減衰性2次元乱流における正常自己相似性と異常自己相似性

岩山隆寛 (Takahiro Iwayama)[1],
Theodore G. Shepherd[2]

[1] 神戸大学 大学院 自然科学研究科,
[2]Department of Physics, University of Toronto

概 要

減衰性 2 次元 Navier–Stokes 乱流に関する新しい相似仮説を提唱する．この理論は全ての Reynolds 数状態で成り立つものである．理論は長さスケールが $\Lambda \sim t^{1/2p}$ で発展することを要請する．ここで t は時間で，p は超粘性の次数である．($p = 1$ が拡散型の粘性である.）この理論は，次元を持つ不定因子を含むという点で，異常な自己相似理論と呼ばれる．拡散型の粘性を持つ場合，低い特殊な Reynolds 数状態で理論は無次元の不定因子を含む正常な自己相似性を示し，Chasnov & Herring (1998) で議論された $\mathcal{E} \sim t^{-1}$, $\mathcal{Q} \sim t^{-2}$ を導く．ここで $\mathcal{E}$ はエネルギー，$\mathcal{Q}$ はエンストロフィーである．この理論は，一般的に乱流状態は異常自己相似性をもつことを主張する．高 Reynods 数極限では，理論は Chasnov (1997) と Das et al. (2001) によって数値的に示された $\mathcal{E} \sim t^0$, $\mathcal{Q} \sim t^{-1}$ を予測する．非粘性状態は特異である．この場合，理論は Batchelor (1969) の減衰則 $\mathcal{E} \sim t^0$, $\mathcal{Q} \sim t^{-2}$ を導く．しかしながら理論は全ての波数領域でエネルギーが低波数側に流れることを要請している．このことは Fjørtoft (1953) の定理に反する．これは Batchelor の減衰則が数値実験で実際に観測されない理由のひとつと考えられる．

1 はじめに

2 次元 Navier–Stokes（NS）方程式は, 3 次元 NS 方程式と比べて，特異な性質を持つことがよく知られている．特に，2 次元系は運動エネルギー $\mathcal{E}$ と，渦度 ω の任意関数の空間積分を非粘性保存量としてもつことが知られている．このような渦度に関係した無限個の保存量のうち，ω の 2 乗空間平均値であるエンストロフィー $\mathcal{Q} \equiv \frac{1}{2}\left\langle \omega^2 \right\rangle$ が最も重要な量であると思われている．ここで $\langle \cdots \rangle$ は空間平均値をあらわす.

減衰性 2 次元 NS 乱流の高 Reynolds 数状態ではエネルギー $\mathcal{E}$ の散逸は消えるが，エンストロフィー $\mathcal{Q}$ の散逸は有限値に保たれる．そこで，Batchelor(1969) は $\mathcal{E}$ が減衰性 2 次元 NS 乱流の高 Reynolds 状態における系の唯一の保存量であり，系の時間発展は $\mathcal{E}$ と t のみに依存すると仮説を立てた．次元解析に基づいて彼は $\mathcal{E} = \int_0^\infty E(k)\,\mathrm{d}k$ で定義されるエネルギースペクトル $E(k)$ の自己相似形

$$E(k) = \mathcal{E}^{3/2} t F(k\mathcal{E}^{1/2} t) \tag{1}$$

とエンストロフィー $\mathcal{Q}$ の減衰則,

$$\mathcal{Q} \sim t^{-2}, \tag{2}$$

を導いた．ここで, k は水平波数で, F はある普遍的な関数形である.

