dS$ に運動量密度 ρv を乗ずればよい.

または密度 ρ で両辺を割って

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \mathcal{K}_i, \quad (5.4a)$$

と書ける. これが求めるべき運動方程式である. Lagrange 微分を用いると以下のようになる:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \mathcal{K}_i. \quad (5.4b)$$

- 非粘性流体の場合: 非粘性流体の場合には, 応力テンソルは圧力のみで

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (5.5)$$

なので, 運動方程式 (5.4) は

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mathcal{K}_i \quad (5.6a)$$

となる. (5.6a) をベクトル形式で書くと

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathcal{K}, \quad (5.6b)$$

となる. (5.6) は Euler の方程式 (Euler's equation) と呼ばれている.

- Newton 流体の場合: 応力テンソルが (3.5) で表される Newton 流体では, 運動方程式 (5.4) は

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \mathcal{K}_i, \quad (5.7a)$$

ベクトル形式では

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathcal{K}, \quad (5.7b)$$

と書ける. ここで $\nu = \mu/\rho$ は動粘性係数 (kinematic viscosity) と呼ばれる. (5.7) は Navier-Stokes 方程式 (Navier-Stokes equation) と呼ばれ, 実在の流体の運動を極めてよく記述する方程式である.

5.2 エネルギー論

前節で導いた運動方程式から, 運動エネルギーに関する方程式を導出してみる. 前節と同様に和の規約を用いることにする. (5.4a) に ρv_i を乗じると,

$$\rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \rho v_i \mathcal{K}_i,$$

上式左辺は,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v_i v_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \rho v_i v_i v_j \right) - \frac{1}{2} v_i v_i \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right)}_{\text{連続の式よりゼロ}}$$

と表現できる. 次に右辺第一項は,

$$\begin{aligned} v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{\partial (\tau_{ij} v_i)}{\partial x_j} - \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial (\tau_{ij} v_i)}{\partial x_j} - \tau_{ij} e_{ij} \end{aligned} \quad (5.8)$$

上式の最後の表現には τ_{ij} が対称テンソルである ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$) ことを用いた. また,

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.9)$$

である. したがって, 単位体積あたりの運動エネルギーを $\mathcal{T} = \frac{1}{2} v_i v_i$ とすると, その発展方程式は

$$\frac{\partial (\rho \mathcal{T})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \mathcal{T} v_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial (\tau_{ij} v_i)}{\partial x_j} + \rho v_i \mathcal{K}_i - \tau_{ij} e_{ij}, \quad (5.10)$$

となる.

質点系の力学では運動エネルギーとポテンシャルとの和が保存されるが, 流体力学では, たとえ流体粒子 (流体素片) に働く外力 \mathcal{K} がゼロであっても (ポテンシャルへの寄与はこの項から生じる), 流体粒子の運動エネルギーは保存しないことに注意すべきである. 力学的エネルギーのみでは保存則は成立せず, 力学的エネルギーと内部エネルギーの和が保存するのである. (5.10) の右辺最終項が, 運動エネルギーと内部エネルギーとの間の変換を表す項になっている. このことは, 応力テンソル τ_{ij} を具体的に表現すると分かりやすい.

- 非粘性流体の場合： 非粘性流体の場合には、応力テンソルは圧力のみで

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$$

なので, (5.8) は

$$-\frac{\partial(pv_j)}{\partial x_j} + pe_{jj}$$

となる. したがって, (5.10) は

$$\frac{\partial(\rho\mathcal{T})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\mathcal{T} + p)v_j}{\partial x_j} = \rho v_i \mathcal{K}_i + pe_{kk}, \quad (5.11a)$$

もしくはベクトル形式で

$$\frac{\partial(\rho\mathcal{T})}{\partial t} + \nabla \cdot \{(\rho\mathcal{T} + p)\mathbf{v}\} = \rho\mathbf{v} \cdot \mathcal{K} + p\nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (5.11b)$$

となる.

- Newton 流体の場合： 応力テンソルが(3.5) で表される Newton 流体では, (5.8) 式は,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ -pv_j + 2\mu \left(e_{ij}v_i - \frac{1}{3}e_{kk}v_j \right) \right\} - \left\{ -pe_{jj} + 2\mu \left(e_{ij}e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}e_{jj} \right) \right\}$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} \left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij} \right)^2 &= e_{ij}e_{ij} - \frac{2}{3}e_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{9}e_{kk}e_{kk} \underbrace{\delta_{ij}\delta_{ij}}_{=3} \\ &= e_{ij}e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}e_{jj}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

したがって, (5.10) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\mathcal{T})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\rho\mathcal{T} + p)v_j - 2\mu \left(e_{ij}v_i - \frac{1}{3}e_{kk}v_j \right) \right\} \\ = \rho v_i \mathcal{K}_i + pe_{kk} - \Phi, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\Phi = 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij} \right)^2 \quad (5.14)$$

Φ は散逸関数 (dissipation function) と呼ばれ, 正の量である. これは粘性の効果による運動エネルギーの散逸を表している. この散逸された運動エネルギーは熱エネルギー方程式の加熱項になる. このことは熱力学的エネルギー方程式の導出の際にもう一度振り返ることにする.

5.3 Lagrange の運動方程式

5.1 節で導出した Euler 方程式 (5.6) を Lagrange 的記述で表現する. (5.6) は Lagrange 微分を用いて書くと,

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathcal{K} \quad (5.15)$$

である. Euler の運動方程式のこの表式は, 外力 \mathcal{K} を受けながらポテンシャル p の中を運動する質量 ρ の質点の運動方程式に対応している. 左辺第一項は Lagrange 的立場では $\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}\right)_{a,b,c}$ と表現できる. そこで右辺の気圧傾度力 $-\nabla p$ を Lagrange 的立場の独立変数である物質座標 (a, b, c) の微分で表現するればよい.

