

2次元乱流系における秩序構造形成と動的スケージング則

渡邊 威

〈九州大学理学部物理学科 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1 e-mail: nabe3scp@mbox.nc.kyushu-u.ac.jp〉

岩山隆寛

〈九州工業大学情報工学部制御システム工学科 820-8502 飯塚市大字川津 680-4 e-mail: iwayama@ces.kyutech.ac.jp〉

藤坂博一

〈九州大学理学部物理学科 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1 e-mail: fuji3scp@mbox.nc.kyushu-u.ac.jp〉

岡本壽夫

〈高知大学理学部情報科学科 780-8520 高知市曙町 2-5-1 e-mail: okamoto@is.kochi-u.ac.jp〉

2次元系の乱流現象は、3次元乱流に比べ独特の乱流特性を持ち、非線形非平衡系に特有な物理現象を豊富に含んでいる。特に近年の計算機の飛躍的な発達とソフトウェアの開発が、高解像度の乱流の数値計算とその計算結果の視覚化を可能にしたことに伴って、実空間における秩序構造 (coherent structure) の存在が注目されるようになった。本稿では2次元乱流系に見られる渦度場の構造形成に注目し、形成過程における統計的性質 (動的スケージング則) を紹介する。また、物性物理学の秩序形成の研究との接点の可能性について触れたい。

1. はじめに

自然界には多種多様なパターンや規則的な模様など数多くの秩序構造の例が見受けられ、我々の目を楽しませてくれるばかりでなく、自然の多様さと奥深さを感じとることができる。これらの構造を生み出す自己組織化は、典型的な非線形非平衡系現象と見ることができる。物理学で扱う分野に限ってみれば、磁性体のスピン系に見られる磁区構造や、熱対流系における対流胞の六角格子構造やロール構造、反応拡散系や液晶系におけるスパイラルパターンやターゲットパターンなど数多くの秩序構造が見られ、散逸構造の一例としてそれぞれの分野で活発に研究がなされている。また、流体系に目を向ければ、一様流中におかれた物体の後方にできる Kármán 渦列が有名である。これは Reynolds 数 Re が中程度の流れの中で見られる構造形成の例であり、 Re を大きくしていくとやがて渦列は壊れていき、乱流状態になる。乱流現象は我々の日常生活において見られる身近な自然現象であるが、乱流には何か秩序だった構造とか法則は見られないのだろうか？

近年の計算機の飛躍的な発達によって、シミュレーションで実際の流れに近い状態が再現できるようになり、乱流中でおこっている現象のさまざまな特性を直接、精度よく観測できるようになった。その結果、十分発達した ($Re \gg 1$) 乱流中においても、ある種の秩序構造が存在することが知られるようになった。例えば、非圧縮性流体の Navier-Stokes (NS) 方程式に従う3次元一様等方乱流場においては、渦層や渦管といった大きな渦度を持つ領域が空間的に局在しており、かつ比較的長時間存在することが知られている。乱流場におけるこのような秩序構造の存在は、乱れの強い領域と弱い領域が混在することを示している。このことはスケールに関係なく乱れの分布が空間的に一様であると仮定する Kolmogorov のスケージング理論¹⁾と相反するものと考えられ、さらに良く知られている乱流の重要な統

計法則であるエネルギースペクトルの普遍則、 $E(k) \sim k^{-5/3}$ からのずれの可能性を示唆している。この問題は今日では乱流における間欠性の問題としてとらえられている。²⁾

一方で、2次元系の乱流現象は大規模な地球流体力学的流れへの応用や、強い一様磁場中の電磁流体 (プラズマ) の運動の基礎的研究において重要であるばかりでなく、それ自身が持つ独特な乱流特性 (エネルギーとエンストロフィーの二重カスケード過程) のために、非線形非平衡系の物理現象として大変に興味深い研究対象となっている。³⁾ 特にエネルギーが大きなスケールに流れていく逆カスケード過程は、2次元乱流が3次元乱流と大きく異なる点の一つであり、このためにエネルギーは空間的に大きな渦へと集中していく。この過程は2次元乱流場で見られる秩序構造の形成と密接につながっている。

本稿では2次元乱流系における秩序構造形成の例を紹介し、構造の形成過程における統計的性質やスケージング則、また秩序化のダイナミクスについての最近の研究を、著者らの研究を中心に紹介する。

2. 2次元減衰性乱流

2.1 秩序渦

1980年代に入って盛んに行なわれるようになった乱流の直接数値計算の研究を通して、実空間における秩序構造の存在は多くの研究者の興味と関心を集め、またこれまでの研究において考えられてきた乱流像を大きく塗り替えることになった。特に2次元減衰性乱流においては、2次元乱流が実空間で示す複雑で多様な渦の特性を浮き彫りにすることになった。ここでいう2次元減衰性乱流とは、2次元 NS 方程式から導かれる渦度方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = \nu \nabla^2 \omega \quad (1)$$

に従い、周期境界条件の下にある領域内の2次元非圧縮性

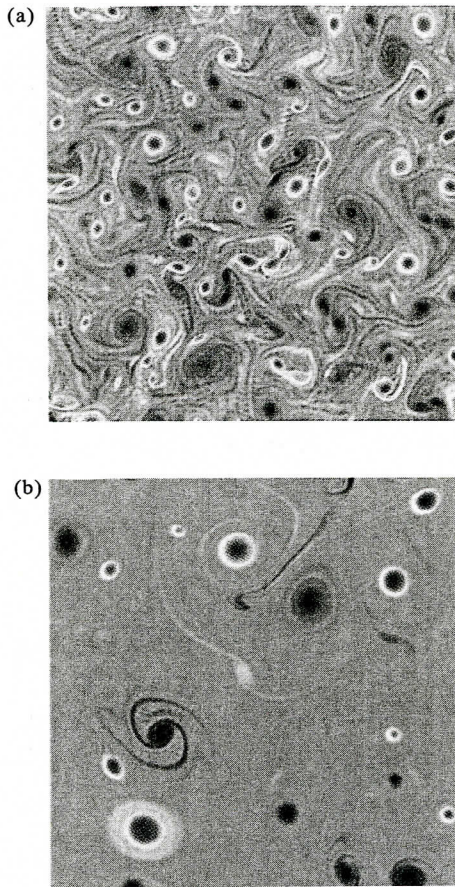


図1 2次元減衰性乱流の渦度場 ω の時間発展の様子. それぞれ(a) $t=10$, (b) $t=50$ の時刻に対するものである. 青の領域は正の渦度($\omega > 0$)を表し, 黒の領域は負の渦度($\omega < 0$)を表す.