しかしながら，多くの高 Reynolds 数状態の数値実験は Batchelor の予測 (1), (2) を支持していない.（例えば，Bartello & Warn 1996）最近 Chasnov (1997) はさまざまな Reynolds 数のもと

で減衰性 2 次元 NS 乱流の数値実験を行い，ある臨界的な Reynolds 数状態においてエネルギースペクトルが自己相似形

$$E(k) = \mathcal{E} l F(kl) \tag{3}$$

を持ち，さらにエネルギーとエンストロフィーが

$$\mathcal{E} \sim t^{-1},\ \mathcal{Q} \sim t^{-2} \tag{4}$$

で減衰する解が存在することを示した．ここで, l は $l \equiv \sqrt{\mathcal{E}/\mathcal{Q}}$ で定義される長さスケールである．さらに 高 Reynolds 数状態において Chasnov (1997) と Das et al. (2001) によって

$$E(k) = t^{1/2} F(kt^{1/2}) \tag{5}$$

の相似形を持ち

$$\mathcal{E} \sim t^{0},\ \mathcal{Q} \sim t^{-1} \tag{6}$$

で減衰する解も発見された．以下では (3), (4) の解を臨界 Reynolds 数減衰則，(5), (6) の解を高 Reynolds 数減衰則と呼ぶことにする．

Chasnov & Herring (1998) は, エネルギーとエンストロフィーの発展方程式から, 臨界 Reynolds 数減衰則と高 Reynolds 数減衰則の導出を行った．しかしながら，彼らの議論は拡散型の粘性を持つ 2 次元 NS 方程式系を対象としたものであり，数値実験でしばしば用いられる超粘性を持つ場合は考察されていない．彼らの理論を超粘性を持つ場合に拡張することは非自明である．そこで，本研究では超粘性を持った 2 次元 NS 系の減衰性乱流に関する新しい自己相似理論を提出する．ここで提出する新しい概念は，**次元的に異常な自己相似**，である．これはエネルギースペクトルが，任意の長さスケールと時間によって縮尺されることを許す．我々の理論は，拡散型の粘性の場合には，臨界 Reynolds 数減衰則，高 Reynolds 数減衰則を説明する．我々の理論を用いて Batchelor の減衰則 (2) が数値実験で観測されない理由について考察する．

2　理論

議論の出発点は p 次の超粘性を持つ 2 次元 NS 方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\varphi, \omega) = (-1)^{p-1} \nu_p \nabla^{2p} \omega \tag{7}$$

から導かれるエネルギースペクトル $E(k)$ の発展方程式

$$\frac{\partial E(k)}{\partial t} = T(k) - 2\nu_p k^{2p} E(k) \tag{8}$$

である．ここで, φ は流れ関数，J は Jacobian，ν_p は p 次の超粘性係数，$T(k)$ はエネルギー伝達関数である.（系は等方的であると仮定する.）$E(k)$ が次のような自己相似形をもつと仮定する：

$$E(k) = c \Lambda^{\sigma} t^{\delta} G(x),\ x \equiv k\Lambda. \tag{9}$$

ここで, σ, δ は定数, c は (長さ)$^{3-\sigma}$/(時間)$^{\delta+2}$ の次元をもつ定数, G はある普遍的な正値関数である．Λ は任意の長さスケールである．ここでは長さスケール Λ を明確には定義しない．なぜならば，本研究では粘性スケールを含む全てのスケールに渡る自己相似性を考えているので，全ての長さスケールは同じ率で発展しなければならず，したがって，Λ はエネルギー保持スケールにも粘性スケールにもとることができる．$\sigma = 3$, $\delta = -2$ の時には c は無次元定数となり, $\Lambda^{\sigma} t^{\delta}$ の次

元は $E(k)$ の次元に一致するが, それ以外の場合には c は次元をもった量となり, $\Lambda^\sigma t^\delta$ の次元と $E(k)$ の次元は一致しない. $\sigma = 3$, $\delta = -2$ の時の (9) を**正常な自己相似**と呼び, それ以外の場合を**異常な自己相似**と呼ぶことにする. このとき $T(k)$ はある普遍的な関数 G_1 を用いて次の形の自己相似形をもつと仮定する：

$$T(k) = c\Lambda^\sigma t^{\delta-1} G_1(x). \tag{10}$$

(9), (10) を (8) に代入し, (8) を普遍的な関数 G, G_1 の方程式に書き直すと

$$G_1(x) = \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{xG(x)\} + \{(\sigma-1)\gamma + \delta\}G(x) + 2\nu_p \Lambda^{-2p} t x^{2p} G(x), \tag{11}$$

$$\gamma \equiv \frac{\mathrm{d}\ln\Lambda}{\mathrm{d}\ln t} \tag{12}$$

を得る. G, G_1 が存在するためには (11), (12) は陽に時間に依存してはいけない. そこで, (12) から γ は定数であり，(11) の右辺最後の項から $\Lambda^{-2p}t \sim t^0$, 即ち，次式を得る：

$$\gamma = \frac{1}{2p}. \tag{13}$$

(13) は長さスケールの発展は粘性係数の形に依存することを示している.