(5.6) の x -成分に $\partial_a x$ を乗じたもの, (5.6) の y -成分に $\partial_a y$ を乗じたもの, (5.6) の z -成分に $\partial_a z$ を乗じたものを加えると ∇p は:

$$\partial_x p \partial_a x + \partial_y p \partial_a y + \partial_z p \partial_a z = \partial_a p$$

となり, 物質座標での微分に変換できることがわかる. そこで Lagrange の運動方程式の a -成分は, (5.6) の x -成分に $\partial_a x$ を乗じたもの, (5.6) の y -成分に $\partial_a y$ を乗じたもの, (5.6) の z -成分に $\partial_a z$ を乗じたものを加えて得られる:

$$(\partial_t^2 x - \mathcal{K}_x) \partial_a x + (\partial_t^2 y - \mathcal{K}_y) \partial_a y + (\partial_t^2 z - \mathcal{K}_z) \partial_a z = -\frac{1}{\rho} \partial_a p.$$

同様に b -成分は, (5.6) の x -成分に $\partial_b x$ を乗じたもの, (5.6) の y -成分に $\partial_b y$ を乗じたもの, (5.6) の z -成分に $\partial_b z$ を乗じたものを加えて, c -成分は, (5.6) の x -成分に $\partial_c x$ を乗じたもの, (5.6) の y -成分に $\partial_c y$ を乗じたもの, (5.6) の z -成分に $\partial_c z$ を乗じたものを加えて得られる. 結果をまとめると次のようになる:

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \mathcal{K}_x\right) \frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \mathcal{K}_y\right) \frac{\partial y}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \mathcal{K}_z\right) \frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a}, \quad (5.16)$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \mathcal{K}_x\right) \frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \mathcal{K}_y\right) \frac{\partial y}{\partial b} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \mathcal{K}_z\right) \frac{\partial z}{\partial b} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b}, \quad (5.17)$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \mathcal{K}_x\right) \frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \mathcal{K}_y\right) \frac{\partial y}{\partial c} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \mathcal{K}_z\right) \frac{\partial z}{\partial c} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial c}. \quad (5.18)$$

第6章 流体力学の基礎方程式(3)：エネルギー方程式

“ある系の内部エネルギーと運動エネルギーとの和の時間変化率は、その系に流入する内部エネルギー、運動エネルギー、熱流の和、系に働く力がする仕事、さらに系内の熱源による加熱に等しいという”，というエネルギー保存則を具体的に書き表した数式がここで述べるエネルギー方程式である。連続の式、運動方程式の導出と同様に Euler 的立場からの導出を行う。

6.1 熱力学的エネルギーの方程式

空間に固定された閉曲面 S を考える。 S に囲まれた領域を V とする。 V に含まれる流体が持つ内部エネルギーと運動エネルギーの和(全エネルギー)は $\int_V \rho (\mathcal{T} + \mathcal{U}) dV$ である。ここで、単位質量あたりの運動エネルギーと内部エネルギーをそれぞれ \mathcal{T}, \mathcal{U} と表した。単位時間あたり V に含まれる流体の全エネルギーの時間変化は

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho (\mathcal{T} + \mathcal{U}) dV$$

である。考える流体に作用する力は体積力と面積力である。体積力と面積力が系 V にする仕事は、単位時間当たり

$$\iiint_V \rho v_i \mathcal{K}_i dV + \iint_S v_i \tau_{ij} n_j dS$$

と表せる。¹ S を通じて V 内に流入する全エネルギーは、Euler の連続の方程式を導出するときに行ったものと同様の議論により、

$$- \iint_S \{ \rho (\mathcal{T} + \mathcal{U}) \} v_j n_j dS \quad (6.1)$$

と表せる。さらに、流体内の温度が一樣でないとき、流体の運動とは無関係に熱の移動が起こる。これは熱伝導 (thermal diffusivity) と呼ばれ、流体を構成する原子・

¹物体に力 F が働いている時に、その物体を r だけ動かすのに要する仕事は、 $F \cdot r$ である。

分子の熱的振動に伴って発生する現象である. 熱伝導に伴う熱流 θ は S を通じて V 内に流入する. この効果は

$$- \iint_S \theta_j n_j dS \quad (6.2)$$

と表せる.²

また, 単位質量あたりの流体の加熱率を J とする. このときエネルギー保存則より V 内のエネルギーの時間変化は, V に働く体積力がする仕事, S を通じて作用する面積力がする仕事, S を通じて V 内に流れ込む全エネルギーと熱伝導に伴う熱流, さらに系内の熱源による加熱率の総和に等しいので,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho (\mathcal{T} + \mathcal{U}) dV &= \iiint_V \rho v_i \mathcal{K}_i dV + \iint_S v_i \tau_{ij} n_j dS \\ &\quad - \iint_S [\{\rho (\mathcal{T} + \mathcal{U})\} v_j + \theta_j] n_j dS \\ &\quad + \iiint_V \rho J dV \end{aligned} \quad (6.4)$$

上式右辺第二, 三項を 2.6 節の Gauss の定理を用いて変形すると

$$- \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \mathcal{T} v_j + \rho \mathcal{U} v_j - v_i \tau_{ij} + \theta_j) dV \quad (6.5)$$

と書き換えられる. したがって V が任意であることを考慮すると, 微分形のエネルギー方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\rho (\mathcal{T} + \mathcal{U})\} + \frac{\partial}{\partial x_j} \{\rho (\mathcal{T} + \mathcal{U}) v_j\} = \frac{\partial (v_i \tau_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial \theta_j}{\partial x_j} + \rho v_i \mathcal{K}_i + \rho J \quad (6.6)$$

となる. 力学的エネルギーの方程式(5.10)を(6.6)から引くと, 単位体積あたりの内部エネルギーに関する方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathcal{U}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \{(\rho \mathcal{U}) v_j\} = \tau_{ij} e_{ij} - \frac{\partial \theta_j}{\partial x_j} + \rho J \quad (6.7)$$

が得られる. さらに連続の式を考慮すると, (6.7) は Lagrang 微分を用いて

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij} e_{ij} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta_j}{\partial x_j} + J \quad (6.8)$$

となる.

²温度勾配があまり大きな値をとらない範囲では, 熱伝導は Fourier の法則によってよく記述できる. Fourier の法則は

$$\theta = -\kappa \nabla T \quad (6.3)$$

と表せる. κ は熱伝導率と呼ばれる.

