

# 減衰性 2 次元乱流における普遍的赤外領域スペクトルと不変量

神戸大学 大学院理学研究科 岩山 隆寛\*

Takahiro Iwayama,

Department of Earth and Planetary Sciences, Graduate School of Science, Kobe University

名古屋工業大学 工学研究科 渡邊 威,†

Takeshi Watanabe

Department of Scientific and Engineering Simulation, Graduate School of Engineering, Nagoya Institute of Technology

## 概要

一般化された 2 次元流体系の乱流現象 ( $\alpha$  乱流) において赤外領域 (波数  $k \rightarrow 0$ ) に形成されるスペクトルに普遍性が存在すること, さらに 2 つの不変量が存在することを完結近似した方程式の解析と直接数値シミュレーションによって示す.

## 1 はじめに

一般化された 2 次元流体系は, 次の非線型移流方程式,

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = \mathcal{D} + \mathcal{F}, \quad (1a)$$

$$-(-\nabla^2)^{\alpha/2}\psi = q, \quad (1b)$$

に従う系で, ここ 10 年ほどの間に精力的に研究が行われてきた.<sup>(4), (10), (13), (14), (24), (28)–(31), (33)–(35)</sup> ここで,  $\psi(\mathbf{x}, t)$  は流れ関数,  $q(\mathbf{x}, t)$  は非圧縮性速度場  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_z \times \nabla\psi$  により移流されるスカラー場,  $\mathbf{e}_z$  は運動の平面に垂直な単位ベクトル,  $J$  は 2 次元 Jacobian,  $\alpha$  は実数,  $\nabla^2$  は 2 次元 Laplacian,  $\mathcal{D}$  と  $\mathcal{F}$  は散逸項と強制項をそれぞれ表す. この系は, しばしば  $\alpha$  乱流系と呼ばれる. なぜならば, (1) にパラメータ  $\alpha$  が含まれていること, そしてこの系の乱流特性が今まで主に調べられてきたからである. この系はもともと, 2 次元 NS 方程式に従う強制散逸乱流における波数空間内の非局所相互作用を研究するために導入されたモデル方程式であるが, 同時に幾つかの地球流体力学的 2 次元流体系を記述している.<sup>(27)</sup> 支配方程式 (1) は  $\alpha = 2$  のとき, 2 次元非圧縮性順圧流体 ( $\mathcal{D}$  が渦度の拡散の形で表される粘性であれば, いわゆる 2 次元 Navier–Stokes: 2DNS) 系の渦度方程式になる.  $\alpha = 1$  のときには, (1) は表面地衡流 (Surface Quasi-Geostrophic: SQG) 系の支配方程式になる.<sup>(3), (11)</sup> Charney–Hasegawa–Mima (CHM) 方程式の漸近モデル (asymptotic model: AM) レジーム,<sup>(20)</sup> もしくは変形半径よりも大きなスケールの現象を記述する浅水系の準地衡流渦位方程式<sup>(26)</sup> は  $\alpha = -2$  の (1) である.<sup>(12), (29)</sup>

一般化された 2 次元流体系を研究する意義は, 2 つある. 第一の目的は, 地球流体力学的 2 次元系を統一的な視点から研究し, 理解することである. 第二の目的は 2D Euler や 2D NS 系に関して構築されてきた既存の流体力学理論の普遍性や特殊性を明らかにし, さらにそれを発展させることにある.

---

\* iwayama@kobe-u.ac.jp

† watanabe@nitech.ac.jp

2D NS 系と同様に散逸と強制がなければ, (1) は 2 つの 2 次の不変量, 一般化エネルギー  $\mathcal{E}_\alpha$  と一般化エンストロフィー  $\mathcal{Q}_\alpha$ ,

$$\mathcal{E}_\alpha \equiv -\frac{1}{2}\overline{\psi q}, \quad (2)$$

$$\mathcal{Q}_\alpha \equiv \frac{1}{2}\overline{q^2}, \quad (3)$$

を持つ. ここで, 上線は流れの領域に渡る空間平均を意味する. 我々は  $\mathcal{E}_\alpha$  と  $\mathcal{Q}_\alpha$  をそれぞれ簡潔にエネルギーとエンストロフィーと呼ぶことにする. 加えて,  $q$  を一般化渦度もしくは単に渦度と呼ぶことにする.

2 つの不変量が存在するために  $\alpha$  乱流においても波数空間内で 2 つの不変量のカスケード現象が起きることが想像される. それゆえ, いままで一般化された 2 次元流体系の研究は乱流研究が活発に行われてきた.(4),(10),(14),(24),(27)–(31),(33)–(35) 特に強制散逸  $\alpha$  乱流のエンストロフィー慣性領域におけるエンストロフィースペクトル  $Q_\alpha(k)$  の解析に努力が払われてきた. ここで エンストロフィースペクトルは, 流れの領域が無限の平面の場合,

$$\mathcal{Q}_\alpha \equiv \int_0^\infty Q_\alpha(k) dk, \quad (4)$$

で定義される. エンストロフィー慣性領域の  $Q_\alpha(k)$  は  $\alpha$  の値に依存して, その形が次のように変化する. $\alpha < 2$  におけるスペクトルの傾きはいわゆる Kraichnan-Leith-Batchelor (KLB) 理論 (2),(17),(21) によって説明される.  $\alpha = 2$  におけるスペクトルの傾きは, KLB 理論に対する対数補正である.(18) しかしながら,  $\alpha > 2$  におけるスペクトルの傾きは  $\alpha$  に依存しない. この  $\alpha = 2$  におけるスペクトルの冪則の指数の転移は, 波数空間においてエンストロフィー輸送が局所的三波よりもむしろ, 非局所的三波によって支配的に行われるからである.(27),(33)–(35) 一方で, 最近 Burgess & Shepherd(4) は一般化された 2 次元流体系の渦減衰準正規 Markov 化 (Eddy Damped Quasi-Normal Markovian:EDQNM) 完結近似方程式を導入し, 強制散逸  $\alpha$  乱流のエネルギー慣性領域の自己相似性について研究している. 彼らは,  $\alpha < 5/2$  では エネルギースペクトルの傾きは, KLB 理論によって説明できることを示した.

強制散逸  $\alpha$  乱流の慣性領域の力学は興味深い研究課題であるが, この論文では減衰性  $\alpha$  乱流の低波数域の力学を研究することに専念する. ここで低波数域とは, エネルギースペクトルもしくはエンストロフィースペクトルがピークとなる波数  $k_I$ , もしくはこれらのスペクトルの重心波数, よりも小さな波数領域のことを指す. 減衰性 2DNS 乱流や減衰性 CHM-AM 乱流の低波数域には, 普遍的なスペクトルが形成されることが知られている.(1),(7),(8),(16),(36) 2D NS 乱流に関しては, Kraichnan(19) が Test Filed Model (TFM) を用いて, エネルギー伝達関数が赤外領域 ( $k \rightarrow 0$ ) で  $k^3$  の依存性を持つことに気づいている. Basdevant *et al.*(1) は同じ結果を EDQNM 理論を使って再発見している. これらの研究は, 赤外領域においてエネルギースペクトル  $E_2(k)$ , それは  $\mathcal{E}_\alpha = \int_0^\infty E_\alpha(k) dk$  で定義される, が  $E_2(k) \sim k^3$  となることを意味する. 一方, Davidson(7) はエネルギースペクトルが赤外領域において

$$E_2(k) = \frac{Jk^{-1}}{4\pi} + \frac{\hat{L}k}{4\pi} + \frac{\hat{I}k^3}{16\pi} + \frac{\hat{M}k^5}{(4^2)16\pi} + \frac{\hat{N}k^7}{(4!)16\pi} + \dots, \quad (5a)$$

