

地衝流ジェットの非線形安定性

神戸大学大学院 自然科学研究科 末吉雅和 (Masakazu Sueyoshi)

神戸大学大学院 自然科学研究科 岩山隆寛 (Takahiro Iwayama)

Graduate School of Science and Technology, Kobe University

1 はじめに

Bickley ジェット (sech^2 型ジェット, 図 1) は境界層ジェットや大気や海洋のジェットのモデルとして用いられる. 実際に Gulf stream では Bickley ジェットに似た速度場が観測されている (Rossby & Zhang 2001). 2次元 Euler 方程式や 2次元 Navier-Stokes 方程式での Bickley ジェットの安定性は古くから調べられてきた (e.g. Drazin & Reid 2004). だが, これらの系は大気や海洋とは異なる点がある.

自由表面を持つ浅い流体層における地衝流に近い運動は Charney-Hasegawa-Mima (CHM) 方程式 (順圧準地衝流渦位方程式) (e.g. Pedlosky 1987)

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \partial(\psi, q) = 0, \quad q = \nabla^2 \psi - \lambda^2 \psi + \beta y, \quad (1)$$

によって記述される. ここで, $\psi(x, y, t)$ は流れ関数, q は渦位であり, $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$, $\partial(A, B) = A_x B_y - A_y B_x$, $\lambda = L/R_d$, L は現象の水平スケール, R_d は Rossby の変形半径である. 領域は平面であるが, βy の項によりコリオリパラメーターの緯度変化 (球面効果) を近似的に取り入れている. β は定数である.

変形半径 $R_d = \sqrt{gH}/2f$ であり, g は重力加速度, H は流体層の平均的な深さ, f は系の回転角速度である. R_d は系が一回転する間に水面波が伝わる距離を表す. したがって変形半径と同程度の水平スケールの運動では重力と回転の効果が同程度効く. また, 変形半径より大きいスケールの運動では回転の効果が, 変形半径より小さいスケールの運動では重力の効果が卓越する.

2次元 Euler 方程式 (Navier-Stokes 方程式でも) では回転をしていない ($f = 0$) ため変形半径が無限大である. 一方, 地球の大気や海洋では変形半径は有限である. 特に海洋では変形半径より水平スケールの大きい現象が存在する. このため大気や海洋のジェットの安定性の研究では有限の変形半径の影響を調べる必要がある. 2節では CHM 方程式での Bickley ジェットの安定性を調べる. また, 3節では Bickley ジェットに似た速度場の線形安定性を調べる.

2 Bickley ジェットの Liapunov 安定性

CHM 方程式の解として $\psi(x, y, t) = \Psi(y) + \tilde{\psi}(x, y, t)$ を考える. ここで $\Psi(y)$ は CHM 方程式の定常解であり $Q(y) = \Psi_{yy} - \lambda^2 \Psi + \beta y$ とすると $\partial(\Psi, Q) = 0$ を満たす. $\tilde{\psi}$ は

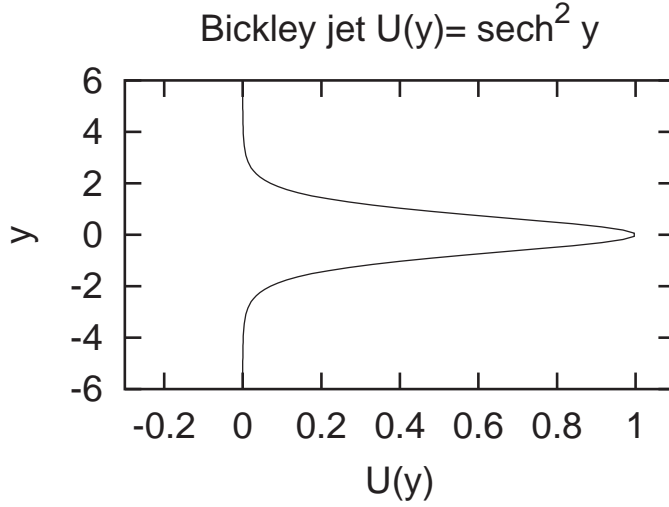


図 1: 速度場 $U(y) = \text{sech}^2 y$.

擾乱の流れ関数であり, $\tilde{q} = \nabla^2 \tilde{\psi} - \lambda^2 \tilde{\psi}$ とする. 定常解 Ψ が有限振幅の擾乱にたいして Liapunov の意味で安定である条件を得るには Hamilton 形式が役立つ (e.g. Holm *et al.* 1985). そこで 2.1 節では Hamilton 系の短い review を行う.

2.1 Hamilton 形式

ここでは Hamilton 系の一般論 (e.g. Morrison 1998) を簡単に紹介する. Euler 記述の流体の方程式は余分な変数 (例えば Clebsch potentials) を導入することなしに正準形式の Hamilton 形式で表すことはできないことが知られている.