流体がランダムな初期条件の下に自由減衰する過程のことである. ここで $J(a, b) = a_x b_y - a_y b_x$ はヤコビアン, ν は動粘性係数である. また $\omega(r, t) = \partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y$ は $r = (x, y)$ での渦度を表し, 流線関数 $\phi(r, t)$ との間には Poisson 方程式 $\omega = \nabla^2 \phi$ の関係がある. ところで (1) は $\nu \rightarrow 0$ の極限で全運動エネルギー E と全エントロフィー Z ,

$$E = -\int \frac{1}{2} \phi \omega \, dr, \quad Z = \int \frac{1}{2} \omega^2 \, dr \quad (2)$$

を保存する. この二つの保存量が波数空間を一定な輸送率で流れていくとする Kolmogorov 流のスケーリング理論から, 二つの慣性領域を持つエネルギースペクトルの漸近形は, エネルギー逆カスケード領域で $E(k) \sim k^{-5/3}$, エントロフィーカスケード領域で $E(k) \sim k^{-3}$ となることが知られている.⁴⁾ これは2次元乱流が波数空間で示す重要な統計的性質である.

実空間における2次元減衰性乱流の重要な性質は, 1984年に McWilliams が行なった (1) の直接数値計算によって明らかにされた.⁵⁾ それは初期条件としてランダムな渦度場を選んでも, 自由減衰する乱流場において孤立した軸対

称な渦が自己組織化し, 比較的長い時間にわたって安定に存在し, 乱流場を激しく動き回るといったものであった. その一例を図1に示す. これらの渦は秩序渦 (coherent vortices) と呼ばれ, 今日まで多くの研究者によって秩序渦の発生機構とその集団運動について調べられてきた. その結果, 秩序渦集団の時間発展は次の三つのステージに分類されることがわかっている.⁶⁾ 第一ステージでは, 系はランダムな渦度場から秩序渦の集団に向けて自己組織化をおこす. 第二ステージでは秩序渦集団が系のダイナミクスを支配する. 渦がお互いにある程度離れている時は, 2次元渦糸系のハミルトニアン動力学によって近似的に記述される相互移流を引き起こす. さらに, 循環が同符号の渦同士が臨界距離以内に近づくと合併し, より大きな渦へと発展していく. 最終的には異符号の循環を持つ渦の一組のペアが双極子構造を形成し, 最後のステージではこの双極子構造が拡散的に減衰する. この空間的に局在した秩序渦の存在は, 従来議論されてきた2次元乱流の統計理論に大きな影響を与えると考えられている.

このように, 2次元減衰性乱流における秩序渦の運動は, 決定論的な現象であるにもかかわらず, 非常に複雑で多様なものであり, 秩序構造形成の観点からも2次元乱流のおもしろさと奥深さを感じさせるものである.

2.2 秩序渦集団のスケーリング理論

2次元減衰性乱流において秩序渦集団の時間発展は三つのステージに分類されることが明らかにされたが, 最近, 第二ステージを支配する秩序渦集団に対して新しい統計理論が提唱されている.⁷⁾ それを以下に概観しよう.

第二ステージでは, 秩序渦集団に関連した諸量や流れ場の空間平均モーメントが代数的に時間発展する. このステージでは秩序渦集団が系の動力学を支配していることから, 渦の総数 N , 渦の平均半径 R_a , 渦の中心における渦度の値の平均値 ω_a を用いて, 全運動エネルギー E と全エントロフィー Z を次元解析的に次のように表現する.

$$E \sim N \omega_a^2 R_a^4, \quad Z \sim N \omega_a^3 R_a^2. \quad (3)$$

ここで E と ω_a は高 Reynolds 数の極限で系の保存量であることを考慮して, さらに渦の個数が相互移流と合併を通して時間 t のべき則

$$N(t) \sim t^{-\xi} \quad (4)$$

に従って減衰していくと考えるならば,

$$R_a(t) \sim t^{\xi/4}, \quad Z(t) \sim t^{-\xi/2} \quad (5)$$

となり, 渦間平均距離 l_a と一つの渦の平均循環 Γ_a は,

$$l_a \sim 1/\sqrt{N} \sim t^{\xi/2}, \quad \Gamma_a \sim \omega_a R_a^2 \sim t^{\xi/2} \quad (6)$$

を得る. つまり秩序渦の諸量の動的スケーリング則は, 一つの独立なスケーリング指数 ξ で特徴づけられる. これらのスケーリング則は (1) の直接数値計算や, 点渦の合併過程を取り入れた修正渦糸モデルの数値計算で実際に確かめ

られており、スケーリング指数の値として $\xi=0.7\sim 0.75$ が得られている。⁷⁾ また電解質溶液を用いて2次元な渦流れを実現した室内実験や、⁸⁾ 一様で強い磁場に垂直な面内における $E\times B$ ドリフトにより運動する非中性プラズマの静電ポテンシャルの揺らぎの時間発展が2次元 Euler 方程式と同じ式で表せることから、これを利用した減衰乱流の実験等⁹⁾が盛んに行なわれている。これらはスケーリング理論を支持する結果もあるが、数値実験と比べて保存量の保存性が悪いと、確定的な結果は得られていないようである。

秩序渦の諸量を用いて表現されるスケーリング理論は、高 Reynolds 数の極限において全運動エネルギーの他に、渦の中心における渦度の平均値 ω_a が保存されるとしている。これは以下の理由で説明される。非粘性流体では流体の流れに沿って渦度が保存されるので、相互移流の間は ω_a は保存される。一方、渦が合併する過程では渦の周辺は侵食されるが、渦の中心はそのような侵食に対し孤立しているため、合併過程においても ω_a は保存されるのである。

このスケーリング理論が成功した要因は、保存量 E の表式(3)にある。この右辺は全運動エネルギーではなく、エネルギー密度 $-\omega\phi/2$ を秩序渦の領域にわたって積分した量である。これを渦糸系のハミルトニアンと比較することで、 $-\omega\phi/2$ の積分は秩序渦集団系のハミルトニアンであり、系の保存量となっていることが理論的、数値的に示されている。¹⁰⁾ またスケーリング指数 ξ の値は $\xi=0.7\sim 0.75$ の値をとることが示されているが、理論的な ξ の導出は今だに未解決の問題である。 ξ の導出の一つとして次のような現象論が提唱されている。時間発展に伴い渦の混合が十分に起こり、系の流れが等方的になると、渦のハミルトン動力的移流速度 $u_a\sim H/\Gamma_a l_a$ が渦間距離の相対速度 l_a/t に等しいと考えられるであろう。このとき(4)、(5)、(6)のスケーリング則を使うと $\xi=2/3$ という値が得られる。¹¹⁾