と展開できることを示している. ここで  $J, \hat{L}, \hat{I}, \hat{M}$  と  $\hat{N}$  は渦度の 2 点相関関数,  $\langle qq' \rangle \equiv \langle q(\mathbf{x})q(\mathbf{x}') \rangle$ , を用

いて,

$$J = 2\pi \int_0^\infty r \langle qq' \rangle dr, \quad (5b)$$

$$\hat{L} = -\frac{\pi}{2} \int_0^\infty r^3 \langle qq' \rangle dr, \quad (5c)$$

$$\hat{I} = \frac{\pi}{8} \int_0^\infty r^5 \langle qq' \rangle dr, \quad (5d)$$

$$\hat{M} = -\frac{\pi}{18} \int_0^\infty r^7 \langle qq' \rangle dr, \quad (5e)$$

$$\hat{N} = \frac{\pi}{32} \int_0^\infty r^9 \langle qq' \rangle dr. \quad (5f)$$

と表現される.  $\langle \bullet \rangle$  は統計平均を表し, 一様等方性が仮定されている. このとき, 相関関数  $\langle qq' \rangle$  は 2 点の距離  $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$  のみの関数となる. さらに彼は積分  $J$  と  $\hat{L}$  が減衰性 2D NS 乱流における不変量であることを Kármán-Howarth 方程式に基づいて示した. それゆえ, 彼の研究は次の 3 つのケース,  $E_2(k) \sim Jk^{-1}$ ,  $E_2(k) \sim \hat{L}k$  と  $E_2(k) \sim \hat{I}k^3$  が存在することを提案している.  $E_2(k \rightarrow 0) \sim k^s$ , ( $s \geq 3$ ) の形の急峻な初期エネルギースペクトルからの発展 (これは減衰性乱流の数値シミュレーションとして標準的な設定である) に関して, エネルギースペクトルは赤外領域で  $E_2(k) \sim k^3$  となるいっぽう,  $E_2(k \rightarrow 0) \sim k^{-1}$  もしくは  $E_2(k \rightarrow 0) \sim k$  という初期エネルギースペクトルからの発展では, 発展の初期段階にはこれらの関数形は保たれるが時間とともに高波数側から  $k^3$  のスペクトルによって浸食されていく. これらのスペクトルは直接数値実験 (6), (8), (9), (23), (25) によって立証されている.

減衰性 CHM-AM 乱流では, Yanase & Yamada<sup>(36)</sup> が

$$\mathcal{K} \equiv \frac{1}{2} \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \equiv \int_0^\infty K(k) dk, \quad (6)$$

で定義される運動エネルギースペクトル  $K(k)$  は, 赤外領域で  $k^7$  の依存性を持つことを準正規理論によって初めて示した. いっぽう, Iwayama *et al.*<sup>(16)</sup> は減衰性 CHM-AM 乱流の赤外領域の全エネルギースペクトルを議論し, EDQNM 理論を用いて  $k^5$  の依存性を持つスペクトルを得ている. さらに彼らは, 減衰性 CHM-AM 乱流の直接数値シミュレーションを行って, 彼らの結果の正当性を立証している. いっぽう, Fox & Davidson<sup>(8)</sup> は CHM-AM 乱流の運動エネルギースペクトル  $K(k)$  が (5) と同じように展開できることを導いた. ここで (5b) – (5f) の積分は, 渦度の相関関数ではなく渦位の相関関数で表現される. このとき,  $J$  と  $\hat{I}$  だけでなく  $\hat{I}$  と  $\hat{M}$  も不変量になる. それゆえ, 急峻なスペクトルを持つ初期条件からの発展では, 運動エネルギースペクトルは  $K(k \rightarrow 0) \sim k^7$  の形を持つ. これは, 直接数値シミュレーションによって確かめられている.<sup>(8)</sup> ここで  $k^5$  の全エネルギースペクトルは  $k^7$  の運動エネルギースペクトルと同等であることを注意しておく. それゆえ, 上で述べた減衰性 CHM-AM 乱流の赤外領域スペクトルの結果は互いに無矛盾である.

Tran & Dritchel<sup>(32)</sup> は SQG 方程式と 2 次元 Euler 方程式の大規模スケールを特徴づける力学量の発展を考察することによって, 大規模スケールの力学を研究している. 彼らは Cauchy-Schwarz の不等式を用いて, SQG 系と Euler 系の流れ関数の Fourier モードの発展の上限値を導いていた. 彼らの結果は, SQG 系と Euler 系で小さい波数における運動エネルギースペクトルが, それぞれ  $k^5$ ,  $k^3$  であることを示唆している. 2 次元 Euler 系の結果は, 赤外領域スペクトル  $k^3$  に一致する. しかしながら, SQG 系のスペクトルは未だ数値シミュレーションで確かめられない.

上で述べたように, 一般化された 2 次元流体系の 3 つのメンバーの減衰性乱流の赤外領域スペクトルは調べられてきたが, 任意の  $\alpha$  におけるそれらの研究はまだ行われていない. 赤外領域の力学は, この領域が多くのエネルギーやエンストロフィーを蓄積していることから, 基本的に重要である. さらに, この力学は減衰性乱流の不変量の存在を含んでいること, スペクトルの普遍的な関数形が存在する, という点でも重要である. 本研

究では、我々は赤外領域のエンストロフィースペクトルが  $\alpha$  の値によらず

$$Q_\alpha(k) = \frac{Jk}{4\pi} + \frac{\hat{L}k^3}{4\pi} + \frac{\hat{I}k^5}{16\pi} + \dots, \quad (7)$$

となること、さらに  $J$  と  $\hat{L}$  が減衰性  $\alpha$  乱流の不変量であることも示す。

赤外領域のエンストロフィースペクトルの理論的解析に関して、我々は Basdevant *et al.*<sup>(1)</sup> (以降 BLS78 と略記する) の研究に従う。彼らは EDQNM 完結近似方程式を用いて減衰性 2DNS 乱流においてエネルギースペクトル  $E_2(k \rightarrow 0) \sim k^3$  を導いた。彼らの方法は Iwayama *et al.*<sup>(16)</sup> において減衰性 CHM-AM 乱流の赤外領域全エネルギースペクトルを導くことにも使用された。赤外領域スペクトルの導出には他に 2つの方法がある: TFM を使う方法<sup>(19)</sup> と Kármán-Howarth 方程式を使う方法<sup>(7)</sup> である。EDQNM 近似方程式と TFM は Fourier 空間における方程式で構成されているのに対し Kármán-Howarth 方程式は物理空間における量で書かれた方程式である。(1) に含まれる分数冪 Laplacian  $(-\nabla^2)^{\alpha/2}$  は Fourier 変換により  $k^\alpha$  と簡単に表現できる。そこで、EDQNM 近似方程式と TFM は現在の系における赤外領域スペクトルの導出において Kármán-Howarth 方程式よりも使いやすいただろう。さらに、一般化された 2次元流体系の EDQNM 方程式系は Burgess & Shepherd<sup>(4)</sup> によって既に導かれているのに対して、現在の系における TFM はまだ得られていない。さらに、EDQNM 方程式は完結近似方程式の中で Kolmogorov スペクトルが導け、なおかつ扱いやすい方程式系であることが知られている。それゆえ我々はこの研究で EDQNM 方程式を用いた BLS78 に従うことにする。