$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ を系の従属変数とする. Hamilton 系は

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathbf{J} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{q}} \quad (2)$$

という形をとる. ここで t は時間, \mathbf{J} は行列, $\mathcal{H}[\mathbf{q}]$ は Hamiltonian と呼ばれる保存する汎関数である. $\delta \mathcal{H} / \delta \mathbf{q}$ は $\mathcal{H}[\mathbf{q}]$ の汎関数導関数であり,

$$\delta \mathcal{H}[\mathbf{q}; \delta \mathbf{q}] \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathcal{H}[\mathbf{q} + \varepsilon \delta \mathbf{q}] \equiv \int \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{q}} \right)^\top \delta \mathbf{q} \, dx \quad (3)$$

と定義される. $\delta \mathcal{H}[\mathbf{q}; \delta \mathbf{q}]$ は第一変分と呼ばれる. さらに任意の汎関数 $\mathcal{F}[\mathbf{q}]$, $\mathcal{G}[\mathbf{q}]$, $\mathcal{Q}[\mathbf{q}]$ に対して,

$$[\mathcal{F}, \mathcal{G}] \equiv \int \left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{q}} \right)^\top \mathbf{J} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{q}} \, dx \quad (4)$$

で定義される Poisson 括弧が

$$[\mathcal{F}, \mathcal{G}] = -[\mathcal{G}, \mathcal{F}], \quad (5)$$

$$[[\mathcal{F}, \mathcal{G}], \mathcal{Q}] + [[\mathcal{G}, \mathcal{Q}], \mathcal{F}] + [[\mathcal{Q}, \mathcal{F}], \mathcal{G}] = 0, \quad (6)$$

を満たす必要がある。(5), (6) はそれぞれ交代性, Jacobi の恒等式と呼ばれる。J が逆行列を持つなら系 (2) は正準形式である。一方, J が逆行列を持たないなら系 (2) は非正準形式と呼ばれる。非正準形式の Hamilton 系 (2) には

$$[\mathcal{F}, \mathcal{C}] = 0, \quad \forall \mathcal{F}[\mathbf{q}] \quad (7)$$

で定義される保存量 $\mathcal{C}[\mathbf{q}]$ が存在する。 $\mathcal{C}[\mathbf{q}]$ を Casimir と呼ぶ。(4) と (7) より, Casimir $\mathcal{C}[\mathbf{q}]$ は

$$\mathbf{J} \frac{\delta \mathcal{C}}{\delta \mathbf{q}} = 0 \quad (8)$$

を満たすことがわかる。J が逆行列を持つ, つまり系 (2) が正準形式ならば Casimir は定数となる。

2.2 CHM 方程式の Hamilton 構造

CHM 方程式は Hamilton 構造を持つことが知られている (Weinstein 1983; Swaters 2000)。それは

$$\frac{\partial q}{\partial t} = J \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q}, \quad \mathcal{H}[q] = \frac{1}{2} \iint_D \{ |\nabla \psi|^2 + \lambda^2 \psi^2 \} dx dy, \quad J(*) = -\partial(q, *) \quad (9)$$

である。ここで D は無限に広がった平面とする (適切な境界条件が課されているとする)。CHM 方程式の Casimir は

$$\mathcal{C}[q] = \iint_D \left\{ \int^q C(\xi) d\xi \right\} dx dy \quad (10)$$

である。 $C(\xi)$ は ξ の任意関数である。また x 方向の Impulse

$$\mathcal{M}[q] = \iint_D \{ y(q - y) \} dx dy \quad (11)$$

も保存量である。

2.3 Liapunov 関数

流体系での安定性の議論をする前に Liapunov 関数 (e.g. Hirsch & Smale 1974) について紹介する。議論を簡単にするため 2 次元の力学系 $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ を考え, その定常解を \mathbf{x}_0 とする (図 2)。もし $\dot{V} = dV/dt \leq 0$ であり, かつ $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ で $V(\mathbf{x})$ が極小値となるような関数 $V(\mathbf{x})$ (Liapunov 関数と呼ばれる) が存在したとすると, 定常解 \mathbf{x}_0 は安定である (e.g. Hirsch & Smale 1974)。

というのも, $\nabla V = (\partial V/\partial x, \partial V/\partial y)$ とすると $\dot{V} = \nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} \leq 0$ であるから, ∇V と $\dot{\mathbf{x}}$ がなす角度は 90 度以上となる (図 2)。したがって, $\dot{\mathbf{x}}$ は V の等値線上で常に内向き (\mathbf{x}_0 のほうを向く) となり, \mathbf{x} は \mathbf{x}_0 から遠ざかることはない (V は \mathbf{x}_0 で極小値なので, ∇V は V の等値線に直交し, 外向き)。ただし, Liapunov 関数を構築する一般論はない。

また $\dot{V} = 0$ (V は保存量) ならば V が極大値となる定常解も安定である。というのも, このとき ∇V と $\dot{\mathbf{x}}$ は直交するので, $\dot{\mathbf{x}}$ は常に V の等値線に平行となるからである。