3. ドリフト Rossby 波乱流

3.1 モデル方程式

2次元系の乱流現象を示す一つの例として、ここではドリフト Rossby 波乱流のモデル方程式として知られている Charney-長谷川-三間 (CHM) 方程式^{12,13)}

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2\phi - \lambda^2\phi) + J(\phi, \nabla^2\phi) = \nu\nabla^2(\nabla^2\phi) \quad (7)$$

に従う2次元乱流を考察しよう。 $\phi(r, t)$ はプラズマ中の静電ポテンシャルまたは地衡流流れ関数を表し、 λ はある

* CHM 方程式には、プラズマ系の場合にはイオン密度の空間的非一様性、地球流体力学的系の場合には惑星の回転角速度の緯度変化を起源とする波の効果を表す項(β 項と呼ばれる)が本来含まれている。しかし、本稿ではこれは考えないことにする。また本稿では系の散逸を考慮して、右辺に散逸項を付け加えている。

空間スケール(システムサイズ)とイオン Larmor 半径または大気中の Rossby 半径との比を表す。 $q = \nabla^2\phi - \lambda^2\phi$ で定義される q をポテンシャル渦度と呼ぶ。

CHM 方程式は(1)の渦度方程式と類似した構造をもつことがわかる。 $\lambda\rightarrow 0$ の極限で両者は一致する。つまり、CHM 方程式には特徴的なスケール λ^{-1} が存在し、このスケールを境にして系の特徴は大きく変わる。 λ^{-1} より小さいスケールでは、CHM 乱流は2次元 NS 乱流と同様のダイナミクスと統計的性質で記述されると考えられ、また λ^{-1} より大きいスケールでは CHM 乱流に特徴的なダイナミクスと統計的性質を示すと期待される。このことは次の議論から明確になる。2次元 NS 乱流のエネルギースペクトルのスケーリング理論との類推から、CHM 方程式は非粘性でエネルギー E とポテンシャルエンストロフィー U ,

$$E = -\int \frac{1}{2} q\phi \, dr, \quad U = \int \frac{1}{2} q\nabla^2\phi \, dr \quad (8)$$

を保存量として持つため、この二重カスケード過程によりエネルギースペクトルが形成されると考える。つまり、重要なパラメータはエネルギー輸送率 ϵ とポテンシャルエンストロフィー輸送率 η であり、これがそれぞれのカスケード領域で一定であると仮定する。(7)、(8)の次元解析的スケーリングから、両カスケード領域での特徴的な時間スケールはそれぞれ $\tau_E \sim \lambda^2 \epsilon^{-1/3} k^{-8/3} g(k/\lambda)$ 、 $\tau_U \sim \lambda^2 \eta^{-1/3} k^{-2} g(k/\lambda)$ と表される。 $g(x)$ は無次元のスケーリング関数を表しており、 $g(x) = x^2$ ($x \gg 1$)、 $g(x) = \text{有限}$ ($x \ll 1$)で定義される。 τ_E は eddy turnover time と呼ばれ、ある大きさ k^{-1} の渦に特徴的な時間スケールを表している。これらを使って、エネルギースペクトル関数 $E(k)$ の漸近形はエネルギー逆カスケード領域で $E(k) \sim \lambda^2 \epsilon^{2/3} k^{-11/3} g(k/\lambda)$ 、ポテンシャルエンストロフィーカスケード領域で $E(k) \sim \lambda^2 \eta^{2/3} k^{-5} g(k/\lambda)$ と得られる。¹⁴⁾ $k \gg \lambda$ の時はエネルギースペクトルは λ によらず、2次元 NS 乱流のエネルギースペクトルに一致する。逆に $k \ll \lambda$ の時は CHM 乱流に特徴的なエネルギースペクトルとなり、エネルギーカスケード領域で示す $k^{-11/3}$ のべき則は $k^{-5/3}$ に比べてかなり急勾配であることがわかる。これは、この領域での CHM 乱流が示すダイナミクスが2次元 NS 乱流とはかなり異なったものであることを示唆している。

このように、CHM 乱流は特徴的なスケールでダイナミクスと統計的性質にクロスオーバーがある。次節以降では CHM 乱流に特徴的な $k \ll \lambda$ の領域における渦のダイナミクスとその統計性について述べる。

3.2 乱れの発達過程における渦格子の形成

ドリフト Rossby 波乱流の発達過程における秩序構造形成とその統計的性質を詳しく調べるために、(7)に外力を加えて直接数値計算を行なった例を紹介する。^{**} ここで外

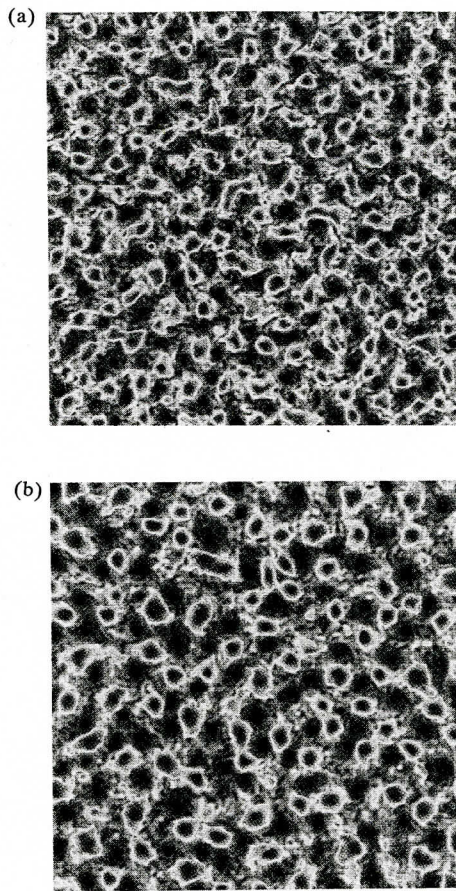


図2 乱れの発達過程におけるポテンシャル渦度場 $q = \nabla^2 \phi - \lambda^2 \phi$ の時間発展の様子。それぞれ (a) $t=100$, (b) $t=200$ の時刻に対するものである。青(黒)の領域は $q > 0$ (< 0) を表す。