上で述べたように一般化された 2次元流体系の研究の意義は 2つあるが、本研究の重要性は、地球流体力学的側面というよりも、純粋に物理学的な側面にある。地球流体力学的な流れに対しては、惑星の自転が重要な役割を果たすことは知られている。惑星の自転は、Rossby 波の伝播が原因で流れの構造を非等方的にする。さらに、惑星の自転は大きなスケールに影響を与えるので、赤外領域は乱流領域というよりもむしろ、Rossby 波が重要な役割を果たす領域である。しかしながら、惑星の自転を表す項、即ちベータ項、は (1) には含まれていない。このような観点から、本研究は純粋に物理学的な興味に基づいている。

この論文は以下のように構成されている。§ 2 では、一般化された 2次元流体系における EDQNM 理論を簡潔に紹介する。§ 3 では、我々は BLS78 の方法に従って減衰性  $\alpha$  乱流の赤外領域エンストロフィースペクトルの冪則の指数を導く。§ 4 では、(1) の直接数値シミュレーションから、理論的な予測の正当性を立証する。§ 5 で本研究と過去の研究との関係について触れた後、§ 6 で結果をまとめる。

## 2 定式化

我々は一辺が  $L$  の正方形で、二重周期境界条件を満たす領域に閉じ込められた系を考察することにする。さらに (1a) の粘性項  $\mathcal{D}$  は超粘性項、

$$\mathcal{D} = -\nu_p(-\nabla^2)^p q, \quad (8)$$

であり、強制項  $\mathcal{F}$  はゼロと設定する。超粘性係数  $\nu_p$  と粘性の階数  $p$  は共に正の量である。このとき、流れ関数と渦度を Fourier 級数によって表現すると、支配方程式 (1) の Fourier 空間版は

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \nu_p k^{2p} \right) \hat{q}(\mathbf{k}) = \sum_l \sum_m \delta_{\mathbf{k}+l+\mathbf{m}, \mathbf{0}} \frac{\mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{m}) (l^\alpha - m^\alpha)}{2l^\alpha m^\alpha} \hat{q}^*(\mathbf{l}) \hat{q}^*(\mathbf{m}), \quad (9a)$$

$$\hat{q}(\mathbf{k}) = -k^\alpha \hat{\psi}(\mathbf{k}), \quad (9b)$$

である。ここで  $\hat{\psi}(\mathbf{k})$ ,  $\hat{q}(\mathbf{k})$  はそれぞれ波数ベクトル  $\mathbf{k} = 2\pi\mathbf{n}/L$  をもつ、 $\psi$ ,  $q$  の Fourier 係数で、総和は全ての整数ベクトル  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ ,  $(n_x, n_y \in \mathbb{Z})$  に渡ってとるものとする。さらに、 $k = |\mathbf{k}|$ ,  $l = |\mathbf{l}|$ ,  $m = |\mathbf{m}|$  で

ある。星印は複素共役を表す。時間の変数は、記述の簡潔性のため省略している。  $L \rightarrow \infty$  のとき、Fourier 級数は Fourier 変換に置き換わる。

エンストロフィースペクトル  $Q_\alpha(k)$  の発展は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu_p k^{2p}\right) Q_\alpha(k) = T_\alpha^{\mathcal{Q}}(k), \quad (10)$$

によって支配される。  $T_\alpha^{\mathcal{Q}}(k)$  はエンストロフィー伝達関数である。エンストロフィー伝達関数  $T_\alpha^{\mathcal{Q}}(k)$  は三波エンストロフィー伝達関数  $T_\alpha^{\mathcal{Q}}(k, l, m)$  を用いて、

$$T_\alpha^{\mathcal{Q}}(k) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty T_\alpha^{\mathcal{Q}}(k, l, m) dl dm, \quad (11)$$

と書くことができる。  $T_\alpha^{\mathcal{Q}}(k, l, m)$  は  $\mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{m} = \mathbf{0}$  を満たす波数ベクトル間で詳細釣り合,  $T_\alpha^{\mathcal{Q}}(k, l, m) + T_\alpha^{\mathcal{Q}}(l, m, k) + T_\alpha^{\mathcal{Q}}(m, k, l) = 0$ , を満たし,  $l$  と  $m$  に関して対称,  $T_\alpha^{\mathcal{Q}}(k, l, m) = T_\alpha^{\mathcal{Q}}(k, m, l)$ , である。そこで、エンストロフィーフラックス、

$$\Pi_\alpha^{\mathcal{Q}}(k) = \int_k^\infty T_\alpha^{\mathcal{Q}}(k') dk', \quad (12)$$

は2つの部分に分けることができる、<sup>(18)</sup>

$$\Pi_\alpha^{\mathcal{Q}(+)}(k) = \int_k^\infty dk' \int_0^k dl \int_0^l dm T_\alpha^{\mathcal{Q}}(k', l, m), \quad (13a)$$

$$\Pi_\alpha^{\mathcal{Q}(-)}(k) = \int_0^k dk' \int_k^\infty dl \int_k^l dm T_\alpha^{\mathcal{Q}}(k', l, m). \quad (13b)$$

$\Pi_\alpha^{\mathcal{Q}(+)}(k)$  は  $l$  と  $m$  が共に  $k$  よりも小さいような相互作用により、 $k$  よりも大きな波数への正味のエンストロフィー流入であり、一方  $\Pi_\alpha^{\mathcal{Q}(-)}(k)$  は  $l$  と  $m$  が共に  $k$  よりも大きいような相互作用により  $k$  よりも小さな波数への正味のエンストロフィー流入である。

準正規 Markov 化近似<sup>(4), (22)</sup> を用いると、三波エンストロフィー伝達関数はエンストロフィースペクトルを用いて

$$T_\alpha^{\mathcal{Q}}(k, l, m) = \frac{2k^{\alpha+2}}{\pi l m} \theta_{klm} \left[ 2a_{klm} \frac{k}{(lm)^\alpha} Q_\alpha(l) Q_\alpha(m) - b_{klm} \frac{l}{(mk)^\alpha} Q_\alpha(m) Q_\alpha(k) - b_{kml} \frac{m}{(kl)^\alpha} Q_\alpha(k) Q_\alpha(l) \right], \quad (14)$$

と書ける。ここで  $T_\alpha^{\mathcal{Q}}(k, l, m)$  は  $k, l, m$  が三角形  $\mathbf{k} = \mathbf{l} + \mathbf{m}$  を形成できるような  $(l, m)$  平面の領域の外側ではゼロであるとする。

$$a_{klm} = \frac{b_{klm} + b_{kml}}{2}, \quad (15a)$$

$$b_{klm} = 2 \frac{(l^\alpha - m^\alpha)(k^\alpha - m^\alpha)\sqrt{1-x^2}}{k^{\alpha+2}(lm)^{\alpha-2}}, \quad (15b)$$

$$b_{kml} = 2 \frac{(m^\alpha - l^\alpha)(k^\alpha - l^\alpha)\sqrt{1-x^2}}{k^{\alpha+2}(lm)^{\alpha-2}}, \quad (15c)$$