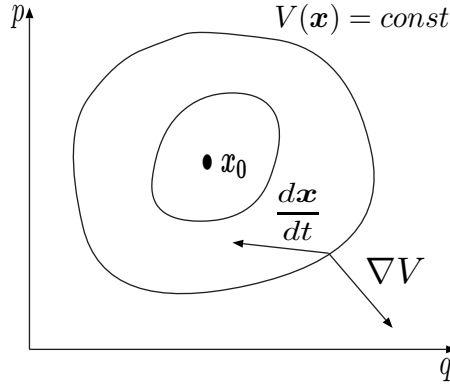


図 2: 2次元の力学系. $\dot{V} = dV/dt \leq 0$ であり, かつ $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ で $V(\mathbf{x})$ は極小値となる.

2.4 CHM方程式の定常解の安定性

有限の領域で CHM 方程式の定常解が Liapunov の意味で安定である条件は Swaters (2000) にあるが, 後の議論のためにここで紹介する (ここでは無限の平面の場合である). 2.3 節より, Liapunov 関数の自然な候補として Hamiltonian が考えられる. しかし, CHM 系では $\delta\mathcal{H}[\Psi] = 0$ を満たす定常解は $\Psi = 0$ という自明なものしかなく (非正準形式の Hamilton 系では \mathbf{J} が逆行列を持たないことが原因. 例えば Salmon 1998; Morrison 1998), 我々の目的には不適合である. 流体系では Hamiltonian と Casimir を組合せた量を用いて定常解が安定である条件を得られる (Arnold 1966, Holm *et al.* 1985). ここでは, Impulse と Casimir を用いる (e.g. Shepherd 1990). CHM 方程式の定常解が Liapunov の意味で安定である条件を得るために, 以下の量を構築する:

$$\mathcal{P}[q] = \mathcal{C}[q] - \mathcal{M}[q] = \iint_D \left\{ \int^q C(\xi) d\xi - y(q - y) \right\} dx dy. \quad (12)$$

この第一変分は

$$\delta\mathcal{P}[q] = \iint_D \{C(q) - y\} \delta q dx dy \quad (13)$$

である. $\delta\mathcal{P}[\Psi] = 0$ とすると $C(Q) = y$ を得る. ここからは Casimir の C を Y に置き換える. Y は $Q(y)$ の逆関数である (すなわち $Y(Q) = y$). ここで $\mathcal{P}_N \equiv \mathcal{P}[q] - \mathcal{P}[Q]$ を計算する:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N &= \iint_D \left\{ \int_Q^q Y(\xi) d\xi - y\tilde{q} \right\} dx dy = \iint_D \left\{ \int_0^{\tilde{q}} \{Y(Q + \xi) - Y(Q)\} d\xi \right\} dx dy \\ &= \iint_D \left\{ \int_0^{\tilde{q}} \left\{ \int_Q^{Q+\xi} Y'(w) dw \right\} d\xi \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (14)$$

ここで a_1, a_2 を実数として

$$0 < a_1 \leq Y' \leq a_2 < \infty \quad (15)$$

を仮定すると, (14) より

$$\begin{aligned} 0 < \iint_D \left\{ \int_0^{\bar{q}} \left\{ \int_Q^{Q+\xi} a_1 dw \right\} d\xi \right\} dx dy &= \iint_D \left\{ \int_0^{\bar{q}} a_1 \xi d\xi \right\} dx dy \\ &= \frac{1}{2} a_1 \|q\|^2 \leq \mathcal{P}_N \leq \frac{1}{2} a_2 \|q\|^2, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\|q\|^2 \equiv \iint_D \tilde{q}^2 dx dy \quad (17)$$

を得る. すなわち \mathcal{P}_N (擬運動量と呼ばれる. e.g. Shepherd 1990) は正定値である. \mathcal{P}_N が保存量 (Casimir と Impulse が保存量なので) であることと, (16) より

$$0 < a_1 \|q(t)\|^2 \leq 2\mathcal{P}_N(t) = 2\mathcal{P}_N(0) \leq a_2 \|q(0)\|^2 \quad (18)$$

を得る. これより

$$\|q(t)\| \leq \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{1/2} \|q(0)\| \quad (19)$$

であるから, (15) が成り立つならば初期の擾乱を小さくすることで, その後の擾乱のノルムをいくらでも小さくすることが可能である. 正確には, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\|q(0)\| < \delta \Rightarrow \|q(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t > 0 \quad (20)$$

が成り立つような $\delta > 0$ が存在する ($\delta = \varepsilon(a_1/a_2)^{1/2}$ ととるとよい). したがって, (15) が成り立つならば定常解 Ψ はノルム (17) について Liapunov の意味で安定である (有限振幅の擾乱にたいして成り立つ).