- 非粘性流体の場合： 非粘性流体の場合には、応力テンソルは $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$ なので、(6.8) の右辺第一項は

$$\tau_{ij} e_{ij} = -p e_{jj} = -p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad (6.9)$$

と変形される。さらに上式最後の表現に連続の式

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{\partial v_j}{\partial x_j}$$

を用いると (6.8) は

$$\frac{DU}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\theta} + J \quad (6.10)$$

となる。熱流 $\boldsymbol{\theta}$ がゼロのとき、(6.10) は、熱力学の第一法則 $\delta U + p\delta\left(\frac{1}{\rho}\right) = \delta Q$ において、熱力学的な状態の変化が単位時間に起こったと考えて δ の記号を Lagrange 微分 $\frac{D}{Dt}$ で置き換えたものと同じ形式になっている。

- Newton 流体の場合： Newton 流体の場合には、(6.8) の右辺第一項は

$$\tau_{ij} e_{ij} = -p e_{jj} + \Phi \quad (6.11)$$

となる。したがって(6.8) は

$$\frac{DU}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \Phi - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\theta} + J \quad (6.12)$$

この場合に熱力学的エネルギー方程式には、非粘性流体の熱力学的エネルギー方程式に、粘性による力学的エネルギーの散逸に伴う項（右辺第二項の Φ ）が、加熱項として加わっていることがわかる。（(5.13) 参照。）

第7章 状態方程式

7.1 状態方程式

前章までに導出した連続の方程式, 運動方程式, 熱力学的エネルギー方程式の3種類, 5個の方程式には, 未知変数として, 密度 ρ , 速度 v , 圧力 p , 内部エネルギー U の6つが含まれている.¹ したがって, 方程式は閉じていないように見える. しかし熱力学的な物理量の間には一定の関数関係 (状態方程式) が存在し, ある熱力学的な変数は別の2つの熱力学的変数で表現することが可能である. したがって, 流体力学の基礎方程式は上記の5つで十分である. ここでは, 状態方程式の具体的な形を議論することにする.

7.2 状態方程式の例

地球流体力学では以下のような状態方程式に従う流体を考察の対称とする場合が多い.²

7.2.1 理想気体

希薄な気体では, 以下のような状態方程式がよい近似で成り立つ:

$$p = \rho RT. \quad (7.1)$$

注意: (7.1) は単位体積の理想気体の方程式である. 化学で習う n kmol の理想気体の状態方程式は

$$PV = nR^*T \quad (7.2)$$

である. ここで, R^* は普遍定数 ($R^* = 8.314 \times 10^{-3} \text{ J K}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$) である. 体積 V に含まれる理想気体の分子の質量を m kg, 理想気体の分子量を M

¹熱流 θ が Fourier の法則で表せるとすれば温度 T もあわせて, 7 個の未知変数がある.

²気象力学では地球大気を理想気体と扱い, 海洋力学では海洋を Boussinesq 流体として扱うことが多い.

すると, (7.2) は

$$P = \frac{m}{V} \frac{R^*}{M} T \quad (7.3)$$

となる. $\rho = m/V$ であるから, (7.1) と (7.3) を見比べると

$$R = \frac{R^*}{M} \quad (7.4)$$

という関係がなりたつことがわかる.

- 地球大気は窒素 (分子量 28) 75.5 %, 酸素 (分子量 32) 23.1 %, アルゴン (分子量 40) 1.3 % の混合気体なので³, 質量数は $M = 28 \times 0.755 + 32 \times 0.231 + 40 \times 0.013 = 28.96$. したがって $R = R^*/28.96 = 287 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ である.

演習問題:

金星大気, 火星大気の大気組成を調べ, これらの大気を理想気体とみなしたときの気体定数 R を求めなさい.

7.2.2 Boussinesq 流体

一般的な状態方程式 $\rho = f(p, T)$ をある基準の温度 T_0 , 圧力 p_0 の周りで Taylor 展開して, 展開の 1 次の項までをとる:

$$\begin{aligned} \rho = f(p, T) &= f(p_0, T_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)_T (p - p_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_p (T - T_0) \\ &= \rho_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T (p - p_0) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p (T - T_0) \\ &= \rho_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T (p - p_0) + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p (T - T_0) \right\} \end{aligned}$$

圧縮率がゼロ, $\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = 0$, であるとすると,

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)], \quad (7.5)$$

$$\alpha \equiv -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p, \quad (7.6)$$

³高度約 80 km あたりまでこのような成分比に保たれている.

を得る。(7.5)の状態方程式に従う流体は Boussinesq 流体と呼ばれ、水のように、密度が圧力と独立であるような流体の状態方程式として用いられる。ここで、 α は体膨張係数、もしくは体膨張率と呼ばれる。⁴ 海洋の場合には、密度は塩分にも依存するので、

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0) + \beta(s - s_0)], \quad (7.7)$$

$$\beta \equiv -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_{p,T} \quad (7.8)$$

が用いられる。ここで、 s は塩分 (salinity) である。 s の単位は、海水 1 kg あたりの塩分のグラム数として計られる。また、 β は、 α との対応から、塩分圧縮係数 (coefficient of saline contraction) と呼ばれる。

7.3 順圧流体の状態方程式

連続の方程式に現れる未知変数は、密度 ρ と速度 v である。一方、運動方程式には上記のほかに圧力 p が未知変数として現れている。したがって、もし圧力と密度との間に一定の関数関係

$$\rho = \mathcal{F}(p) \quad (7.9)$$

が存在するとき、もしくは状態方程式の形で

$$f(p, \rho) = 0 \quad (7.10)$$

という流体を考えるならば、エネルギー方程式を持ち出さなくても、連続の式と運動方程式のみで方程式は閉じるさせることができ、流体の運動を決定できる。(7.9)あるいは(7.10)を満足するような流体を順圧流体 (barotropic fluid) と呼ぶ。これは(7.10)式で与えられる流体の等圧面と等密度面が平行であることからこのように呼ばれている。いっぽう一般の流体は密度、圧力以外に例えば温度にも依存するので等密度面と等圧面は平行ではなく傾いている。このような流体は傾圧流体 (baroclinic fluid) と呼ばれる。順圧と言ういいかたは、地球流体力学特有の呼び名で通常の流体力学では、barotropic fluid のことをバロトロピー流体と呼び (例えば今井功：流体力学 (岩波書店) 参照)、一方、baroclinic や傾圧と言う言葉はでてこない。

先に述べた順圧流体として例えば以下のような 3 つの場合が考えられる。

⁴(7.6) にマイナス符号を付けて、膨張率を定義する理由は、一般に気体は等圧下で温度を加えれば膨張し密度は減るからである。すなわち、 $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p < 0$ 。従って、膨張率を正の量として定義するために、マイナス符号をつけている。 ρ_0 で除する理由は「率」にするためである。