は幾何学的因子で  $x$  は三角形の長さ  $k$  の辺と向かい合う内角の余弦である。即ち、

$$x = \frac{\mathbf{l} \cdot \mathbf{m}}{lm}. \quad (16)$$

関数  $\theta_{klm}$  は三波  $(k, l, m)$  に伴う 3 次モーメントの緩和時間であり, その関数形は理論ごとに異なる.  $\theta_{klm}$  に渦減衰の効果を導入した近似が存在し, それは渦減衰準正規 Markov 化 (EDQNM) 近似<sup>(22)</sup> と参照される. その近似では  $\theta_{klm}$  は以下のように表現される:

$$\theta_{klm} = \frac{1}{\mu_{klm}}, \quad (17a)$$

$$\mu_{klm} = \mu_k + \mu_l + \mu_m, \quad (17b)$$

$$\mu_k = \mu [k^{5-2\alpha} Q_\alpha(k)]^{1/2}. \quad (17c)$$

方程式 (17c) は, エネルギー散逸率  $\epsilon$  もしくはエンストロフィー散逸率  $\eta$  を Burgess & Shepherd<sup>(4)</sup> の (2.3a) と (2.3b) から消去し, エネルギースペクトルとエンストロフィースペクトルの間の関係式,

$$Q_\alpha(k) = k^\alpha E_\alpha(k), \quad (18)$$

を使うことにより得られる. (17c) における比例係数  $\mu$  は今のところ未定である. しかしながら次の節で見ると BLS78 により提唱された赤外領域のエンストロフィースペクトルの導出は  $\mu$  の関数形に独立である. 通常の完結方程式はエネルギースペクトルを用いて書かれていることを注意しておく. しかしながら, 我々は赤外領域のエンストロフィースペクトルを導くので, エンストロフィー伝達関数をエンストロフィースペクトルで表現している.

### 3 $\alpha$ 乱流の赤外領域におけるエンストロフィースペクトルの導出

この節では, BLS78<sup>(1)</sup> によって提唱された方法で減衰性  $\alpha$  乱流の赤外領域におけるエンストロフィースペクトルを導出する. 彼らの方法では, 赤外領域におけるエンストロフィー伝達関数  $T_\alpha^\mathcal{Q}(k)$  の波数依存性が赤外領域のエンストロフィースペクトルの形に直接反映する.

BLS78<sup>(1)</sup> による方法は以下のようにまとめられる:<sup>(16), (22)</sup>

1.  $\mathbf{k} = \mathbf{l} + \mathbf{m}$  を満たす三波波数  $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}$  間の相互作用は 2 つのカテゴリーに分類できる:  $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}$  の全てが同じ程度の大きさのものと, そのうちの一つの大きさが他のものの大きさに比べて非常に小さい場合, の 2 つである. 前者は局所相互作用, 後者は非局所相互作用と参照される. これらを用いて, エンストロフィー伝達関数  $T_\alpha^\mathcal{Q}(k)$  は 2 つの部分に分解できる:  $T_\alpha^\mathcal{Q}(k) = T_{\alpha\text{L}}^\mathcal{Q}(k) + T_{\alpha\text{NL}}^\mathcal{Q}(k)$ .  $T_{\alpha\text{L}}^\mathcal{Q}(k)$  は局所相互作用から構成されており  $T_{\alpha\text{NL}}^\mathcal{Q}(k)$  は非局所相互作用から構成されている.
2. 赤外領域では  $k \ll l \simeq m$  である引き伸ばされた三波による非局所相互作用が支配的であると仮定する. このとき, 相互作用している 2 つの波数の比で小さなパラメータ  $\epsilon \equiv k/l$  を導入し,  $T_{\alpha\text{NL}}^\mathcal{Q}(k)$  を  $\epsilon$  の冪級数展開を用いて表現する.
3. 実際の計算はエンストロフィーフラックス  $\Pi_\alpha^\mathcal{Q}(k)$  を使って行う. エンストロフィー伝達関数  $T_{\alpha\text{NL}}^\mathcal{Q}(k)$  を直接計算する代わりに, エンストロフィーフラックスの非局所部分  $-\Pi_{\alpha\text{NL}}^{\mathcal{Q}(-)}(k)$  を計算する. これは  $\Pi_{\alpha\text{NL}}^\mathcal{Q}(k)$  と等価である. なぜならば引き伸ばされた三波  $k \ll l \simeq m$  は  $\Pi_{\alpha\text{NL}}^{\mathcal{Q}(+)}(k)$  へは寄与できないからである. このことを別の言葉で述べると,  $\Pi_{\alpha\text{NL}}^{\mathcal{Q}(+)}(k)$  は幾何学的に禁止されているのである. 結果として得られたエンストロフィーフラックスを波数に関して微分することにより, エンストロフィー伝達関数の非局所部分が得られる. このとき, エンストロフィー伝達関数の波数依存性は赤外領域のエンストロフィースペクトルの関数形を与える.

上記の方法に従って,  $\alpha$  乱流の赤外領域におけるエンストロフィースペクトルを導く.  $\Pi_\alpha^{\mathcal{Q}(-)}(k)$  の非局所部分は,

$$\Pi_{\alpha\text{NL}}^{\mathcal{Q}(-)}(k) \equiv \int_0^k dk' \int_{\text{sup}(k, k'/\epsilon)}^\infty dl \int_{l-k'}^l dm T_\alpha^\mathcal{Q}(k', l, m), \quad (19)$$

で与えられる。ここで  $\epsilon = k'/l$  であり、 $m$  に関する積分の下限は幾何学的な束縛で決まる。余弦定理、

$$m^2 = k'^2 + l^2 - 2k'lz, \quad (20)$$

を用いて (19) における  $m$  に関する積分を  $z$  に関する積分に変換する。ここで  $z$  は  $\mathbf{k}' = \mathbf{l} + \mathbf{m}$  の三角形で  $\mathbf{m}$  と対面する内角の余弦、即ち、

$$z = \frac{\mathbf{k}' \cdot \mathbf{l}}{k'l}, \quad (21)$$

である。このとき、(19) は、

$$\Pi_{\alpha \text{ NL}}^{\mathcal{Q}(-)}(k) = \int_0^k dk' \int_{\text{sup}(k, k'/\epsilon)}^{\infty} dl \int_{k'/(2l)}^1 dz \frac{k'l}{m} T_{\alpha}^{\mathcal{Q}}(k', l, m), \quad (22)$$

と書き換えられる。次に (22) における被積分関数を小さなパラメター  $\epsilon$  で展開する。 $\epsilon$  の最低次の項で、三波エントロフィー伝達関数  $T_{\alpha}^{\mathcal{Q}}(k', l, m)$  は、

$$\begin{aligned} T_{\alpha}^{\mathcal{Q}}(k', l, m) &\simeq \frac{4z^2\sqrt{1-z^2}}{\pi} \theta_{k'll} \times \\ &\left[ \alpha^2 l^{-(2\alpha+1)} \{Q_{\alpha}(l)\}^2 k'^4 - \alpha l^{-\alpha} \left\{ \frac{\partial \{lQ_{\alpha}(l)\}}{\partial l} - 2Q_{\alpha}(l) \right\} k'^{3-\alpha} H(\alpha) Q_{\alpha}(k') \right. \\ &\quad \left. + \alpha l^{-2\alpha} \left\{ \frac{\partial \{lQ_{\alpha}(l)\}}{\partial l} - (\alpha+2)Q_{\alpha}(l) \right\} k'^3 H(-\alpha) Q_{\alpha}(k') \right], \end{aligned} \quad (23)$$