(15) のかわりに

$$-\infty < b_1 \leq Y' \leq b_2 < 0 \quad (21)$$

を仮定する (b_1, b_2 は実数) と,

$$\|q(t)\| \leq \left(\frac{b_1}{b_2} \right)^{1/2} \|q(0)\| \quad (22)$$

が成り立つ (\mathcal{P}_N は負定値). したがって (15) または (21) が成り立つならば定常解 Ψ はノルム (17) について Liapunov の意味で安定である (有限振幅の擾乱にたいして成り立つ).

2.5 Bickley ジェットの安定性

これより Bickley ジェット

$$U(y) = -\Psi_y = \operatorname{sech}^2 y \quad (23)$$

の安定性を議論する. $U(y)$ は定常な x 方向の速度である. (1) で $\beta = 0.20$ とする. (23)

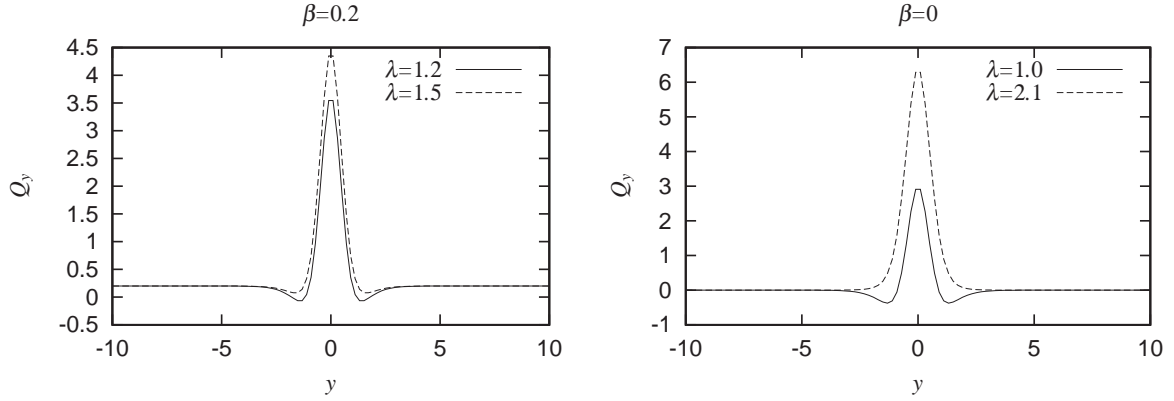


図 3: 左: $\beta = 0.2$, $\lambda = 1.2, 1.5$ での Q_y . 右: $\beta = 0$, $\lambda = 1.0, 2.1$ での Q_y .

に対応する渦位の勾配は

$$Q_y(y) = \operatorname{sech}^2 y (-4 \tanh^2 y + 2 \operatorname{sech}^2 y + \lambda^2) + \beta \quad (24)$$

である. これより $\lambda_c \approx 1.345 \leq \lambda$ の場合には $Q_y > 0$ となり (図 3), $Y(Q)$ は Q の一価関数かつ $Y' > 0$ である. また, この場合 $\max\{Q_y\} < \infty$ (つまり $\max\{Q_y\}$ は有限), $\min\{Q_y\} > 0$ となることと $Q_y^{-1} = Y'$ から, $\min\{Y'\} > 0$, $\max\{Y'\} < \infty$ (つまり (15) で $a_1 > 0$ かつ $a_2 < \infty$) である. したがって $\lambda_c \approx 1.345 \leq \lambda$ ならば不等式 (15) が満たされるので, 有限振幅の擾乱に対して Bickley ジェットは Liapunov の意味で安定である ((19) の右辺は有限である). 一方 $0 \leq \lambda < \lambda_c$ ならば (15) と (21) のどちらも満たされないので, Bickley ジェットは不安定の必要条件を満たす.

$0 \leq \lambda < \lambda_c$ は変形半径がより大きい場合, $\lambda_c \approx 1.345 \leq \lambda$ は変形半径が小さい場合である. この結果について 3 節で物理的解釈を試みる.

ここでひとつ注意を述べる. β が 0 の場合に Bickley ジェットについて

$$Q_y(y) = \operatorname{sech}^2 y (-4 \tanh^2 y + 2 \operatorname{sech}^2 y + \lambda^2) \quad (25)$$

となり, $y \rightarrow \pm\infty$ で $Q_y \rightarrow 0$ である (図 3). したがって (19) で $a_2 \rightarrow \infty$ となり右辺が発散するので, この場合は不等式 (19) は有効ではない. したがって無限の平面では, β が 0 の場合に擬運動量を利用して安定な解を見つけることはできない (e.g. Shepherd 1988).