力は、波数空間において $k_f (> \lambda)$ を中心とした狭いシェル内の Fourier モード ϕ_k に対し $F_e = i(k \times f)_z$ の形で与えた。ただし f は平均値 0, 分散 $\sqrt{0.5}$ の白色 Gauss 雑音である。この時、系は次のような時間発展を示す。エネルギー注入が始まった初期の段階ではエネルギーは k_f の周りの波数領域に局在しているが、やがてエネルギー逆カスケード過程により低波数側に流れていく。これは λ^{-1} より小さなスケール k_f^{-1} を持つ渦が系に単位時間当たり一定の割合で生じ、これらが相互移流と合併を通して大きな渦へと発展していくプロセスに対応すると考えられる。渦の平均的なスケールが λ^{-1} になるまでは、渦のダイナミクスは 2 次元 NS 乱流に特徴的なものであると考えられ、この時の特徴的な時間スケールは $\tau_E \sim \epsilon^{-1/3} k^{-2/3}$, ($\lambda \ll k < k_f$) となる。一方、十分時間が経って渦の平均的なスケールが λ^{-1} より大きくなると、渦のダイナミクスは CHM 乱流に特徴的なものになると期待され、この時、系のエネルギーは波数 λ よりも低波数側へとカスケードしているであろう。つまり系の特

徴的な時間スケールとしては $\tau_E \sim \lambda^2 \epsilon^{-1/3} k^{-8/3}$ ($k \ll \lambda$) が存在し、系のダイナミクスに大きく影響する。これは、CHM 乱流に特有な渦は 2 次元 NS 乱流の渦に比べると特徴的な時間スケールの渦サイズ依存性が非常に大きく効いてくることを意味しており、CHM 乱流中に特徴的な渦の時間発展は非常に緩やかになることを示唆している。

図2にポテンシャル渦度場 q の時間発展の様子を示す。小さなスケールの渦が相互移流と合併を通して大きなスケールの渦へと発展していく様子がわかる。十分時間が経過した $t=200$ ぐらいでは、全体的な渦の移流はほとんど起こらなくなり、それぞれの渦は空間的に固定されてしまう。これはあたかも渦による格子状の構造が形成されたように見え、このような渦格子構造の形成は渦の擬結晶化と呼ばれている。¹⁵⁾ 構造が結晶的な性質を持つことは文献15の中で詳しく議論されている。ここでは構造の形成過程における統計的性質について述べることにする。¹⁶⁾

構造形成過程の統計的性質、特に動的性質を詳しく見るために、各時刻でポテンシャル渦度場 q の構造関数(スペクトル強度) $S(k, t)$ を計算する。図2に示されていることからわかるように、系には特徴的なスケールとして渦間距離が存在し、時間が経過するにつれてこのスケールは大きくなっていく。この過程で構造関数はシングルピークを持つと考えられ、ピーク位置に相当する波数 $\bar{k}(t)$ から平均的な同符号渦間距離(格子間隔) $l = 2\pi/\bar{k}(t)$ を見積もることができる。 $\bar{k}(t)$ の時間発展を調べることで、ポテンシャル渦度場の特徴的なスケール l の動的性質を知ることができる。さらに構造関数のシングルピークの高さ $S_{\max}(t)$ の時間発展を図3(a)に示した。時間発展に伴い $\bar{k}(t)$ は減少していくが、これは平均的な渦間距離が増大することに対応している。また $S_{\max}(t)$ は時間発展に伴い増大していく。それぞれは時間 t のべき則に従っており、図から $\bar{k}(t) \sim t^{-0.36}$, $S_{\max}(t) \sim t^{1.7}$ 程度である。

系の特徴的なスケール l のべき則に従った時間発展は、渦の相互移流と合併によるものであり、渦格子の形成過程はエネルギー逆カスケード過程との関連から明らかにすることができる。¹⁶⁾ 即ち、先に議論した Kolmogorov 流のスケール理論から、 $\bar{k}(t)$ と $S_{\max}(t)$ のべき則を次元解析的に次のように見積もることができる。系の特徴的な時間スケールである eddy turnover time τ_E は、あるスケール k^{-1} に相当する eddy の生存時間とみなすことができる。そこで τ_E を次のように解釈してもよいだろう。つまり、エネルギー注入が始まって時刻 t が経過した後には消散する eddy の特徴的なスケールを k_f^{-1} とすると、 k_f の時間依存性は $k \ll \lambda$ の時、

$$k_f \sim \lambda^{3/4} \epsilon^{-1/8} t^{-3/8} \quad (9)$$

と求めることができる。 $k_f \sim \bar{k}(t)$ とみなせばスケール

** ここでは高 Reynolds 数の数値実験を実現するために、 $\nu P^2(P^2\phi)$ の代わりに $-\nu P^4(P^2\phi)$ の散逸項を用いた。

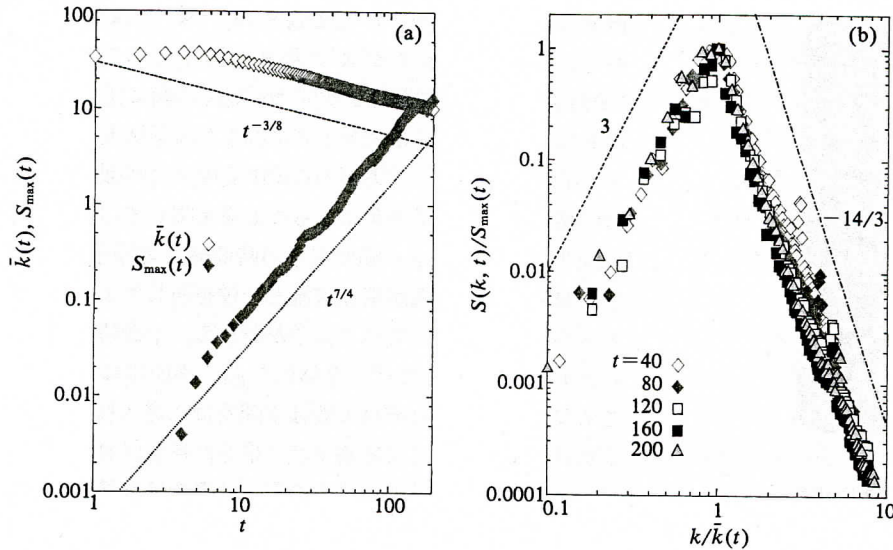


図3 発達過程における動的スケージング則。

則 $\bar{k}(t) \sim t^{-3/8}$ が得られ、これは数値計算の結果と良く一致することがわかる(図3(a)). 一方 $S_{\max}(t)$ は以下の様に見積もられる. エネルギースペクトル関数 $E(k, t) (\sim k^{-11/3})$ と構造関数の関係を考慮し, $k \ll \lambda$ の時に $S(k, t) \sim \lambda^4 \epsilon^{2/3} k^{-14/3}$ と漸近形が求まる. これは $\bar{k}(t) \leq k \ll \lambda$ で成立し、この領域では揺らぎの統計性は定常である. ここで $S_{\max}(t) \approx S(\bar{k}(t))$ と近似すれば、

$$S_{\max}(t) \sim \lambda^{1/2} \epsilon^{5/4} t^{7/4} \quad (10)$$

が得られる. 指数 $7/4$ は数値計算の結果と良く一致している(図3(a)).