と表現される。 $H(x)$  は Heaviside の階段関数である。(23) を (22) へ代入し、 $z$  に関する積分を行い、結果として得られる方程式を  $k$  で微分すると、最終的に、

$$\begin{aligned} T_{\alpha \text{ NL}}^{\mathcal{Q}}(k) &= -\frac{\partial \Pi_{\alpha \text{ NL}}^{\mathcal{Q}(-)}(k)}{\partial k} \\ &\simeq \frac{\alpha^2}{4} \left[ \int_{k/\epsilon}^{\infty} \theta_{kll} l^{-(2\alpha+1)} \{Q_{\alpha}(l)\}^2 dl \right] k^5 - 2\nu_{\text{T}}^{(+)}(k) k^{4-\alpha} H(\alpha) Q_{\alpha}(k) - 2\nu_{\text{T}}^{(-)}(k) k^4 H(-\alpha) Q_{\alpha}(k), \end{aligned} \quad (24a)$$

を得る。ここで、

$$\nu_{\text{T}}^{(+)}(k) \equiv \frac{\alpha}{8} \int_{k/\epsilon}^{\infty} \theta_{kll} l^{-\alpha} \left[ \frac{\partial \{lQ_{\alpha}(l)\}}{\partial l} - 2Q_{\alpha}(l) \right] dl, \quad (24b)$$

$$\nu_{\text{T}}^{(-)}(k) \equiv \frac{|\alpha|}{8} \int_{k/\epsilon}^{\infty} \theta_{kll} l^{-2\alpha} \left[ \frac{\partial \{lQ_{\alpha}(l)\}}{\partial l} - (\alpha+2)Q_{\alpha}(l) \right] dl, \quad (24c)$$

である。 $z$  に関する積分は、

$$\int_{2k'/l}^1 z^2 \sqrt{1-z^2} dz \simeq \int_0^1 z^2 \sqrt{1-z^2} dz = \frac{\pi}{16}, \quad (25)$$

を用いた。 $\nu_{\text{T}}^{(+)}(k)$  と  $\nu_{\text{T}}^{(-)}(k)$  は 2D NS 方程式系に関して Kraichnan<sup>(19)</sup> によって導かれた乱流粘性の  $\alpha$  乱流版である。

(24a) の右辺の第 2 項と第 3 項は赤外領域では無視される、なぜならば減衰性乱流では  $k \rightarrow 0$  の極限で、 $Q_{\alpha}(k) \rightarrow 0$  だからである。さらに、(10) の左辺第 2 項の粘性減衰項も赤外領域では無視される。このとき、(10) は

$$\frac{\partial Q_{\alpha}(k)}{\partial t} \simeq \frac{\alpha^2}{4} \left[ \int_{k/\epsilon}^{\infty} l^{-(2\alpha+1)} \theta_{kll} \{Q_{\alpha}(l)\}^2 dl \right] k^5, \quad (26)$$

になる. ここで (24a) における積分は, 積分の下限にほとんど依存しないであろう. なぜならこの積分はエネルギー保持領域で支配的な値をとるからである.

一方, エンストロフィースペクトル  $Q_\alpha(k)$  は 渦度の相関関数の Hankel 変換を使って

$$Q_\alpha(k) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \langle qq' \rangle kr J_0(kr) dr, \quad (27)$$

と表現できる. ここで, 我々は渦度場の一様性と等方性を仮定している. さらに,  $J_0(x)$  は 0 次の第 1 種 Bessel 関数である. このとき, エンストロフィースペクトルは (7) のように級数展開で表現することができる. (7) を (26) に代入することにより,

$$\left\{ \frac{k}{4\pi} \frac{dJ}{dt} + \frac{k^3}{4\pi} \frac{d\hat{L}}{dt} + \frac{k^5}{16\pi} \frac{d\hat{I}}{dt} + \dots \right\} \simeq \left\{ \int_{k/\epsilon}^\infty l^{-(2\alpha+1)} \theta_{kl} \{Q_\alpha(l)\}^2 dl \right\} k^5, \quad (28)$$

を得る. (28) は  $J, \hat{L}$  がこの系の不変量であることを示している. さらに (28) の右辺の中括弧内の量は正定値なので,  $\hat{I}$  が時間の増加関数であることもわかる. 初期条件において  $J = \hat{L} = 0$  であるならば, 赤外領域におけるエンストロフィースペクトルは,

$$Q_\alpha(k) \sim k^5, \quad (29)$$

となる. 一方,  $Q_\alpha(k \rightarrow 0) \sim Jk, Q_\alpha(k \rightarrow 0) \sim \hat{I}k^3$  の初期スペクトルからの発展では, これらの形は保持され, 徐々に  $\hat{I}k^5$  のスペクトルによって高波数側から浸食されることもわかる.

次節では  $\alpha$  乱流の直接数値シミュレーションを行い, 結果として得られるエンストロフィースペクトルについて調べる.

## 4 数値実験

### 4.1 数値実験の概要

この節では (1) に従う減衰性乱流の直接数値シミュレーションについて報告する. まず初めに数値計算法, 採用した初期条件, 計算の解像度などの要点を述べる.

倍精度で解像度  $N^2$  の擬スペクトル法を用いてシミュレーションを行った. ここで,  $N^2$  は計算領域  $[0, L] \times [0, L]$  内の格子点の数である. 我々は  $N = 4096$  を採用した. スペクトルの低波数域の広さを確保するため, 領域のサイズ  $L = 8\pi$  を採用している. そこで最少波数は 0.25 である. 切断波数  $k_T$  は位相シフト法<sup>(5)</sup> もしくは 2/3-dealiasing 法によって決定した. そこで, 位相シフト法では  $k_T = 482$ , 2/3-dealiasing 法では  $k_T = 341$  である. このときの格子間隔の大きさは, 領域サイズ  $L = 2\pi$  で  $N = 1024$  の解像度の計算と等価である.

時間積分は, 可変時間ステップの 2 次精度 Adams-Bashforth スキームを採用した. 粘性項は積分因子を用いて陰的に計算される. 時間間隔  $\Delta t$  は Courant–Friedrich–Lewy 条件によって決められる. Courant 数  $C$  は  $C = 0.1$  とした. 粘性項 (8) は  $p = 1$  の通常粘性を採用した.

初期条件は, 渦度の各 Fourier 成分  $\hat{q}(\mathbf{k})$  の位相に対して, 0 から  $2\pi$  の間の一様乱数を生成することにより作った. エネルギーの初期値を 0.1 に規格化しており, 初期エンストロフィースペクトルの形は,

$$Q_\alpha(k) \propto k^s \exp \left[ -\frac{|s|}{2} \left( \frac{k}{k_p} \right)^2 \right], \quad (30)$$

である. ここで  $k_p = 50$  で  $s$  の値は 1, 3, 5 もしくは 7 である. これらの初期条件は以前の研究<sup>(6),(8),(23),(25)</sup> で使用されたものと同じである. 結果の統計的収束性を向上させるために, 全てのケースについて 8 個のアンサンブル平均をとっている.