3 線形安定性

2.5 節の結果は, 変形半径が小さくなると Bickley ジェットが安定となることを示している. この物理的解釈を試みる. この節では $\beta = 0$ とする. CHM 方程式は

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \iint K_0(\lambda|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \partial(\psi(\mathbf{x}'), q(\mathbf{x}')) d\mathbf{x}' \quad (26)$$

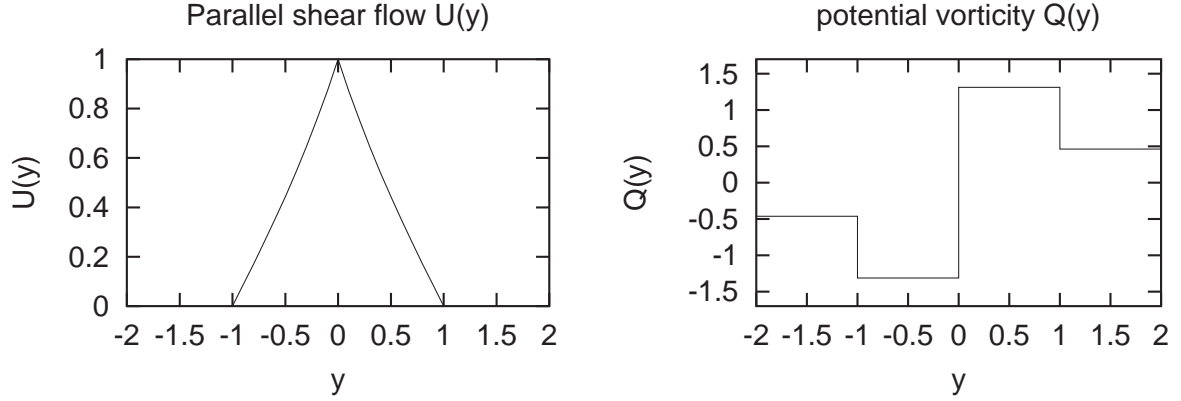


図 4: 左: $\lambda = 1.0$ での (27). 右: $\lambda = 1.0$ での (29).

と書きかえることができる (Watanabe *et al.* 1997). 0 次の第二種変形 Bessel 関数 $K_0(z)$ は z について単調減少であり, $z \rightarrow \infty$ で $K_0(z) \rightarrow \exp(-z)$ であるから, (26) より λ が大きくなる (変形半径が小さくなる) と系の相互作用が局所的になる.

考えやすくするため, Bickley ジェットよく似た以下の速度場 (図 4) を取り扱う:

$$U(y) = \begin{cases} 0 & (-\infty < y \leq -1) \\ -A_1 \lambda e^{\lambda y} + A_2 \lambda e^{-\lambda y} & (-1 \leq y \leq 0) \\ -A_2 \lambda e^{\lambda y} + A_1 \lambda e^{-\lambda y} & (0 \leq y \leq 1) \\ 0 & (1 \leq y < \infty) \end{cases} \quad (27)$$

ここで $A_1 = e^{2\lambda} A_2$, $A_2 = \{\lambda(-e^{2\lambda} + 1)\}^{-1}$ である. $\lambda > 0$ に対してこの速度場は $U(0) = 1$, $U(y) = U(-y)$ であり, $-1 \leq y \leq 0$ で $U(y)$ は単調増大である. (27) にともなう流れ関数と渦位は

$$\Psi(y) = \begin{cases} -\lambda^{-2} Q_1 & (-\infty < y \leq -1) \\ A_1 e^{\lambda y} + A_2 e^{-\lambda y} - \lambda^{-2} Q_2 & (-1 \leq y \leq 0) \\ -A_2 e^{\lambda y} - A_1 e^{-\lambda y} - \lambda^{-2} Q_3 & (0 \leq y \leq 1) \\ -\lambda^{-2} Q_4 & (1 \leq y < \infty) \end{cases} \quad (28)$$

であり,

$$Q(y) = \begin{cases} Q_1 & (-\infty < y \leq -1) \\ Q_2 & (-1 \leq y \leq 0) \\ Q_3 & (0 \leq y \leq 1) \\ Q_4 & (1 \leq y < \infty) \end{cases} \quad (29)$$

ここで Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 は定数 (図 4) である.

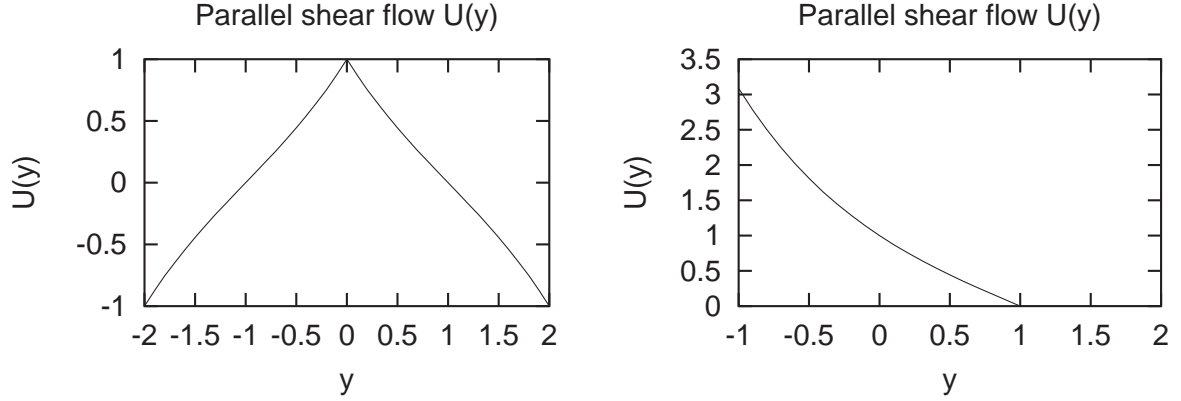


図 5: 左: $\lambda = 1.0$ での (30). 右: $\lambda = 1.0$ での (31).