各時刻において $S(k, t)/S_{\max}(t)$ を $k/\bar{k}(t)$ の関数としてプロットしたものを図3(b)に示す. この図は明らかに動的スケージング則、

$$S(k, t)/S_{\max}(t) = F(k/\bar{k}(t)) \quad (11)$$

が成立していることを示している. $F(x)$ はあるスケージング関数であり, $F(x) \sim x^{-\gamma}$, $\gamma \approx 4.6$ ($x > 1$), $F(x) \sim x^{\delta}$, $\delta \approx 3$ ($x < 1$) である. $\gamma \approx 4.6 \approx 14/3$ は $S(k, t)$ の漸近形と良く一致しているが, δ はエネルギーカスケード過程で特徴づけられない領域でのべき則のため, 正しい値を理論的に見積もることは難しい.

このように乱流の発達過程において成立する動的スケージング則は, 乱流場が自己相似的に発達していくことの現れであり, 動的スケージング則とそれを特徴づけるスケージング指数が Kolmogorov 流のスケージング理論で導いたことは, エネルギースペクトルの普遍則等の系の静的な統計的性質に議論が集中してきた流体乱流の研究に対して, 乱流を新しい視点でとらえることの可能性を示唆していると考えられる.

ここで, 渦格子構造の形成の物理的なメカニズムについ

て考えてみよう. 図2の結果から, q は空間的に局在していることがわかる. 個々の渦を粒子としてみなすと, 場を渦粒子の集まり (vortex gas) として考えることができる. この考え方は先に触れた2次元渦糸群のハミルトニアン力学の考え方と基本的には同じである. $q = \nabla^2 \phi - \lambda^2 \phi$ を ϕ の式に変形し, $q(r', t) = \sum_j \Gamma_j \delta(r' - r_j)$ と表すと, r_i にいる渦粒子が感じる流れ場 $\phi(r_i, t)$ は

$$\phi(r_i, t) = -\frac{1}{2\pi} \sum_j \Gamma_j K_0(\lambda |r_i - r_j|) \quad (12)$$

となる. ここで $K_0(z)$ は第二種の変形 Bessel 関数を表す. この式は r_i

にある渦粒子が r_j にある渦粒子に影響を与えることを表している. さて, $z = \lambda |r_i - r_j| \gg 1$ の時には $K_0(z) \approx z^{-1/2} e^{-z}$ となるので渦粒子が誘導する流れ場は渦粒子間の距離が増大すると指数関数的に減少する. これは渦粒子間の相互作用 (相互移流) が局所的になることを示しており, r_j にある渦粒子が誘導する流れ場が到達できる距離の範囲はたかだか $O(\lambda^{-1})$ 程度ということになる. いいかえれば, 個々の渦粒子が誘導する流れ場は $O(\lambda^{-1})$ の範囲で遮蔽されていることになり, これが格子状の構造を生み出す要因と考えられる. 逆に $z = \lambda |r_i - r_j| \ll 1$ の時は $K_0(z) \approx -\log(z)$ となり, これは2次元渦糸群のハミルトニアン力学と同じ流れ場を与える. この時は渦粒子間の相互作用は長距離にわたるため, 渦粒子のダイナミクスは非常に複雑になり得る.

今までの議論をまとめると次のようになる. 時間発展の初期の段階では渦の個数が多く, 密集しているため, 個々の渦は2次元 NS 乱流の渦に特徴的な激しい相互移流と合併を繰り返しながら発展していく. この状態は渦粒子の液体状態ととらえてもよいだろう. この時, 合併に伴い渦間距離は増大していくが, 系の特徴的なスケールはまだ $O(\lambda^{-1})$ よりも小さいスケールである. ところが時間発展が進んで平均的な渦間距離が $O(\lambda^{-1})$ になり始めると, 局所的には相互移流や合併が起こるが, 全体的には動きが鈍くなる. これは流れ場が $O(\lambda^{-1})$ の距離で遮蔽される効果がダイナミクスに効いてくるためである. やがて平均的な渦間距離が $O(\lambda^{-1})$ を越えると相互移流や合併はほとんど止まってしまう, 個々の渦は固まってしまう. つまり渦粒子が格子を作り固体になってしまうのである. ここで一つ注意しなければいけないのは渦粒子同士の相互作用の仕方の特殊性である. 例えば, 正と負の荷電粒子が混ざり合った

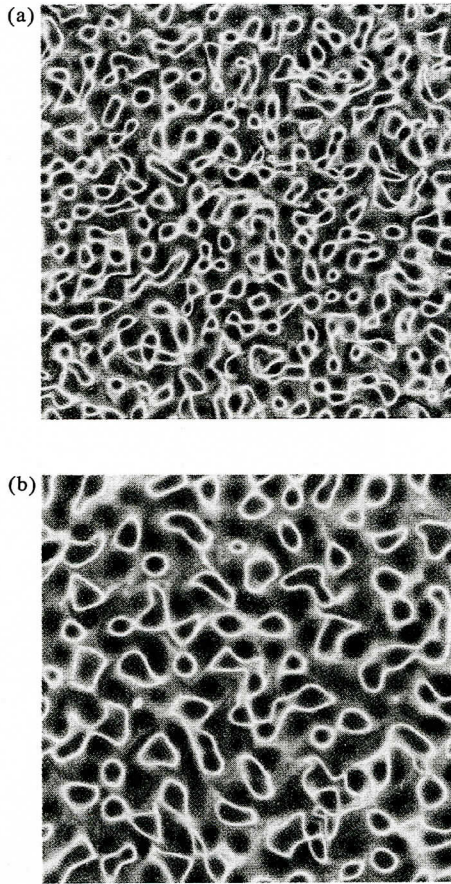


図4 減衰過程におけるポテンシャル渦度場の時間発展の様子。それぞれ (a) $t=20$, (b) $t=100$ の時刻に対するものである。

系では粒子に働く Coulomb 力の方向ベクトルと粒子間の分離ベクトルは並行であるが、正と負の循環を持つ渦粒子系に働く相互移流の速度ベクトルの向きは渦粒子間の分離ベクトルに垂直である。つまり渦粒子間に働く力は引力でも斥力でもない。この性質は渦粒子が作る格子構造の形成に大きな影響を与えると考えられ、今の場合、整った結晶構造でなく、乱れた結晶構造を作る一つの要因であると考えられる。この話と関連して、2次元 Euler 方程式で近似的に記述される非中性プラズマ系において渦がきれいな結晶格子構造を作った実験例があるが、⁹⁾ これは渦同士でなく、別の相互作用が非常に大きな役割を果たしていると考えられ、さらなる研究が望まれる。