7.3.1 非圧縮一様流体

非圧縮 $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ で、至るところ密度が一様な流体 (incompressible homogeneous fluid) では、

$$\rho = \text{const.} \quad (7.11)$$

このとき、流体力学の基礎方程式は極めて簡単になる。例えば Newton 流体の場合には、運動方程式は

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathcal{K}, \quad (7.12)$$

ここで、 $P = p/\rho$ である。また連続の方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (7.13)$$

である。上記のような方程式に従う流体の運動は、現実的な流れの予報や解析という目的ではなく、Navier-Stokes 方程式が持つ数理物理的性質を調べる目的で研究されている。

7.3.2 等温変化する流体

一定温度に保たれた外界にさらされながら熱伝導性がよい流体が緩やかに運動すると、外界および流体全体が熱的に平衡で温度が時間的にも空間的にも一定となる。このとき独立に変化する熱力学的量は1つになる。例えば $T = \text{const}$ の理想気体では

$$p \propto \rho \quad (7.14)$$

となる。

7.3.3 断熱変化する流体

流体の熱伝導性が悪い場合には、運動に際して状態変化は断熱的となる。理想気体の状態変化を圧力 p 、密度 ρ 、エントロピー S で記述すると

$$p = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \rho^\gamma \exp\left(\frac{S - S_0}{C_v}\right) \quad (7.15)$$

と書ける. ここで添字 0 の付いた物理量は, ある基準となる状態を表す. また γ は定積比熱 C_v と定圧比熱 C_p の比 $\gamma = C_p/C_v$ である. 断熱過程ではエントロピーが状態変化中で保存される ($S = S_0$) ので, (7.15) は

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (7.16)$$

となる.

演習問題:

熱力学の第一法則 $dU = T dS - p d(\rho^{-1})$, 理想気体の状態方程式 $p = \rho R T$, さらに $dU = C_v dT$ を用いて, (7.15) を導きなさい.

演習問題:

(7.16) は Poisson の関係式と呼ばれる. Poisson の関係式を理想気体の状態方程式を使って, T, p で表現すると,

$$\frac{T_0}{T} = \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/C_p} \quad (7.17)$$

となることを示しなさい. ここで, T_0 は p_0 における温度である.

7.4 温位

(7.17) は熱力学においては

$$p^{R/C_p} T = \text{const} \quad (7.18)$$

などと表現される場合が多く, T_0, p_0 という量を導入してそれを問題にすることはほとんどないが, 地球流体力学では, T_0 は温位 (potential temperature) と呼ばれ, 重要な役割を果たす物理量である.

鉛直方向にある温度プロファイルを持った大気を考え, ある高度 z において気圧 $p(z)$, 温度 $T(z)$ を持った空気塊を気圧が p_0 を持つ高度まで (通常 $p_0 = 1000\text{hPa}$ が用いられる), 断熱的に移動させたとき, 空気塊が持つ温度 T_0 を, 高度 z にある空気塊が持っている温位と定義する. 通常, 温位は記号的に θ と表される. 安定性の議論を行うと, 温位の鉛直分布 $\theta(z)$ により, 鉛直方向の大気の安定度を見積もることが出来ることがわかる.

この量はエントロピー S との間に

$$S = C_p \ln \theta + \text{const} \quad (7.19)$$

の関係がある。地球流体力学ではエントロピーよりも温位を使って現象を表現することが通例である。

7.5 大気の鉛直構造

本節では地球大気の平均的な鉛直構造について述べる。地球大気は理想気体であると仮定し、流体に働く外力 \mathcal{K} は重力のみ、 $\mathcal{K} = -g\mathbf{k}$ とする。⁵

流体が静止しているときの力のバランスは、運動方程式 (5.7b) より、気圧傾度力と外力がバランスした状態である：

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = -g \mathbf{k}. \quad (7.21)$$

この状態では、水平方向の気圧傾度力は0であり、水平方向に気圧は一様である。また、鉛直方向には静水圧平衡がなりたっている：

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho g. \quad (7.22)$$

静水圧平衡の式 (7.22) と理想気体の状態方程式 (7.1) から得られる幾つかの考察を行う。⁶

平均海水面から高度 z まで単位質量あたりの空気塊を上昇させたときに、それにする仕事 Φ をジオポテンシャル (geopotential) , $Z \equiv \Phi/g_0$ をジオポテンシャル高度 (geopotential height) と呼ぶ：

$$\Phi(z) \equiv \int_0^z g dz. \quad (7.23)$$

ここで、 g_0 は平均海水面における全球平均重力加速度 $g_0 = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ である。ジオポテンシャル高度は対流圏や下部成層圏では幾何学的高度 z とほぼ同じ数値をとる。

⁵ここで、 g は定数でなく高度依存性があってもよい。そのような g の表現は

$$g = \frac{GM}{(a+z)^2}. \quad (7.20)$$

ここで、 G は万有引力定数、 M は地球の質量、 a は地球の平均半径、 z は平均海水面からの高度である。

⁶(7.22) は鉛直方向の運動方程式をある高度 z において、水平方向全球にわたり平均した式とみなすことも出来る。

(7.23) の積分変数を静水圧平衡の式を用いて z から p に変換する. このとき理想気体の状態方程式を用いて, (7.22) の密度 ρ を圧力 p と温度 T で書きかえておく. 結果は

$$\Phi(z) - \Phi(0) = -R \int_{p(0)}^{p(z)} T d \ln p. \quad (7.24)$$

(7.24) は測高方程式 (hypsometric equation) と呼ばれる. (7.24) より, 気圧面 p_1 と p_2 の厚さ (ジオポテンシャルの差, 層厚 (thickness))⁷は

$$Z_T \equiv Z(p_2) - Z(p_1) = -\frac{R}{g_0} \int_{p_1}^{p_2} T d \ln p, \quad (7.25)$$

で与えられる. 気球に観測機器 (ラジオゾンデ) を係留して放球し, 大気の気温や気圧を観測したとき, その値と (7.25) を用いてその温度, 気圧の値が観測された高度を求めることができる.