我々は Reynolds 数を

$$Re = \frac{\sqrt{2\mathcal{K}}\ell}{\nu_1}, \quad (31)$$

と定義している.  $\ell$  は  $\ell \equiv (\mathcal{E}_\alpha/\mathcal{Q}_\alpha)^{1/\alpha}$  で定義される長さスケールである. これは以前の 2DNS 乱流の研究で使用された Reynolds 数<sup>(6),(23),(25)</sup> の  $\alpha$  乱流への自然な拡張である. さらに我々はエンストロフィー散逸波数  $k_d$  を

$$k_d \equiv \left(\frac{\eta}{\nu_p^3}\right)^{1/\{2(\alpha+3p-2)\}}, \quad (32)$$

と定義している. ここで,  $\eta$  はエンストロフィー散逸率である.

全ての計算は初期 Reynolds 数  $Re = 100$  で行った. この初期 Reynolds 数も赤外領域スペクトルの以前の研究<sup>(8),(25)</sup> の初期 Reynolds 数と同程度である. \*1 Fox & Davidson<sup>(8)</sup> で使用された最も高い初期 Reynolds 数は  $Re = 200$  であるが, 多くの計算は  $Re = 100$  で行われている. Ossia & Lesieur<sup>(25)</sup> は  $Re = 6.64$  と 131 で計算を行っている. 両論文では超粘性を採用したシミュレーションと通常粘性を採用したシミュレーションを行い, 両シミュレーションの間で赤外領域スペクトルの傾きに差がないことを示している. 初期の大規模な渦回転時間は,  $\omega_0 \equiv \sqrt{2\mathcal{Q}_2}$  を用いて,  $1/\omega_0$  ととっている. 全てのシミュレーションは  $t = 10$  まで行っている. これは  $s = 1$  を除いて  $\alpha = 1, 2, 3$  についてそれぞれ 170, 20, 2 初期渦回転時間に相当する. シミュレーションの初期条件における様々な物理量の値は表 1 にまとめられている. 初期散逸波数  $k_d(0)$  は,  $\alpha = 1$  のときにわずかに切断波数  $k_T$  を超えているが, 発展の初期の段階で  $k_d$  は急速に減少して, ほとんどのシミュレーション時間において散逸領域は解像できていることを確認している.

表 1 シミュレーションの初期条件における様々な物理量の値.

$\alpha$	$s$	$\mathcal{Q}_\alpha(0)$	$\mathcal{K}(0)$	$k_d(0)$	$\omega_0(0)$	$l_q(0)$	$k_T$
1	1	3.999	3.999	531.8	200.0	$2.505 \times 10^{-2}$	482
1	3	4.607	4.607	515.7	175.2	$2.171 \times 10^{-2}$	482
1	5	4.758	4.758	510.5	169.0	$2.102 \times 10^{-2}$	482
1	7	4.825	4.825	507.9	166.0	$2.073 \times 10^{-2}$	482
2	1	43.34	0.1	145.3	9.311	$2.505 \times 10^{-2}$	482
2	3	166.7	0.1	212.7	18.26	$2.171 \times 10^{-2}$	482
2	5	200.0	0.1	222.1	20.00	$2.102 \times 10^{-2}$	482
2	7	214.3	0.1	225.4	20.70	$2.073 \times 10^{-2}$	482
3	1	43.66	$2.680 \times 10^{-1}$	28.77	0.4488	$2.505 \times 10^{-2}$	341
3	3	3855	$1.449 \times 10^{-2}$	100.2	2.151	$2.171 \times 10^{-2}$	482
3	5	7136	$3.568 \times 10^{-3}$	133.9	2.671	$2.102 \times 10^{-2}$	482
3	7	8616	$2.815 \times 10^{-3}$	142.6	2.836	$2.073 \times 10^{-2}$	482

## 4.2 結果

図 1, 2, 3 に,  $\alpha = 1, 2, 3$  の場合の, 初期スペクトルの他に対数的に等間隔な幾つかの瞬間におけるエンストロフィースペクトルを示す.  $s = 1$  からの発展では, 全ての  $\alpha$  で最低波数付近のエンストロフィースペクトル

\*1 Fox & Davidson<sup>(8)</sup> によって使用された Reynolds 数の定義は, 本研究のものとは異なっている. しかしながら Reynolds 数の数値は互いに似通っている.

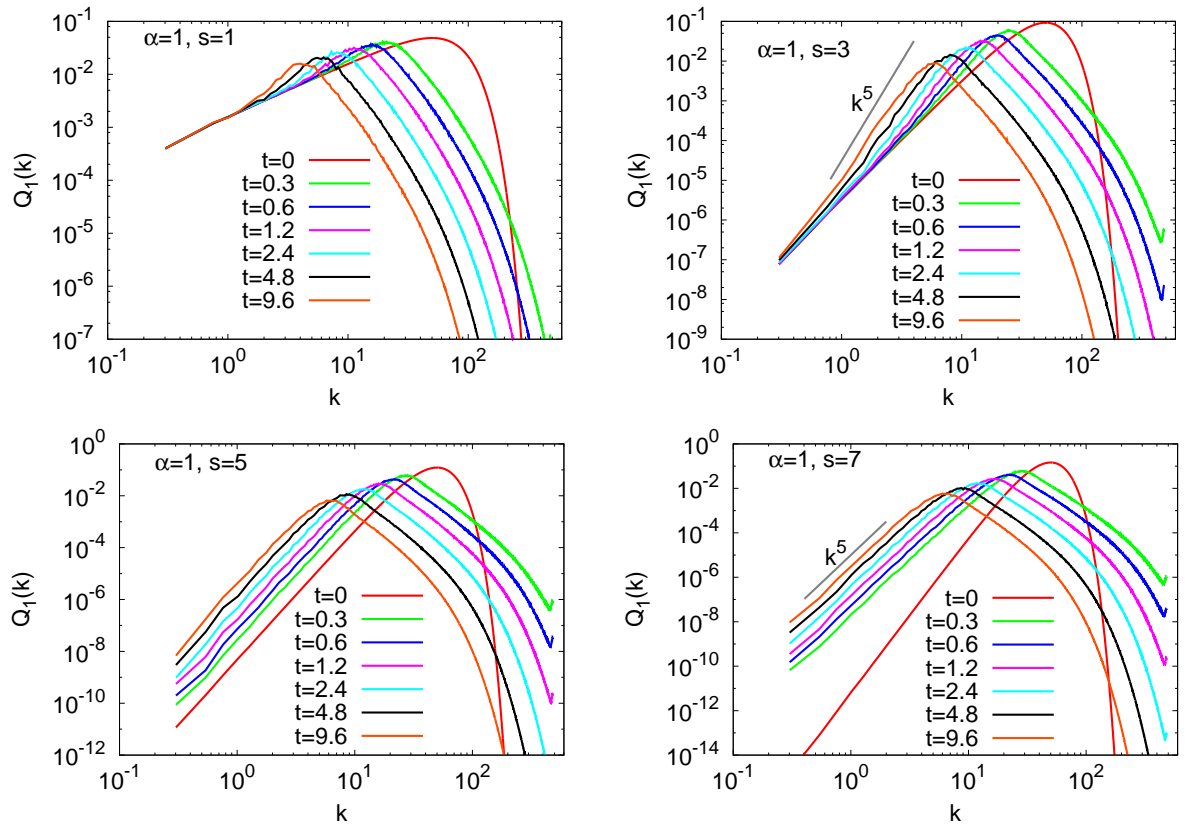


図 1  $s = 1, 3, 5$  と  $7$  に関するエンストロフィースペクトル  $Q_1(k, t)$  の時間発展.  $t = 0, 0.3, 0.6, 1.2, 2.4, 4.8, 9.6$  の場合を図示している.  $s = 1, 3, 5, 7$  は左上, 右上, 左下, 右下のパネルである.