3.3 減衰過程における秩序渦集団の統計性

前節では発達過程における渦度場の渦格子構造形成とその統計的性質について述べた。ここでは外力のない、ある初期条件の下に自由減衰する CHM 乱流に見られる秩序構造形成とその統計性について見ていく。特に、系にランダムな外力が働かない時は、渦度場において自己組織化する秩序渦の個性が顕著に現れるので、2節で紹介した2次元減衰性乱流で見られる秩序渦による描像が、減衰性 CHM

乱流にはどのように適用できるのかについて説明する。前節で触れたように、CHM 乱流に特徴的なスケールは λ^{-1} より大きいため、 $k \ll \lambda$ の場合に CHM 乱流の秩序渦が示すダイナミクスを統計的な視点から述べる。

数値計算から得られた減衰過程におけるポテンシャル渦度場 q の時間発展の一例を図4に示す。時間発展の初期の段階では、整った形の渦を持たないランダムな渦度場から秩序渦の集団に向けて自己組織化を起こす。 $k \ll \lambda$ の領域において CHM 乱流に特徴的な秩序渦は相互移流と合併を通して時間発展していく。ただし、この秩序渦集団のダイナミクスは、2次元減衰性乱流で見られるような秩序渦集団が乱流場を激しく動き回りながら合併を繰り返して発展していくものとは大分違っており、比較的距離の近い秩序渦同士による相互移流と合併を主とした局所的なものである。この性質は基本的には前節で議論した流れ場の局所性によるものであるが、減衰性乱流では秩序渦自身のもつスケールが重要になるため、事情は多少異なると思われる。

減衰性 CHM 乱流における秩序渦の時間発展に対する統計的性質は、前節で議論した動的スケール則の観点から明らかにすることができ、ポテンシャル渦度場 q の構造関数は発達過程と同様な動的スケール則を満足することが、理論的、数値的に示されている。¹⁷⁾ 動的スケール則が発達過程でも減衰過程でも成立するのは非常に面白い結果だが、減衰性乱流では実空間における秩序渦自身の個性が顕著であるため、ここでは2次元減衰性乱流で得られた秩序渦の知見に基づいて、秩序渦集団の物理量に対する統計的性質に注目することにする。

秩序渦集団に特徴的な物理量、渦の個数 N 、その平均半径 R_a 、渦の中心における q の平均値 q_a を用い、さらに、 $k \ll \lambda$ に注意して秩序渦集団に対するエネルギー E_{cv} とポテンシャルエンストロフィー U_{cv} は、次元解析的に次のように表すことができる。

$$E_{cv} \sim N q_a^2 \lambda^{-2} R_a^2, \quad U_{cv} \sim N q_a^2 \lambda^{-2}. \quad (13)$$

ここで E_{cv} 、 U_{cv} は (8) で積分領域が系全体ではなく、秩序渦領域に限られていることに注意して欲しい。 E_{cv} と q_a が高 Reynolds 数の極限で系の保存量であることを考慮すると、(13) から $NR_a^2 \sim t^0$ が導ける。これは系全体に対して秩序渦領域の占める割合が時間によらず一定であることを示している。図5の挿入図は数値計算から得られたポテンシャル渦度場において、その秩序渦領域を Weiss の判定¹⁸⁾ を用いて抜きだし、系の全領域に対してその領域が占める割合の時間発展を示したものである。これは明らかに秩序渦領域の面積が時間的にほぼ一定であることを示しており、 E_{cv} のスケール則から導かれる結果とよく一致している。さて、相互移流と合併に伴い渦の個数 N が $N \sim t^{-\alpha}$ と時間のべき則に従い減少するとすれば、 R_a 、 U_{cv} 、平均渦間距離

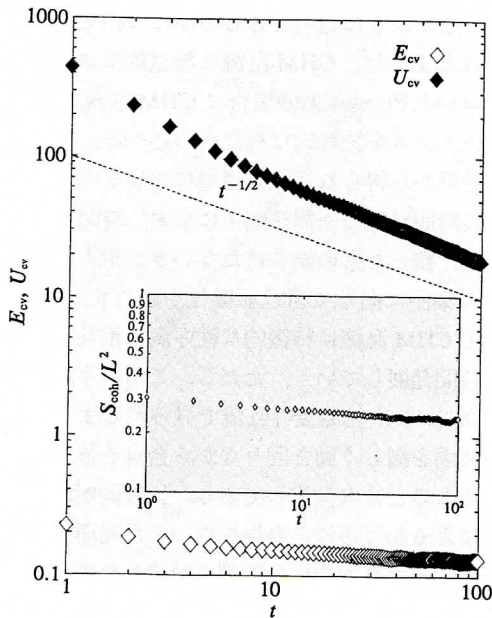


図5 秩序渦集団に対するエネルギー E_{cv} とポテンシャルエンストロフィー U_{cv} の時間発展の様子。 U_{cv} は時間のべき則 $t^{-1/2}$ に従って減少する。 E_{cv} はほぼ一定である。また挿入図は秩序渦領域が占める割合の時間発展の様子。ほぼ一定になっていることがわかる。

$l_a \sim 1/\sqrt{N}$ の動的スケール則はそれぞれ次のように表される。

$$R_a(t) \sim t^{\chi/2}, \quad U_{cv} \sim t^{-\chi}, \quad l_a \sim t^{\chi/2}. \quad (14)$$

このように CHM 乱流でも NS 乱流の場合と同様に、秩序渦の諸量の時間発展は、渦の時間発展を規定する唯一のスケール指数 χ で特徴づけられる。秩序渦集団の時間発展を特徴づける動的スケール指数 χ の値は、次の考察から得ることができる。 q の構造関数のシングルピークに相当する系の特徴的な波数の動的スケール則は、前節で述べた Kolmogorov 流の次元解析から $\bar{k}(t) \sim E^{-1/3} \lambda^{3/4} t^{-1/4}$ と得られて¹⁷⁾ この逆数から平均渦間距離 l_a を見積ると、 $l_a \sim \bar{k}(t)^{-1} \sim t^{1/4}$ より $\chi = 1/2$ を得る。* この値は例えば U_{cv} の時間発展のべき則 $U_{cv} \sim t^{-1/2}$ を与え、数値計算の結果とよく一致している (図5)。

減衰性 CHM 乱流において秩序渦集団が示す統計的性質は、2次元減衰性乱流のものとは大きな違いがある。一つは CHM 乱流では秩序渦領域が保存される ($NR_a^2 \sim t^0$) が、2次元減衰性乱流では $NR_a^2 \sim t^{-\chi/2}$ で減衰していく。つまり時間発展に伴い、2次元減衰性乱流の秩序渦集団は渦自身のスケールを増大させながら空間的にはまばらになっていくが、減衰性 CHM 乱流の秩序渦集団は十分時間が経過しても系全体を覆った状態になっている。これに関連して、系の特徴的な二つの空間スケールである l_a と R_a の