ここで, ある気圧 p_1 と p_2 の間にある大気の平均温度 $\langle T \rangle$ を

$$\langle T \rangle \equiv \frac{\int_{p_1}^{p_2} T d \ln p}{\int_{p_1}^{p_2} d \ln p} \quad (7.26)$$

で定義する. このとき層厚は

$$Z_T = -H \ln(p_2/p_1) \quad (7.27)$$

$$H \equiv \frac{R \langle T \rangle}{g_0}, \quad (7.28)$$

で与えられる. もし大気が等温であるとすれば, 気圧の鉛直プロファイルは

$$p(Z) = p(0) e^{-Z/H} \quad (7.29)$$

となり, 高度と共に指数関数的に減少していく. H はスケールハイト (scale height) と呼ばれ, 気圧が e^{-1} になる高度である. 地球を温度 255K の等温大気と仮定するとスケールハイトは約 7 km である.

⁷ $p_1 > p_2$ 即ち, p_1 面が p_2 面よりも下層にあるとする.

第8章 境界条件

8.1 境界条件とは...

n 階の常微分方程式の一般解には, n 個の積分定数が出現する. これらは, $t = 0$ における系の状態, 即ち初期条件を指定することにより決定される. 例えば, バネ定数 k を持つ線形バネにつながれた質量 m の質点の運動方程式およびその解は,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x, \quad (8.1)$$

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad \omega = k/m. \quad (8.2)$$

となり, 任意定数 A, B は時刻 $t = 0$ における質点の初期位置 $x(0)$ および初期速度 $\dot{x}(0)$ によって決定される.

いっぽう偏微分方程式の場合には, 一般解は任意関数となる. 例えば 1 次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) \quad (8.3)$$

では一般解は,

$$\psi(x, t) = G(x - ct) + H(x + ct) \quad (8.4)$$

となる. G, H は任意関数である.¹ これらの関数形を決定するためには関数 ψ の定義域の境界での解の振舞いを指定してやる, 即ち境界条件が必要がある. もし $0 \leq x \leq L$ を関数 ψ の定義域とし, $\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0$ という境界条件を指定すると, 任意関数は Fourier 級数で表現される. この段階では Fourier 係数はまだ未定で, それを決定するためには初期条件が必要である.^{2, 3}

¹ $G(x - ct)$ は右進行波を表し, $H(x + ct)$ は左進行波を表している.

² 上記の波動方程式の場合には, 時間に関して 2 階, 空間に関して 2 階の微分が含まれているので, 初期条件が 2 個 (例えば $\psi(x, 0), \partial_t \psi(x, 0)$), 境界条件も 2 個 (境界の両端) 必要となる.

³ 矢野健太郎, 1979: 微分方程式, 裳華房, 223 pp.

演習問題

(8.4) が (8.3) の解になっていることを確かめなさい.⁴

今まで導出してきた流体力学の基礎方程式 (連続の式, 運動方程式) は, 偏微分方程式であるので, それを解いて解を完全に決定するためには初期条件と境界条件が必要である. Euler の連続の方程式, Euler の運動方程式は時間に関しては1階の微分になっているので, 初期条件としては時刻 $t = 0$ における場 v, p, ρ の値を指定すればよい. ここでは境界条件, 特に地球流体でよく現れる境界条件について述べることにする.

8.2 固体表面での境界条件

大気や海洋の下端における条件を想定して, 固体境界は静止しているとする. 固体表面上の点 P での流速を v , P における境界の法線を n とする. 固体境界を貫く流れは存在できない, 即ち, 固体表面でそれに垂直な流れはないので, 境界条件は

$$v \cdot n = 0 \quad (8.5)$$

となる.⁵

地形が $z = h(x, y)$ という関数形で与えられる場合には, 地形の法線は $\nabla(h - z)$ に比例するので, (8.5) は

$$\begin{aligned} v \cdot \nabla(h - z) &= \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dz}{Dt} = 0, \\ w &= \frac{Dz}{Dt} = \frac{Dh}{Dt}, \end{aligned} \quad (8.6)$$

となる.

8.3 変形する境界面での条件

混合しない2種類の流体の境界面での条件, 例えば水面 (これは大気と水という2種類の混合しない流体の界面である) において課せられる条件である. いま境界

⁴ ヒント: $\xi = x - ct, \eta = x + ct$ と変数変換して, $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}$ を $\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta}$ に書き換えるとよい.

⁵ 固体境界が速度 v' で運動しているときには, 速度 v' で運動する座標系に乗って現象を観測すれば, 境界条件は (8.5) である. これを静止座標系で眺めたときには, 座標変換により $(v - v') \cdot n = 0$ となることは容易にわかる.

の形が

$$F(x, y, z, t) = 0 \quad (8.7)$$

で与えられるとしよう. 2つの流体は混合しないので境界面に相対的な垂直な流れはない. そこで, 界面を構成する流体粒子は変わらない. したがって, 境界面上のある一点 P にあった流体粒子が Δt 後に流れに乗って $v \Delta t$ 移動しても, 依然として境界に存在していることから $F(x + u \Delta t, y + v \Delta t, z + w \Delta t, t + \Delta t) = 0$ である. したがって

$$F(x + u \Delta t, y + v \Delta t, z + w \Delta t, t + \Delta t) = \underbrace{F(x, y, z, t)}_{=0} + \frac{DF}{Dt} \Delta t + O(\Delta t^2) = 0,$$
$$\frac{DF}{Dt} = 0. \quad (8.8)$$

8.4 大気上端での条件 ~ 放射境界条件 ~

第9章 流体力学の基礎方程式(4)：回転系上の運動方程式

9.1 序

地球に固定された座標、即ち回転座標系では 5.1 節で導いた運動方程式 (5.6) はどのような変更を受けるのかをここで解説する。話を簡単化するために、流体は非粘性とする。¹

??節で述べたように、慣性系に対して一定の角速度 Ω で回転している座標系で質点の運動を観測すると、慣性系では存在していなかった見掛けの力 (遠心力と Coriolis の力) が物体に働いているように見える。即ち、慣性系上での質点の加速度 $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ を回転系に相対的な速度の回転系上での時間微分 $\frac{d_r \mathbf{v}'}{dt}$ に対応させ、質点に働いている力に Coriolis 力と遠心力を付け加えればよい (??) 式参照)。流体力学の場合には、質点の運動に関する時間微分 $\frac{d}{dt}$ に対応するものは Lagrange 微分 $\frac{D}{Dt}$ である。そこで回転系における Euler 的記述の運動方程式は速度 \mathbf{v} の Lagrange 微分を次のように置き換えればよいことが分かる：