2 次元 NS 方程式の非線形項はエネルギー保存則に寄与しない. そこで $T(k)$ は次の束縛条件を満足する必要がある：

$$\int_0^\infty T(k)\,\mathrm{d}k \sim \int_0^\infty G_1(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{14}$$

(11) を x について 0 から ∞ まで積分し，(14) と

$$\lim_{x\to 0} xG(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} xG(x) = 0, \tag{15}$$

という仮定を用いると,

$$\{(1-\sigma)\gamma - \delta\} \int_0^\infty G(x)\,\mathrm{d}x = 2\nu_p \Lambda^{-2p} t \int_0^\infty x^{2p} G(x)\,\mathrm{d}x \tag{16}$$

を得る. この式はある種の完結方程式と解釈できる. なぜなら後で見るようにこの式を用いてエネルギー方程式を閉じさせることができるからである. (7) で与えられる系のエネルギー散逸率 ϵ は

$$\epsilon \equiv -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = 2\nu_p \int_0^\infty k^{2p} E(k)\,\mathrm{d}k \tag{17}$$

なので，(16) は恒等的に

$$\epsilon = \{(1-\sigma)\gamma - \delta\}\,\frac{\mathcal{E}}{t} \tag{18}$$

と書ける. エネルギー散逸率は正でなければいけないので,

$$(1-\sigma)\gamma \geq \delta \tag{19}$$

が要請される.

エンストロフィースペクトルについても同様の議論を行うことにより，エンストロフィー散逸率 η は $\mathcal{Q}$ を用いて

$$\eta = \{(3-\sigma)\gamma - \delta\}\,\frac{\mathcal{Q}}{t} \tag{20}$$

と書ける．

(18), (20) はエネルギーとエンストロフィーの減衰に関する簡単な関係式を導く．特にエネルギーが

$$\mathcal{E} \sim t^{-\theta}, \tag{21}$$

$$\theta = (1-\sigma)\gamma - \delta \tag{22}$$

で与えられるとき，エンストロフィーは

$$\mathcal{Q} \sim t^{-\theta-2\gamma} \tag{23}$$

で減衰する．

拡散型の粘性の場合は $p=1$ なので，(13) から $\gamma = \frac{1}{2}$ が得られる．さらに $\theta = 1$ ととることにより，(21), (23) は臨界 Reynolds 数減衰則となる．また，$\theta = 0$ ととることにより (21), (23) は高 Reynolds 数減衰則となる．即ち，我々の理論は，今まで見つかっている自己相似な減衰則を説明できる．なお，θ はスケーリング指数 σ, δ に依存する．σ, δ の値がどのような場合に，θ が 1 や 0 をとるかは引き続く節で議論する．

3 議論

拡散型の粘性を持ち，正常な自己相似の場合を考える．即ち $p=1, \sigma=3, \delta=-2$ である．これらを (21), (22), (23) に代入すると，Chasnov (1997) の臨界 Reynolds 数減衰則が得られる．この解析は，臨界 Reynolds 数減衰則以外の減衰則は，全て次元的に異常な自己相似であることを示している．