この速度場 (27) の線形安定性を調べると, 不安定となることがわかる (後に示す). (27) では $y = 0, \pm 1$ にのみ渦位の勾配 Q_y が存在する. ここで $y = 0$ にのみ渦位勾配が存在する (27) の部分系

$$U(y) = \begin{cases} -A_1 \lambda e^{\lambda y} + A_2 \lambda e^{-\lambda y} & (-\infty < y \leq 0) \\ -A_2 \lambda e^{\lambda y} + A_1 \lambda e^{-\lambda y} & (0 \leq y < \infty) \end{cases} \quad (30)$$

と, $y = 1$ にのみ渦位勾配が存在する (27) の部分系

$$U(y) = \begin{cases} -A_2 \lambda e^{\lambda y} + A_1 \lambda e^{-\lambda y} & (y \leq 1) \\ 0 & (1 \leq y < \infty) \end{cases} \quad (31)$$

を考える (図 5). (30) と (31) はともに安定である. なぜなら, CHM 方程式に対する Rayleigh の定理 (Q_y が符号を変えないなら基本場は normal mode な擾乱に対して線形安定) を満たすからである (実際に計算しても証明できる). (30) と (31) はともに安定であり, (27) が不安定であることから, 渦位の不連続面を伝わる波が相互作用することで不安定が起こると予想できる. 実際, 流体力学的不安定は中立波の共鳴で解釈できる場合がある (Cairns 1979; Hayashi & Young 1987; Sakai 1989; Iga 1993).

変形半径が小さくなると, 波同士が相互作用しにくくなり, 流れが安定になると予想できる. これを詳しく調べるため, 以下では (27) の線形安定性解析を行なう.

擾乱 $\tilde{\psi}$ は微小であると仮定する. $\psi = \Psi + \tilde{\psi}$ を (1) に代入して擾乱の 2 次の項を無視する:

$$\tilde{q}_t - \Psi_y \tilde{q}_x + \tilde{\psi}_x Q_y = 0. \quad (32)$$

$\tilde{\psi} = \hat{\psi}(y) \exp[ik(x - ct)]$ と仮定すると (32) は

$$(U - c)\{\hat{\psi}_{yy} + (-k^2 - \lambda^2)\hat{\psi}\} + Q_y \hat{\psi} = 0 \quad (33)$$

となる. 基本場 (27) は各領域内で $Q_y = 0$ なので (33) は

$$\hat{\psi}_{yy} + (-k^2 - \lambda^2)\hat{\psi} = 0 \quad (34)$$

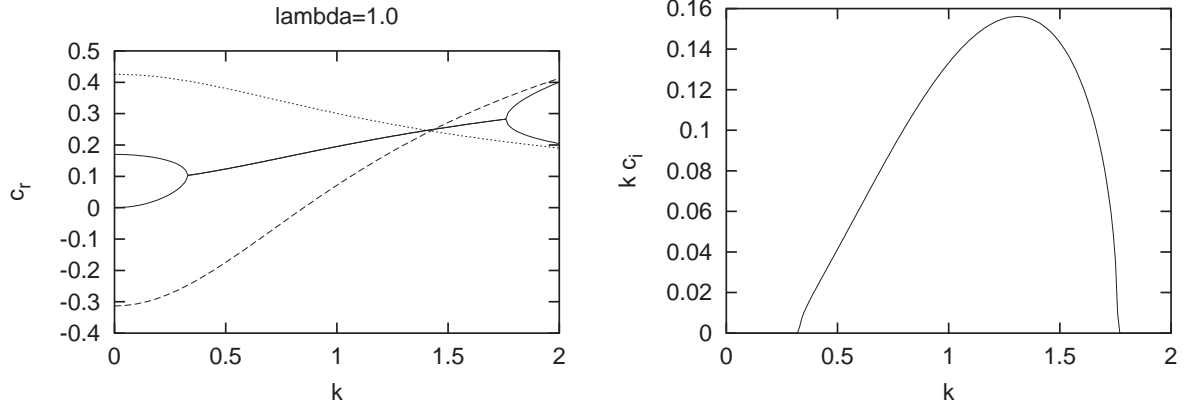


図 6: 左: $\lambda = 1.0$ での分散曲線 (実線). 右: 擾乱の成長率. 破線, 点線はそれぞれ部分系 (30), (31) の分散曲線.