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \rightarrow \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + 2\Omega \times \mathbf{v} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}). \quad (9.1)$$

ここで??節で、慣性系で観測される速度と回転系に相対的な速度を区別するために導入した prime, および、慣性系での時間微分と回転系上での時間微分を区別するために導入した添字 r は省略した。したがって、回転系上の Euler 的記述の運動方程式は、Lagrange 微分を Euler 的表記に書き直して

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + 2\Omega \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathcal{K} - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) \quad (9.2)$$

となる。しかしながら、重力と地球の形に付いて考えると、(9.2) 式をもう少し簡単化することができる。

¹Newton 流体を考察する場合には、粘性力項は全て \mathcal{K} に含まれていると考えれば、下記の議論はそのまま適用できる。極座標系における粘性力項の表現は、Landau, L. D. & Lifshitz, E. M., *Fluid Mechanics*. 2nd. Ed. Pergamon Press. 1987. p.48 - 49. を参照の事。β 平面近似方程式における粘性力項の表現は、デカルト座標系における表現と一緒にある。

極座標		球座標
r : 動径	\iff	r : 惑星中心からの距離
θ : 余緯度	\iff	ϕ : 緯度, $(\theta + \phi = \frac{\pi}{2})$
ϕ : 方位角	\iff	λ : 経度

表 9.1: 極座標と球座標の対応関係

9.2 球座標系

2.2 節において、本講義ではデカルト座標系、即ち、直線座標系を用いて現象を記述すると述べたが、重力を考察する場合や地球が球である効果をデカルト座標系のような直線座標系の方程式に導入するために、本節と引き続くいくつかの節において曲線座標系を使うことにする。まず、気象学においてよく用いられる曲線座標系として球座標系に付いて説明する。

球座標系 (λ, ϕ, r) とは、3次元極座標系 (r, θ, ϕ) に類似する物であるが、子午線方向の測りかたを極軸からではなく赤道面から測った座標系である。ここで、 λ, ϕ, r はそれぞれ、経度、緯度、動径である。動径方向の距離は地球の中心からの距離 r の代わりに、惑星を半径 a の球と仮定し、地表からの幾何学的高度 $z = r - a$ を用いる場合もある。特に地球の大気・海洋では実用的見地から動径方向には幾何学的高度を使った方が便利である。

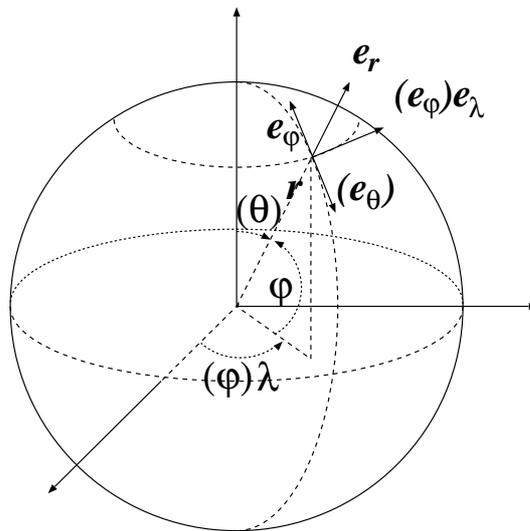


図 9.1: 極座標と球座標の関係. 括弧付の量は極座標における量である.

9.3 実効重力

いま地球が半径 a , 一定の角速度 Ω で自転する密度が一様な質量 M の剛体球であると仮定する. 地球上のある緯度 ϕ , 高度 z に単位質量の質点が静止していたとする. このとき質点に働く力は地球との間に働く万有引力と遠心力である.² いまこの2つの力の合力を 実効重力(effective gravity) と呼び g で表そう.³ 即ち

$$\mathbf{g} \equiv -\frac{a^2}{(a+z)^2} g^* \mathbf{e}_r + \Omega^2 (a+z) \cos \phi \mathbf{e}_\rho. \quad (9.3)$$

ここで \mathbf{e}_r は球座標系 (λ, ϕ, r) における動径方向の単位ベクトル, \mathbf{e}_ρ は円筒座標系 (ρ, θ, z) における動径方向の単位ベクトルを表す. 球座標系における動径方向の単位ベクトルと緯度方向の単位ベクトル \mathbf{e}_ϕ との間には

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \phi \mathbf{e}_r - \sin \phi \mathbf{e}_\phi \quad (9.4)$$

の関係がある. また g^* は万有引力定数 G を用いて

$$g^* = \frac{GM}{a^2} \quad (9.5)$$

と表される.

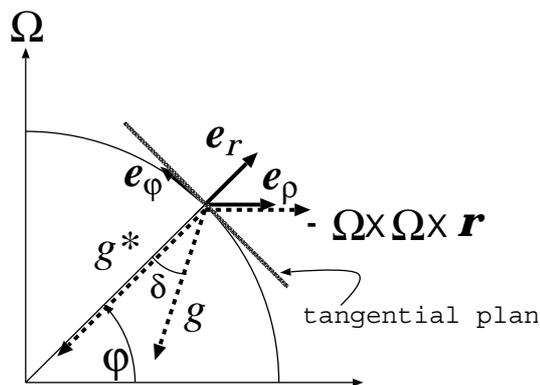


図 9.2: 万有引力, 実効重力, 遠心力, 局所平面の関係.

図9.2からわかるように, 実効重力は遠心力があるために地球の中心の方向 $(-\mathbf{e}_r)$ を向かず, 緯度 ϕ , 経度 λ に張られた接平面 (局所的平面, \mathbf{e}_r を法線とする平面)

² Coriolis 力は回転系に相対的な速度に比例するので, 今考察する場合は現れて来ない.

³ 万有引力による重力を英語では gravitational force と呼び, いっぽう, 万有引力と遠心力の合力を gravity force, もしくは gravity と呼んで区別している.