* $\chi = 1/2$ の値は、全く観点を異にした、2.2節の最後に触れたハミルトン動学的移流の考察からも導くことができる¹⁷⁾。

動的スケール則が減衰性 CHM 乱流の秩序渦では同じべき則に従うということも、大きな特徴である。これは秩序渦集団によって支配されているポテンシャル渦度場が自己相似的に時間発展することを示しており、動的スケール則が数値計算の結果をよく満足している一つの要因になっていると考えられる。2次元減衰性乱流では R_a の増大の割合より l_a の増大の割合が大きいため、これも空間的にまばらになる傾向を示す。もう一つは動的スケール指数の値であるが、渦の個数の減り方は CHM 乱流の渦の方が2次元減衰性乱流に比べて緩やかであり、方程式に含まれる特徴的なスケールがもたらす重要な統計的性質であると考えられる。

4. おわりに—秩序化過程の動力学との接点—

本稿では、2次元乱流系における秩序構造とその形成過程における統計的性質について述べた。2次元乱流系、特に本稿で例にあげたようなエネルギーとエンストロフィーを非粘性の極限で保存量として持つような系では、エネルギーのマクロなスケールへの輸送過程が構造形成過程の動的性質と密接に結びついていることが明らかになった。流体乱流における伝統的な統計理論である Kolmogorov 流の次元解析を基礎にして、物理量の動的スケール則の観点からその構造形成を特徴づける統計量を、特にドリフト Rossby 波乱流の発達過程で明らかにできたことは、発達した乱流の複雑で多様なダイナミクスと統計性的一面を理解する一つの方向性を与えていると考えられる。

また、ここで紹介した2次元乱流の秩序構造形成現象とそのダイナミクスは、物性物理学における相転移に伴う秩序化過程、パターン形成現象の観点からも大変興味深いものである。非線形非平衡系の物理におけるパターン形成現象の一つの例として、ここでは Ising スピン系の相転移における秩序化過程のダイナミクスをとりあげよう。¹⁹⁾ 系のパラメータ T (温度) が転移点 T_c より大きい状態では、粗視化スピン変数 $S(r, t)$ (秩序変数) は熱的揺らぎにより乱雑に入りまじっており、 $S=0$ に大きな確率を持つ。この時、系には特徴的な構造は見えず、系は時間的、空間的に一様である。次に系のパラメータを T_c 以下に急激に下げる。秩序化過程の初期の段階では $S=0$ は不安定になり、各点における S は上向き、または下向きに向かって変化しようとする。この時、界面エネルギーの効果により各点で S はランダムにこの値をとることができず、空間的にセミマクロな領域 (ドメイン) で同じ値をとるようになる。これは元の無秩序相がなくなって、界面がランダムに分布するドメイン構造の形成による秩序相が現れたことを示している。時間発展の中期の段階では、異なったドメイン間を分割する界面のダイナミクスが秩序化過程の動力学を支配する。

界面は近傍の界面との相互作用によって運動し、接近、消滅を重ねながら時間発展していく。この時、界面の減少によりドメインの平均的なサイズ l は時間発展と共に増大していき、空間次元 $d=2, 3$ で l は時間のべき則 $l \sim t^{1/2}$ に従う。時間発展の最終段階では界面の消滅によって一つの大きなドメインが系全体を覆ってしまい、系は平衡状態に落ち着き、熱雑音によって平均値の周りに S が Gauss 分布するようになる。

このような秩序化過程を見てみると、2次元減衰性乱流や減衰性 CHM 乱流との類似点が見出される。つまり、時間発展の初期段階における無秩序状態からのドメイン構造の形成に対し、ランダムな渦度場からの秩序渦集団の出現、中期段階における界面の接近、消滅による平均的なドメインサイズの時間のべき則による増大に対し、相互移流と合併による秩序渦のダイナミクスと、平均的な渦サイズの時間のべき則による増大などである。しかし、注意すべきは相転移に見られるような秩序化過程のモデルには、一般にダブルミニマムを持つような Landau 自由エネルギー F が存在し、秩序化過程は F が減少する方向に進むという熱平衡状態への緩和過程で見られるものである。2次元乱流系のような非平衡系で見られる秩序構造形成は、エネルギーのマクロなスケールへの輸送過程における現象であり、モデル方程式の持つ強い非線形性と保存則が本質的な役割を果たしている。このため基本的に上で述べた TDGL (time dependent Ginzburg-Landau) 方程式型のダイナミクスで与えられる秩序化過程とは大きく異なっている。このことは、系の散逸が秩序化に果たす役割と密接につながっている。上の一次相転移の例では散逸が系の界面エネルギーの減衰と密接につながっていることから、散逸は秩序形成に重要な役割を担っているのに対して、2次元乱流系では散逸はエンストロフィー散逸を通してエネルギー逆カスケードを引き起こし、秩序構造形成に寄与している。このことは、散逸はどちらの例にしても秩序構造形成に重要であることを示しているが、その役割は両者では大きく異なっている。

非平衡系である2次元乱流系における秩序構造形成が最終的に落ち着く状態は熱力学的に何に対応するか、また熱平衡系への過渡過程で見られる、秩序構造形成における自由エネルギーの最小化に対応するような基本法則が存在するかどうかは、非平衡系の統計力学の問題と関連して非常に重要なものであろう。この問題に関連して、例えば2次元乱流の減衰過程においてはエネルギーはほとんど散逸されず、エンストロフィーの散逸が大きい場合、エネルギーを近似的に保存量と考えて、エネルギー一定の下でエンストロフィーを最小にするような変分原理(選択的散逸モデル)から流れ場の構造を決定するというアプローチがあり、2次元乱流の減衰過程(緩和過程)における自由エネルギー

のモデルとしておもしろい考え方である。²⁰⁾ エンストロフィーの散逸過程と、2次元乱流系における秩序構造形成のダイナミクスやその統計的性質との関連を調べることは、今後の重要な研究課題であらう。

本稿で紹介した2次元乱流系における秩序構造形成とその統計的性質に関する問題は、流体物理学や統計物理学、物性物理学における基本的で重要な問題と密接に結びついている。長い歴史を持つこれまでの流体乱流の研究は、ソリトン、カオスやフラクタルといったこれまでになかった新しい概念を生み出し、物性物理学の今日の現代的な発展に極めて重要な役割を果たしてきている。逆に物性物理学の研究において確立した手法や概念、観点から乱流現象をとらえてみれば、これまで見えてこなかった新しい乱流像が見えてくるのではないだろうか。