となる. 境界条件を $z \rightarrow \pm\infty$ で $\hat{\psi} \rightarrow 0$ とすると (34) の解は

$$\hat{\psi}(y) = \begin{cases} B_1 e^{\alpha y} & (-\infty < y \leq -1) \\ B_2 e^{\alpha y} + B_3 e^{-\alpha y} & (-1 \leq y \leq 0) \\ B_4 e^{\alpha y} + B_5 e^{-\alpha y} & (0 \leq y \leq 1) \\ B_6 e^{-\alpha y} & (1 \leq y < \infty) \end{cases} \quad (35)$$

となる. ここで $\alpha = \sqrt{\lambda^2 + k^2}$ であり, B_1 から B_6 は定数である. $\hat{\psi}$ が渦位の不連続面 $y = 0, \pm 1$ で連続であるとする (35) より

$$B_1 e^{-\alpha} = B_2 e^{-\alpha} + B_3 e^{\alpha}, \quad B_2 + B_3 = B_4 + B_5, \quad B_4 e^{\alpha} + B_5 e^{-\alpha} = B_6 e^{-\alpha} \quad (36)$$

が得られる. また, (33) の y 微分を差分でおきかえると

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (U - c) \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} \left[\hat{\psi}_y \right]_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} + (-k^2 - \alpha^2) \hat{\psi} \right\} + \hat{\psi} \frac{1}{2\varepsilon} \left[Q \right]_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} = 0 \quad \text{at } y = 0, \pm 1 \quad (37)$$

となるから

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (U - c) \left[\hat{\psi}_y \right]_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} + \hat{\psi} \left[Q \right]_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} = 0 \quad \text{at } y = 0, \pm 1 \quad (38)$$

を得る. これに (35) を代入すると

$$\begin{aligned} \alpha(B_2 e^{-\alpha} - B_3 e^{\alpha} - B_1 e^{-\alpha}) - \frac{D_1 B_1 e^{-\alpha}}{c} &= 0, \\ \alpha(B_4 - B_5 - B_2 + B_3) + \frac{D_2(B_2 + B_3)}{U_0 - c} &= 0, \\ \alpha(-B_6 e^{-\alpha} - B_4 e^{\alpha} + B_5 e^{-\alpha}) - \frac{D_1 B_6 e^{-\alpha}}{c} &= 0, \end{aligned} \quad (39)$$

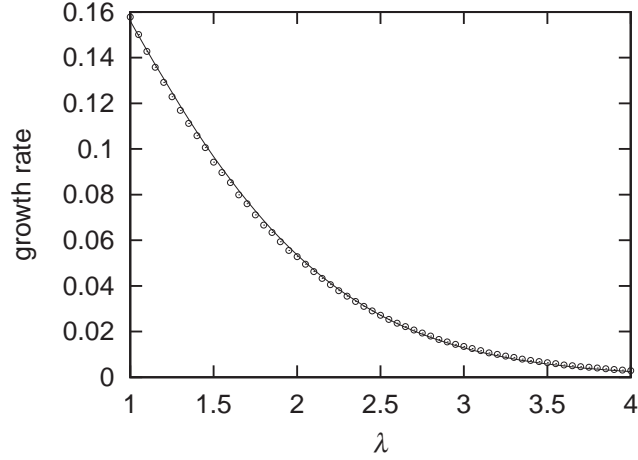


図 7: 擾乱の最大成長率 (実線). 丸印は $0.25k_m^2 \exp(-\lambda)$ を表わす. ここで k_m は擾乱が最大成長するときの波数.

となる. ここで $U_0 = U(0)$, $D_1 = Q_2 - Q_1 = Q_4 - Q_3$, $D_2 = Q_3 - Q_2$ である. (36) と (39) より, 自明でない解が存在する場合は

$$E_1 c^2 + E_2 c + E_3 = 0, \quad E_1 = \frac{-4\alpha^2}{D_1}, \quad E_2 = 2\alpha(-1 - e^{-2\alpha} + \frac{2\alpha U_0}{D_1} - \frac{D_2}{D_1}), \quad (40)$$

$$E_3 = 2\alpha U_0(1 + e^{-2\alpha}) + D_2(-1 + e^{-2\alpha}) \quad (41)$$

を得る. 固有値 c はこの式を解くと得られる. c が実数なら流れは中立安定である. 一方 $\text{Im}\{c\} > 0$ なら擾乱は発達する (流れは不安定である).