にたいして垂直になっていない. どのくらい傾いているかここで見積もってみる. ある緯度 ϕ , 高度 $z = 0$ で議論をする. 万有引力の方向 e_r と実効重力の方向との傾きを δ とするとそれは

$$\begin{aligned}\delta &= \cos^{-1} \frac{\mathbf{g} \cdot (-g^* \mathbf{e}_r)}{g^* |\mathbf{g}|} \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{g^* - \Omega^2 a \cos^2 \phi}{\sqrt{(g^* - \Omega^2 a \cos^2 \phi)^2 + (\Omega^2 a \cos \phi \sin \phi)^2}} \right) \quad (9.6)\end{aligned}$$

で与えられる.⁴ いま $a = 6.4 \times 10^6$ m, $\Omega = 7.3 \times 10^{-5}$ s⁻¹, $g^* = 9.8$ m s⁻² とし (9.6) を数値的に見積もってみると, その値は緯度 45 度で最大値 $\delta = 9.9 \times 10^{-2}$ 度 (約 6 分) となる. これは 1 km につき約 1.7 m 昇る, もしくは下る坂に等しい. つまり, 地球を完全な球であるとする, その上に住んでいる我々が地面と思っている接平面は, 重力に対して垂直でなく, 地表が至るところ δ の角度を持った坂になっていることになる.

実際の地球は剛体ではなく力を受けると変形をする. 遠心力のために回転軸から外向きに引っ張られて極半径よりも赤道半径が長くなっている.⁵ そこであらためて地球の形を「至るところで実効重力と垂直になっている一続きの面の形」と定義しなおす. この面の表面は ジオイド (gioid) と呼ばれ, 回転球体の全表面を水で覆ったとき, その水面がとる形に等しい. 地球の形をこのように定義すると, 緯度 ϕ に張られた接平面では平面の法線方向と実効重力の方向が一致する.⁶

重力の値 $|\mathbf{g}|$ は (9.3) 式にあるように緯度・高度, さらにには実際の地球内部の質量分布の非一様性のために経度にも依存する.⁷ しかしながら地球の大気・海洋の場合, それが存在する領域 z は地球の半径 a に比べて極めて小さいのでこのような場合には $|\mathbf{g}|$ の高度依存性はほとんど無視してよい.⁸ また, 緯度・経度依存性

4

$$\begin{aligned}\mathbf{g} \cdot (-g^* \mathbf{e}_r) &= (-g^* \mathbf{e}_r + \Omega^2 a \cos \phi \mathbf{e}_\rho) \cdot (-g^* \mathbf{e}_r) \\ &= g^{*2} - \Omega^2 a \cos \phi (\cos \phi \mathbf{e}_r - \sin \phi \mathbf{e}_\phi) \cdot g^* \mathbf{e}_r \\ &= g^{*2} - g^* \Omega^2 a \cos^2 \phi, \\ |\mathbf{g}| &= \sqrt{(g^* - \Omega^2 a \cos^2 \phi)^2 + (\Omega^2 a \cos \phi \sin \phi)^2}\end{aligned}$$

⁵ 極半径 6.356×10^6 m, 赤道半径 6.378×10^6 m.

⁶ 実際, 我々は実効重力のかかっている方向を, 鉛直 と定めている.

⁷ (9.3) から $|\mathbf{g}|$ を見積もると赤道と極との間で 3.4×10^{-2} m s⁻² の差がある. 実際の観測された重力は赤道で 9.78 m s⁻², 極で 9.83 m s⁻² である. (例えば, M.L. Salby, *Fundamentals of Atmospheric Physics*. Academic Press, 1996, 坪井忠二, 重力 第2版, 岩波全書, 岩波書店, 1979. 参照.

⁸ 地球大気は, せいぜい $O(10^2)$ km 程度領域にしか存在しない. 海洋の最も深いところは $O(10)$ km 程度である. それに対して, 地球の半径は約 6400 km である.

も考慮せず, 定数 ($g \simeq g_0 = 9.806 \text{ m s}^{-2}$) として扱う.

演習問題 万有引力の方向と実効重力の方向の成す角 (9.6) の厳密な表式を, $\sin \phi \sim \cos \phi \sim O(10^{-1})$, $\Omega^2 a / g^* \ll 1$ であるとして近似すると, $\Omega^2 a \sin(2\phi) / (2g^*)$ となる. このことを確かめなさい. (Taylor 展開のいい演習問題である.)

9.4 球座標系での運動方程式

前説で議論したように, 地球は完全な球ではない. しかしながら, 地球の赤道半径と極半径との差は僅かであるため, 地球流体力学では地球を完全な球とみなしても実用上差し支えない. また万有引力と遠心力との合力である実効重力が球と見做した地球の中心に向く (球の接平面と垂直に交わる) として, 遠心力の項は万有引力の項に繰り込み,

$$\mathbf{g} = -\frac{a^2}{(a+z)^2} g_0 \mathbf{e}_r \quad (9.7)$$

とする. つまり地球 (惑星) が回転している, 座標系が回転している, 効果は Coriolis 力項の有無のみに集約される. このような場合の Euler の運動方程式 (9.2) を球座標系の成分で書くと

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + v_\lambda \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + v_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \phi} + v_r \frac{\partial v_\lambda}{\partial r} + \underbrace{\frac{v_\lambda v_r}{r} - \frac{v_\lambda v_\phi \tan \phi}{r}}_{*1} \\ - 2\Omega \sin \phi v_\phi + \underbrace{2\Omega \cos \phi v_r}_{\dagger 1} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \mathcal{K}_\lambda \end{aligned} \quad (9.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_\lambda \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \lambda} + v_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \underbrace{\frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\lambda^2 \tan \phi}{r}}_{*2} \\ + 2\Omega \sin \phi v_\lambda = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mathcal{K}_\phi, \end{aligned} \quad (9.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_\lambda \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v_r}{\partial \lambda} + v_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \underbrace{\frac{v_\phi^2 + v_\lambda^2}{r}}_{*3} \\ - \underbrace{2\Omega \cos \phi v_\lambda}_{\dagger 2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + \mathcal{K}_r, \end{aligned} \quad (9.10)$$

となる. ここで $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_\lambda, \mathcal{K}_\phi, \mathcal{K}_r)$ は前出の \mathcal{K} から重力を除いたものを改めて \mathcal{K} とした. *を付けた項は, 座標が曲率 r で曲がっているという効果を表し, 曲率項