は発展しない. このことは, (5b) で定義される  $J$  が保存していることを示している. 時間とともに, 急峻なスペクトルが高波数側から低波数側へと進行し,  $k^1$  のスペクトルを侵食している.  $\alpha = 3$  の場合には, 急峻なスペクトルの低波数側への侵食は明瞭でない.  $s = 3$  の場合も  $s = 1$  の場合と同様に, 全ての  $\alpha$  で最低波数付近のエンストロフィースペクトルはほとんど発展せず, 時間とともに急峻なスペクトルが高波数側から低波数側へと進行し,  $k^3$  のスペクトルを侵食している. これは, (5c) で定義される  $L$  が保存していることを暗示している. 高波数側から侵食してくる急峻なスペクトルは,  $\alpha = 1, 2$  の場合には  $k^5$  に近い傾きを持っている.  $\alpha = 3$  の場合には, 侵食してくるスペクトルの傾きは明瞭でない.  $s = 5$  からの発展では, 全ての  $\alpha$  で低波数側のスペクトルは  $k^5$  のまま発展し続ける.  $s = 7$  からの発展では, 全ての  $\alpha$  で発展の極めて初期の段階で素早く  $k^5$  へ漸近し, その後  $k^5$  のまま発展する. これらの結果は, §3 の結果を正当化するものである.

## 5 議論

先ず, §3 における理論的結果と, 2D NS 乱流や CHM-AM 乱流の赤外領域スペクトルに関する以前の結果が一致することを明確に示す. 次に, Tran & Dritschel<sup>(32)</sup> によって研究された SQG 系の場合と本研究を比較する. さらに, 彼らの研究の解釈と任意の  $\alpha$  を持った系への拡張についてコメントする.

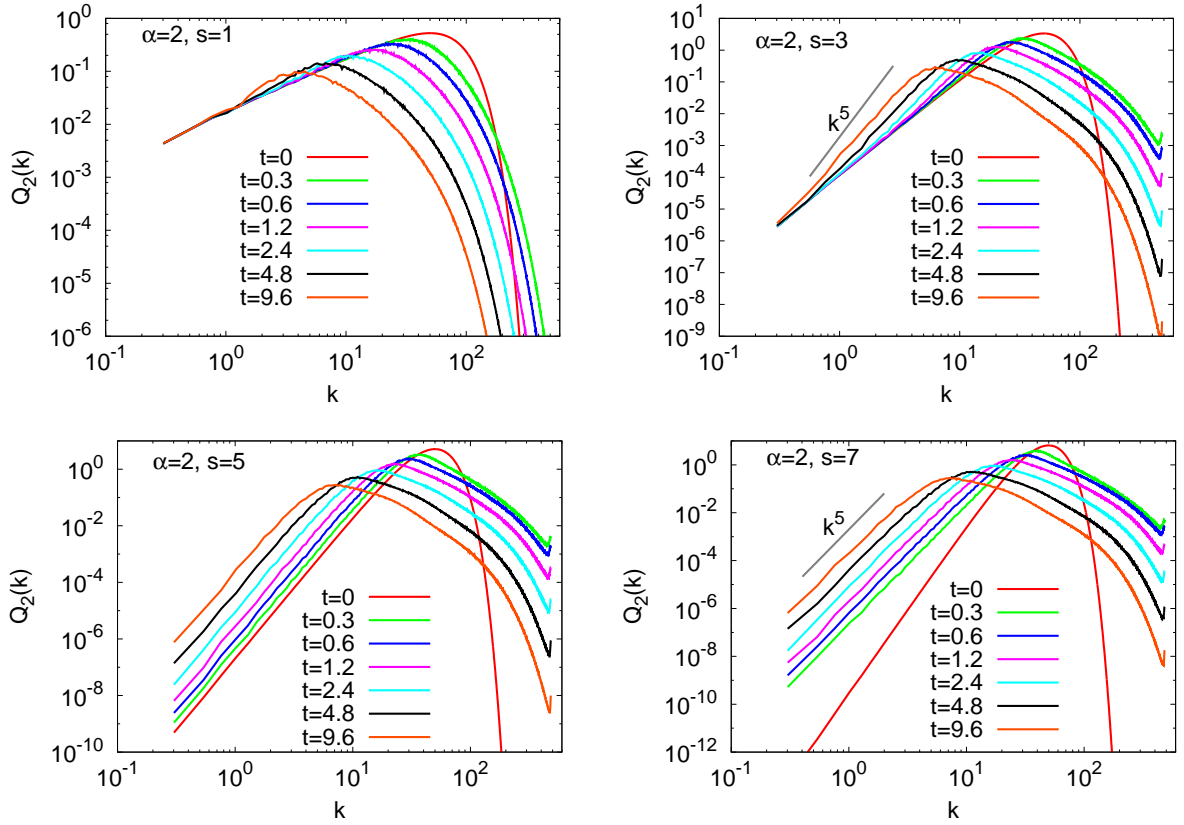


図 2  $s = 1, 3, 5$  と  $7$  に関するエンストロフィースペクトル  $Q_2(k, t)$  の時間発展.  $t = 0, 0.3, 0.6, 1.2, 2.4, 4.8, 9.6$  の場合を図示している.  $s = 1, 3, 5, 7$  は左上, 右上, 左下, 右下のパネルである.

## 5.1 $\alpha = 2$ の場合

$\alpha = 2$  に関して, エネルギー Spektral とエンストロフィースペクトルとの関係 (18) を使用すると,  $Q_2(k) \sim k^5$  の形のエンストロフィースペクトルは  $E_2(k) \sim k^3$  の形のエネルギー Spektral と等価である. したがって, 本研究で得られた赤外領域 Spektral は, NS 乱流の赤外領域 Spektral の以前の結果と一致している. さらに (18) を使用すると, (24a) と (24b) は  $\alpha = 2$  に関してそれぞれ, BLS78<sup>(1)</sup> の (2.7) 式の  $k$  微分と (2.8) にそれぞれ一致する. BLS78 では運動エネルギーを  $\overline{v^2}$  で定義しているので,  $\alpha = 2$  の (24b) と BLS78 の (2.8) を比較するときには, 後者に因子 2 を掛ける必要があることを注意しておく.