ここで，我々の議論と Chasnov & Herring (1998) との関係について触れておく．彼らは，拡散型の粘性項を持つ 2 次元 NS 方程式のエネルギーとエンストロフィーの発展方程式を出発点として，長さスケール l に関する時間発展方程式

$$\frac{\mathrm{d}l^2}{\mathrm{d}t} = 2\nu\left(\rho^2 - 1\right) \tag{24}$$

を導いた．ここで，$\nu = \nu_1$, ρ は l と，パリンストロフィー $\mathcal{P} \equiv \frac{1}{2}\left\langle |\boldsymbol{\nabla}\omega|^2 \right\rangle$ とエンストロフィーで定義される長さスケール $\mu \equiv \sqrt{\mathcal{Q}/\mathcal{P}}$ との比，$\rho = \sqrt{l/\mu}$ である．系が自己相似発展をするときには全ての長さスケールが同じ率で発展しなければならないので，そのとき ρ は一定に保たれるはずであり，(24) は解

$$l^2 = 2\nu\left(\rho^2 - 1\right)(t - t_*) + \frac{\mathcal{E}_*}{\mathcal{Q}_*} \tag{25}$$

を持つ．ここで，$\mathcal{E}_*$, $\mathcal{Q}_*$ はそれぞれ $t = t_*$ における $\mathcal{E}$, $\mathcal{Q}$ の値である．(25) を用いると，エネルギー発展方程式とエンストロフィー発展方程式を閉じさせることができ，エネルギーとエンストロフィーの時間発展は

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_*\left\{1 + \frac{2\nu\mathcal{Q}_*}{\mathcal{E}_*}\left(\rho^2 - 1\right)(t - t_*)\right\}^{-1/(\rho^2-1)}, \tag{26}$$

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_*\left\{1 + \frac{2\nu\mathcal{Q}_*}{\mathcal{E}_*}\left(\rho^2 - 1\right)(t - t_*)\right\}^{-\rho^2/(\rho^2-1)} \tag{27}$$

で与えられる．$\rho = \sqrt{2}$ の時に臨界 Reynolds 数減衰則が，$\rho \to \infty$ の時に高 Reynolds 数減衰則が得られることがわかる．

ρ は $p = 1$ のとき

$$\rho = \sqrt{\frac{\mathcal{E}/\epsilon}{\mathcal{Q}/\eta}} \tag{28}$$

と書くこともできる．この式に (18), (20) を代入し，正常自己相似 $\sigma = 3$, $\delta = -2$ を仮定すると

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma}} \tag{29}$$

を得る．拡散型の粘性の時には $\gamma = \frac{1}{2}$ となるので，このとき $\rho = \sqrt{2}$ を得る．さらに，(28) において 高 Reynolds 数極限 $\epsilon \to 0$ をとることにより，$\rho \to \infty$ が導かれる．つまり $p = 1$ の我々の解析は Chasnov & Herring (1998) と同等であることがわかる．

次に Batchelor (1969) の相似仮説の問題に話題を移す．$\nu_p = 0$ とした非粘性の $E(k)$ の発展方程式を出発点として，正常自己相似の場合には，(11) は

$$G_1(x) \quad = \quad \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{xG(x)\} + 2(\gamma - 1)G(x) \tag{30}$$

となる．以前と同様に (30) を x について 0 から ∞ まで積分し，(14) の束縛条件と (15) を用いると，$\gamma = 1$ が得られる．したがって，この場合には $\mathcal{Q} \sim \Lambda^{-2}\mathcal{E} \sim t^{-\theta-2}$ となる．非粘性であるという仮定（$\theta = 0$）から，$\mathcal{Q} \sim t^{-2}$ という Batchelor (1969) の減衰則 (2) が得られる．つまり，Batchelor の減衰則は非粘性の正常自己相似と解釈できる．

ここで，エネルギーフラックス $\Pi(k) \equiv -\int_0^k T(k')\,\mathrm{d}k' \sim -\int_0^x G_1(x')\,\mathrm{d}x'$ を (30) から求めると，

$$-\int_0^x G_1(x')\,\mathrm{d}x' = -xG(x) \tag{31}$$

が得られる．$G(x)$, x は共に正なので，(31) は，全ての波数領域でエネルギーフラックスが負の値をとる，即ち全ての波数領域でエネルギーが低波数へ輸送されることを意味する．しかしながら，Fjørtoft の定理（Fjørtoft 1953）によると，2 次元 NS 系の非線形（三波）相互作用は，エネルギーを中間の波数モードから低波数モードと高波数モードへ向けて同時に輸送する，もしくはそれを高波数モードと低波数モードから中間波数モードへ向けて同時に輸送する．そこで，ある波数領域でエネルギーフラックスは負の値をとらなければいけない．したがって，(31) の結果は Fjørtoft の定理に反することになる．このことは，Batchelor の減衰則が実際の数値実験で観測されない理由のひとつと考えられる．