(curvature term) と呼ばれる.⁹

9.5 β 平面近似

球座標系における運動方程式は、デカルト座標系のような直線座標系の式に比べて複雑で理論的には取り扱いにくい。そこで、地球が回転する球であるという効果を残した直線座標系近似として、 β 平面近似を導入する。これは緯度 ϕ_0 、経度 λ_0 に張られた接平面上で流体の運動を記述するものである。¹⁰ β 平面近似では、以下に示す手順にしたがって (9.8) ~ (9.10) を単純化したものである。

1. 東西、南北、鉛直方向を、それぞれ x, y, z 方向、 x, y, z 方向の流速を u, v, w と定義する。したがって、球座標との関係は、

$$x = r \cos(\phi_0)(\lambda - \lambda_0), \quad y = r(\phi - \phi_0), \quad z = r - a, \quad (9.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad (9.12)$$

$$u = v_\lambda, \quad v = v_\phi, \quad w = v_r, \quad (9.13)$$

で与えられる。この変数変換は、近似ではなく正確な表現である。

2. 地球の気や海洋のように、惑星の半径に比べて流体の存在する領域が極めて薄い場合には、球座標系で書かれた方程式 (9.8) ~ (9.10) に現れる $1/r$ の項は、 $1/a$ に置き換えられる。このような置き換えを行った時には角運動量の保存則が満足されるためには、†1 の付いた項を無視しなければいけない。地球の自転角速度の z 軸方向の成分 (球座標系では、 r 方向成分) に等しい大きさで、回転していると考えていることに相当する。また、†1 の項を無視した時には、エネルギー保存則と無矛盾であるために、†2 の項も同時に無視する必要がある。何故なら、力学的エネルギーの式を導いた時に、Coriolis 力項は見掛けの力なのでエネルギー方程式には陽に現れない。†1 と相殺する項は †2 なので、†1 を無視した時に同時に †2 も無視しないと、エネルギー方程式に見掛けの力である Coriolis 力の寄与が残ってしまうことになるからである。
3. 平面上での記述とするために曲率を無限大と考え、¹¹ (9.8) ~ (9.10) の曲率項 (*の付いた項) は無視する。
4. Coriolis 力項に現れる $2\Omega \sin \phi$ は、Coriolis パラメーター と呼ばれ、 f と記述される。接平面上の記述であることを考慮して、緯度 ϕ_0 からの南北方向の変位が

⁹(9.8) ~ (9.10) の導出をここでは示さないが、極座標系における運動方程式を適当なテキストを参照し、球座標に変換することで確かめられる。

¹⁰実際われわれは、この接平面を水平面と認識して生活している。

¹¹曲率無限大の球面とは平面のことである

微小であるとして, f を ϕ_0 の周りに Taylor 展開して y の 1 次の項のみ残すという近似を行う.

$$f = 2\Omega \sin \phi \simeq 2\Omega \sin(\phi_0 + y/a) \simeq f_0 + \beta y, \quad (9.14)$$

$$f_0 \equiv 2\Omega \sin \phi_0, \quad (9.15)$$

$$\beta \equiv \frac{2\Omega \cos \phi_0}{a}. \quad (9.16)$$

なお, $\beta = 0$ とした記述は, f 平面近似 と呼ばれる.¹²

以上より, 運動方程式は成分で

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathcal{K}_x, \quad (9.17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathcal{K}_y, \quad (9.18)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \mathcal{K}_z - g, \quad (9.19)$$

ベクトル形式では,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{f} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \mathcal{K}, \quad (9.20)$$

と書ける. ここで, $\mathbf{f} = f \mathbf{k}$ である.

以上をまとめると, 回転系上の運動方程式は, 座標系が回転している効果を水平方向の運動方程式の Coriolis 力項の有無によって表した (9.20) を基礎方程式とする. また, 地球が球であることを平面的記述に取り込むために, Coriolis 力が南北方向 (y 方向) に依存するとして, (9.20) の Coriolis パラメーター f を (9.14) ~ (9.16) で表現した式を用いる.

補足: 上記の項目 2 ~ 4 の簡単化に付いては, 厳密には注目したい現象に特徴的な時間・空間スケールから, 方程式の各項の大きさを見積もり, 記述する現象に寄与する項を残すという操作を行っていかなくてはならない. これは, スケール解析 といって, 流体力学的に厳密な方程式から, 地球流体现象を記述する方程式を導出する時に用いられる常套手段である. スケール解析とは, 単なる方程式の数学的簡単化ではなく, 注目したい現象に適切な方程式を導出するための物理的考察である. 例えば, 流体力学的に厳密な方程式には音

¹² f の展開の 2 次の項 $f = f_0 + \beta y - \frac{1}{2} \delta y^2$, $\delta = \frac{2\Omega \sin \phi_0}{a^2}$ までを残した近似は, δ 曲面近似と呼ばれる [Yang, H., *Wave Packets and Their Bifurcations in Geophysical Fluid Dynamics*, Springer, 1990, 247pp.]

スケール	記号	特徴的大きさ
水平スケール	L	1000 km = 10^6 m
鉛直スケール	H	10 km = 10^4 m
水平風速のスケール	U	10 m s ⁻¹
鉛直風速のスケール	W	10^{-2} m s ⁻¹
時間スケール	T	1 day ~ 10^5 s
気圧の変動のスケール	δP	10^3 Pa
地表における密度	ρ	1 kg m ⁻³

表 9.2: 地球大気の大規模運動の代表的スケール

波のような地球流体現象を起こす素過程とはなりえない現象まで含まれている。スケール解析ではこのような現象を取り除き、方程式を簡単化していくのである。ただし、スケール解析で重要な点は、現象の観測がきちんと行われていて、注目したい現象の時間空間スケールが既知である必要がある。幸い、地球の大気海洋現象は長年にわたり広範囲な観測が行われてきたので、スケール解析を行うだけの情報が既に揃っている。それに対して、他惑星の大気を扱う場合には、観測が十分に行われていないのでスケール解析を行うだけの情報がないのが現状である。

演習問題 表 9.2 を参考にしてスケール解析を行い、地球大気の大規模運動に対しては、(9.8) において Coriolis 力項 $2\Omega \sin \phi v_\phi$ に比べて、曲率項と $2\Omega \cos \phi v_r$ が小さい事を確かめよ。同様に (9.9) において Coriolis 力項に比べて、曲率項が小さい事を確かめなさい。