図 6 は $\lambda = 1.0$ の場合の分散曲線と擾乱の成長率である. 不安定が起っていることがわかる. ここで結果を波の共鳴理論 (Cairns 1979) によって解釈する. (27) を例にとって説明すると, 渦位の不連続面である $y = 0$ と $y = 1$ を伝わる 2 つの波の波長が同程度であり, Doppler shift した波の速度が同程度であれば 2 つの波は共鳴する. 共鳴しているかを調べる具体的な手続きは, $y = 0$ にのみ渦位勾配が存在する部分系と, $y = 1$ にのみ渦位勾配が存在する部分系 (図 5) をつくり, それらの分散曲線を描く. 2 つの分散曲線が交わったところで波は共鳴している.

部分系 (30) と (31) の分散関係式はそれぞれ

$$c = U_0 - \frac{D_2}{2\alpha}, \quad c = -\frac{D_1}{2\alpha} \quad (42)$$

である. 部分系の分散曲線を描くと, 擾乱が最大成長するのは 2 つの中立波が共鳴する (図 6 で 2 つの部分系の分散曲線が交わる) ときであることがわかった. このことは $\lambda = 1.0 \sim 4.0$ でも同様であった. そこで最大成長率を図 7 に示す. λ が大きく (変形半径が小さく) になると最大成長率は小さくなっている. これは, 擾乱の最大成長は波の共鳴により起こるが, λ が大きくなると波同士が相互作用しにくくなる (系の相互作用距

離が短くなるため) ので, 成長率が小さくなるのである. また, 図 7 にあるように, 最大成長率は $0.25k_m^2 \exp(-\lambda)$ の曲線 (k_m は最大成長する波数) とほぼ一致する.

4 まとめ

2 節では CHM 方程式での Bickley ジェットの, 有限振幅の擾乱に対する Liapunov 安定性を調べた. 変形半径が小さくなるとジェットは Liapunov の意味で安定となった. この結果を物理的に解釈するため, 3 節では Bickley ジェットに似た速度場の線形安定性を調べた. 擾乱が最大成長するのは波が共鳴したときであった. その最大成長率は $k_m^2 \exp(-\lambda)$ に比例した. この値は λ が大きく (変形半径が小さく) なるると減少する. その理由は変形半径が小さくなると系の相互作用が局所的となり, 波同士が相互作用しにくくなるからである. 最大成長率は $k_m^2 \exp(-\lambda)$ に比例することを説明することは今後の課題である.

謝辞

本研究は文部科学省 21 世紀 COE プログラム「惑星系の起源と進化」の援助を受けている.

参考文献

- Arnol'd V. I. 1966 On an a priori estimate in the theory of hydrodynamical stability. *Izv. Uchebn. Zaved. Mat.* **54**, no.5, 3–5. (English transl.: *Am. Math. Soc. Transl., Ser.2* **79** 267-269 (1969))
- Cairns, R. A. 1979 The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows. *J. Fluid Mech.* **92**, 1–14.
- Drazin, P. G. & Reid, W. H. 2004 *Hydrodynamic Stability*. 2nd ed. Cambridge University Press.
- Hayashi, Y.-Y. & Young, W. R. 1987 Stable and unstable shear modes of rotating parallel flows in shallow water. *J. Fluid Mech.* **184**, 477–504.
- Hirsch, M. & Smale, S. 1974 *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press.
- Holm, D. D., Marsden, J. E., Ratiu, T. & Weinstein, A. 1985 Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria. *Phys. Rep.* **123**, 1–116.
- Iga, K. 1993 Reconsideration of Orlandi's instability theory of frontal waves. *J. Fluid Mech.* **255**, 213–236.
- Morrison, P. J. 1998 Hamiltonian description of the ideal fluid. *Rev. Mod. Phys.* **70**, 467–521.
- Pedlosky J. 1987 *Geophysical Fluid Dynamics*. 2nd ed. Springer-Verlag.

- Rossby, T. & Zhang, H. M. 2001 The near-surface velocity and potential vorticity structure of the Gulf Stream. *J. Marine Res.* **59**, 949–975.
- Sakai, S. 1989 Rossby-Kelvin instability: a new type of ageostrophic instability caused by a resonance between Rossby waves and gravity waves. *J. Fluid Mech.* **202**, 149–176.
- Salmon, R. 1998 *Lectures on Geophysical Fluid Dynamics*. Oxford University Press.
- Shepherd, T. G. 1988 Rigorous bounds on the nonlinear saturation of instabilities to parallel shear flows. *J. Fluid Mech.* **184**, 289–302.
- Shepherd, T. G. 1990 Symmetries, conservation laws, and Hamiltonian structure in geophysical fluid dynamics. *Adv. Geophys.* **32**, 287–338.
- Swaters, G. E. 2000 *Introduction to Hamiltonian Fluid Dynamics and Stability Theory*. CHAPMAN & HALL/CRC, Florida.
- Watanabe, T., Fujisaka, H. & Iwayama, T. 1997 Dynamical scaling law in the development of drift wave turbulence. *Phys. Rev. E* **55**, 5575–5580.
- Weinstein, A. 1983 Hamiltonian structure for drift waves and geostrophic flow. *Phys. Fluids* **26**, 388–390.