スケーリング指数 σ, δ は (22) で見たようにエネルギーの減衰則と関係しているので，これらの指数が Reynolds 数と関係しているであろうことは容易に想像が付く．実際に，拡散型の粘性を持つ場合，長さスケール l および μ で定義された 2 つの Reynolds 数

$$R_l = \frac{\sqrt{\mathcal{E}}l}{\nu},\ R_\mu = \frac{\sqrt{\mathcal{E}}\mu}{\nu} \tag{32}$$

の比と σ, δ の間には

$$\left(\frac{R_l}{R_\mu}\right)^2 = 1 + \frac{2\gamma}{(1-\sigma)\gamma - \delta} \tag{33}$$

の関係が成り立つことが示せる．ただし，(33) は Reynolds 数 R_l, R_μ と γ の値から σ, δ の値を唯一に決定できるものではない．

4 まとめ

減衰性 2 次元 NS 乱流において知られている幾つかの減衰則を統一的に記述できる相似仮説を提唱した．Chasnov(1997) によって発見された臨界 Reynolds 数減衰則は正常自己相似に, Chasnov(1997) と Das et al. (2001) によって発見された高 Reynolds 数減衰則は異常自己相似に対応する．また, Batchelor(1969) によって提唱された減衰則は非粘性状態の正常自己相似である．ただし, この場合には全ての波数領域でエネルギーが低波数側に輸送され, Fjørtoft(1953) によって提唱された 2 次元 NS 系の基本的な物理的束縛を破っている．このことは Batchelor(1969) の減衰則が数値実験で観測されない理由の一つと考えられる．

本研究で提唱された理論は他の 2 次元乱流系に対しても適用することができる．特に Charney–Hasegawa–Mima (CHM) 方程式に従う減衰性乱流の asymptotic model (AM) 領域に本理論を適用した場合，Batchelor(1969) の相似仮説は $p = 2$ の超粘性の正常自己相似のときにのみ成り立つことが示せる．実際に，$p = 2$ の CHM 方程式の数値シミュレーションから，減衰性 CHM 乱流の AM 領域では Batchelor の相似仮説がうまく適用できることが Iwayama et al. (2002) によって示されている．CHM 乱流への本理論の適用は引き続く論文で議論していく．

謝辞

本研究は科学研究費の支援を受けて行われたものである．著者の一人（TI）は文部科学省 21 世紀 COE プログラム「惑星系の起源と進化」の援助を受けている．

参考文献

1. Bartello, P. & Warn, T. 1996 Self-similarity of decaying two-dimensional turbulence. J. Fluid Mech. **326**, 357–372.

2. Batchelor, G. K. 1969 Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence. Phys. Fluids Suppl. **12**, II-233–II-239.

3. Chasnov, J. R. 1997 On the decay of two-dimensional homogeneous turbulence. Phys. Fluids **9**, 171–180.

4. Chasnov, J. R. & Herring, J. R. 1998 Self-similar decay of two-dimensional turbulence. In Advances in Turbulence VII, Kluwer, 415–418.

5. Das, C., Kida, S. & Goto, S. 2001 Overall self-similar decay of two-dimensional turbulence. J. Phys. Soc. Japan. **70**, 966–976.

6. Fjørtoft, R. 1953 On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for two-dimensional non-divergent flow. Tellus **5**, 225–230.

7. Iwayama, T., Shepherd, T. G. & Watanabe, T. 2002 An ‘ideal’ form of decaying two-dimensional turbulence. J. Fluid Mech. **456**, 183–198.