本研究をすすめるにあたり、九州大学理学部の宮原三郎教授、廣岡俊彦助教授、中島健介博士、三好勉信博士、ならびに九州工業大学情報工学部の好村滋行助教授に有益な御助言を賜りました。ここに記して感謝いたします。本研究は科学研究費補助金特別研究員奨励費、奨励研究(A)(課題番号09740366)、基盤研究(C)(課題番号09640487)の援助のもとに行なわれた。

参考文献

- 1) A. N. Kolmogorov: Dokl. Akad. Nauk. SSSR **30** (1941) 301.
- 2) U. Frisch: *Turbulence* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995).
- 3) 例えば、宮崎 武: 日本物理学会誌 **50** (1995) 299. 山田道夫: 数理科学 No. 302 (1988) 40. 河野光雄: 数理科学 No. 387 (1995) 17.
- 4) R. H. Kraichnan: Phys. Fluids **10** (1967) 1417. G. K. Batchelor: Phys. Fluids Suppl. **12** (1969) II-233. C. E. Leith: Phys. Fluids **11** (1968) 671.
- 5) J. C. McWilliams: J. Fluid Mech. **146** (1984) 21.
- 6) R. Benzi, S. Patarnello and P. Santangelo: J. Phys. A **21** (1988) 1221. J. C. McWilliams: Phys. Fluids A **2** (1990) 547.
- 7) G. C. Carnevale, J. C. McWilliams, Y. Pomeau, J. B. Weiss and W. R. Young: Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 2735. J. B. Weiss and J. C. McWilliams: Phys. Fluids A **5** (1993) 608.
- 8) P. Tabeling, S. Burkhart, O. Cardoso and H. Willaime: Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 3772. O. Cardoso, D. Marteau and P. Tabeling: Phys. Rev. E **49** (1994) 454.
- 9) K. S. Fine, A. C. Cass, W. G. Flynn and C. F. Driscoll: Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 3277.
- 10) T. Iwayama and H. Okamoto: Prog. Theor. Phys. **96** (1996) 1061.
- 11) T. Iwayama, H. Fujisaka and H. Okamoto: Prog. Theor. Phys. **98** (1997) 1219.
- 12) A. Hasegawa and K. Mima: Phys. Fluids **21** (1978) 87.
- 13) J. Pedlosky: *Geophysical Fluid Dynamics* (Springer-Verlag, New York, 1987).
- 14) V. D. Larichev and J. C. McWilliams: Phys. Fluids A **3** (1991) 938. M. Ottaviani and J. Krommes: Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 2923.
- 15) N. Kukharin, S. A. Orszag and V. Yakhot: Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 2486.
- 16) T. Watanabe, H. Fujisaka and T. Iwayama: Phys. Rev. E **55** (1997) 5575.
- 17) T. Watanabe, T. Iwayama and H. Fujisaka: Phys. Rev. E **57** (1998) 1636.

- 18) J. B. Weiss: *Physica D* **48** (1991) 273.
 19) 藤坂博一:『非平衡系の統計力学』(産業図書, 1998). 太田隆夫:『界面の不安定性とパターン形成, 物理学最前線 10』(共立出版, 1985).
 20) A. Hasegawa: *Adv. Phys.* **34** (1985) 1.

Q & A コーナー

Q: エンストロフィーとはどのような概念なのでしょう
 か?

A: 流体力学には、流体の運動を記述する形式として粒子的観点からの記述 (Lagrange 形式) と、場としての観点からの記述 (Euler 形式) の 2 つが存在します。Lagrange 形式から Euler 形式には、解析力学で知られている正準変換によって移り変わることができます。通常、数学的な取り扱いの簡便さから Euler 的記述が多用されています。

Euler 形式には、等密度、等エントロピー状態のもとで流体粒子のラベルを付け替えても不変になっています。この性質は渦度に関する保存則と関係しています。つまり、渦度に関する全ての保存則、例えば Kelvin の循環定理やその微分型であるポテンシャル渦度保存則等は、非粘性・等密度・等エントロピー状態の下での Lagrange 的記述における流体粒子のラベルの付け替えに対する、Euler 的記述の不変性の結果として導かれます。

2次元非粘性流体の場合には、これは渦度の任意関数の空間積分 (Casimir) が保存するという性質に対応します。

エンストロフィーは Casimir の一つに過ぎませんが、粘性流体の場合にエネルギー散逸率と関係することから、重要な物理量として注目されています。

Q: ドリフト Rossby 波乱流とは、どのようなものですか?

A: 一様で強い磁場が印加されたプラズマ中の静電ポテンシャルの揺らぎの時間発展や、回転する惑星表面における大気や海洋の大規模運動では、長時間、長波長スケールの運動に注目すれば、系を特徴づける物理量の揺らぎは近似的に 2 次元的なものとして扱うことができます。そこで、系を支配する基礎方程式系を通減することにより、地球流体力学の分野では Charney によって、またプラズマ物理学の分野では長谷川-三間によってそれぞれ独立に導き出された方程式が Charney-長谷川-三間 (CHM) 方程式です。特に地球流体力学では準地衡流渦位方程式と言われていいます。プラズマ中の密度勾配の存在、または惑星の回転角速度の緯度変化の存在を考慮すれば、その領域にはそれぞれドリフト波、Rossby 波 (惑星波) と呼ばれる波が励起される効果が付け加わり、これらの波動が存在することで、プラズマ乱流や地衡流乱流の現象は通常の乱流現象に比べて多彩な性質を持つこととなります。CHM 方程式やその発展形のモデル方程式を用いたドリフト Rossby 波乱流の研究も、現在盛んに行なわれています。

日本物理学会誌 第 53 巻 第 4 号 (1998 年 4 月号) 予定目次

交流

気球、観測ロケットおよび衛星によるオゾン観測
小山孝一郎, 山本博聖, 福西 浩

解説

表面活性剤を用いた半導体結晶成長.....箕田弘喜

バリスティック量子輸送と量子カオス
中村勝弘, 川畑史郎, 高根美武

非断熱遷移によるナノクラスター磁性体の動的特性...宮下精二
 連載「科学は今.....」

分類学とは何か.....馬渡峻輔

最近の研究から

シグマ・ハイパー核は存在した!.....永江知文, 原田 融
 重い原子イオンの光電離と巨大共鳴

.....佐野 睦, 伊藤 陽, 小泉哲夫

II-IV 族半導体 ZnO における新たな強誘電相.....小野寺彰
 談話室

超フェルミウム元素の日本語表記について.....山本明夫
 新著紹介