## 5.2 $\alpha = -2$ の場合

波, 散逸, 強制の効果が無視できる乱流状態において CHM 方程式は以下のように書くことができる:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi - \lambda^2 \psi) + J(\psi, \nabla^2 \psi) = 0. \quad (33)$$

ここで定数  $\lambda$  はプラズマの場合にはイオン Larmor 半径と注目する水平スケール  $\mathcal{L}$  との比, 地球流体力学の場合には Rossby の変形半径と  $\mathcal{L}$  との比である. (33) には 2 つの 2 次の非粘性不変量, 全エネルギー,  $\mathcal{E}_{\text{total}} = \left\{ (\nabla \psi)^2 + \lambda^2 \psi^2 \right\} / 2$ , とポテンシャルエンストロフィー,  $\mathcal{Z} = \left\{ (\nabla^2 \psi)^2 + \lambda^2 (\nabla \psi)^2 \right\} / 2$ , が存在す

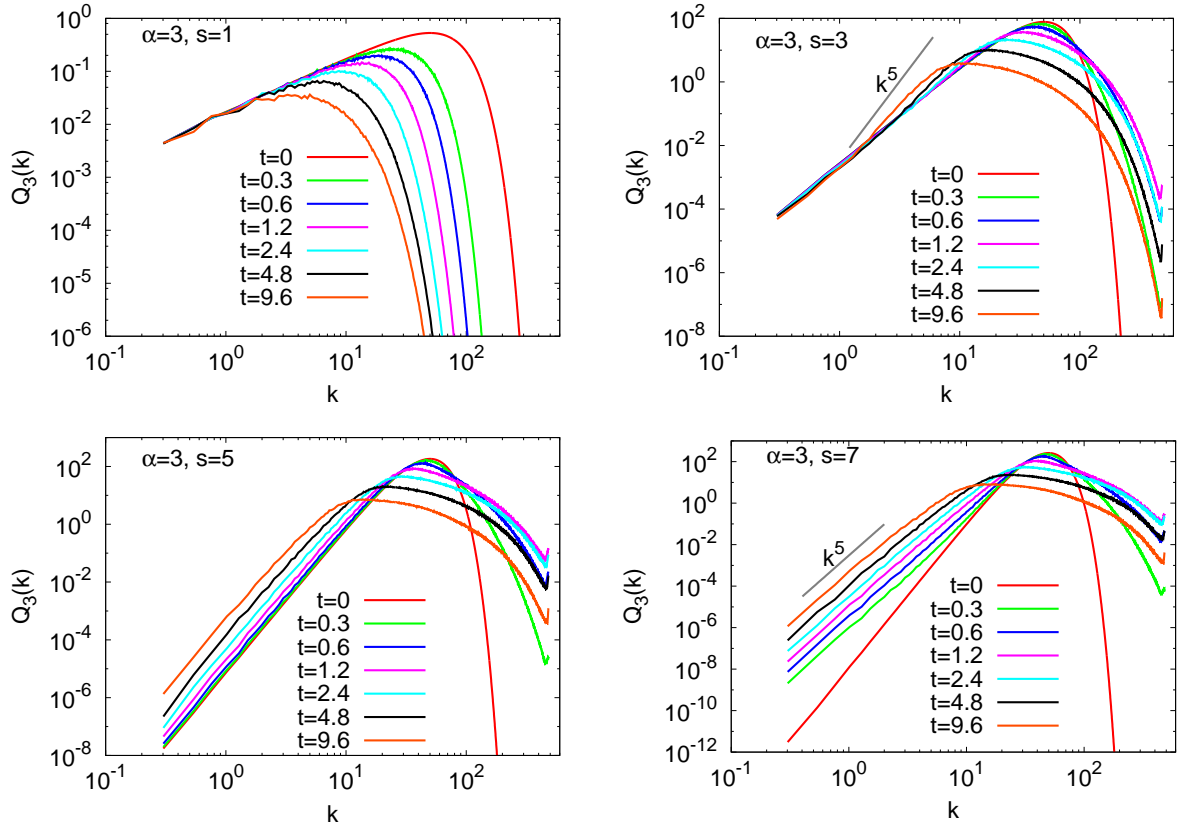


図3  $s = 1, 3, 5$  と  $7$  に関するエンストロフィースペクトル  $Q_3(k, t)$  の時間発展.  $t = 0, 0.3, 0.6, 1.2, 2.4, 4.8, 9.6$  の場合を図示している.  $s = 1, 3, 5, 7$  は左上, 右上, 左下, 右下のパネルである.

る. AM レジーム ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) では, 支配方程式 (33) は

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} + J(\nabla^2 \psi, \psi) = 0, \quad (34)$$

と書ける. ここで  $T = t/\lambda^2$  は再定義された時間である. さらに, 全エネルギーとポテンシャルエンストロフィーはそれぞれ  $\mathcal{E}_{\text{total}} \rightarrow \lambda^2 \overline{\psi^2}/2$  と  $\mathcal{Z} \rightarrow \lambda^2 \overline{(\nabla \psi)^2}/2$  になる. (1) と (34) を比較すると CHM 系の流れ関数  $\psi$  と通常の渦度  $\nabla^2 \psi$  は, それぞれ一般化された 2 次元流体系における一般化渦度と流れ関数の役割を果たす. それゆえ, 不変量  $\mathcal{E}_{\text{total}}$  と  $\mathcal{Z}$  は, それぞれ AM レジームにおいて一般化エンストロフィー  $\mathcal{Q}_{-2}$  と一般化エネルギー  $\mathcal{E}_{-2}$  に相当する. より正確には,  $\mathcal{E}_{\text{total}} = \lambda^2 \mathcal{Q}_{-2}$  と  $\mathcal{Z} = \lambda^2 \mathcal{E}_{-2}$  である. それゆえ, 本研究で導出された  $\alpha = -2$  に関する赤外領域の一般化エンストロフィースペクトル,  $Q_{-2}(k) \sim k^5$ , は, Iwayama *et al.*<sup>(16)</sup> で導出された CHM-AM 乱流の赤外領域における全エネルギー Spektrum,  $E_{\text{total}}(k) \sim k^5$ , と一致している. さらに  $\alpha = -2$  に関する一般化エンストロフィー伝達関数 (24a) と渦粘性係数 (24b) はそれぞれ Iwayama *et al.*<sup>(16)</sup> の (3.9) と (3.10) に一致する.  $\alpha = -2$  とした (24a) と (24b) と Iwayama *et al.*<sup>(16)</sup> の (3.9) と (3.10) とは  $\lambda^2$  の因子の違いがあるが, これは時間の再定義により消すことができる.

### 5.3 $\alpha = 1$ の場合

§.1 で触れたように, Tran & Dritschel<sup>(32)</sup> は SQG 系に関して小さな波数で運動エネルギー Spektrum が  $k^5$  の依存性を持つことを示した. これは本研究で導かれた  $k^5$  の赤外領域一般化エンストロフィースペクトルと等価であることを注意しておく. なぜならば, SQG 系に関して運動エネルギーは一般化エンストロフィーだ

からである:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 = \frac{1}{2}\{(-\nabla^2)^{1/2}\psi\}^2 = \mathcal{Q}_1. \quad (35)$$

ここでは, Tran & Dritschel<sup>(32)</sup> による議論を分析し, 他の  $\alpha$  の場合に対する彼らの計算の応用を考えてみる. まずはじめに彼らは流れ関数に注目した. なぜならば, それは大規模スケールを特徴づける量だからである. 彼らは注目する波数が赤外領域に属しているとか,  $k$  が小さな値であるということは使用していないことを注意しておく. このとき, 彼らは Cauchy-Schwarz の不等式と三波の関係式を使用して,  $|\hat{\psi}(\mathbf{k})|$  の時間微分の上限を, 上方に輸送され不変量である一般化エネルギー  $\mathcal{E}_\alpha$  を用いて表現した. 以前の研究<sup>(1), (16)</sup> と本研究は, 赤外領域スペクトルは, 赤外領域の波数とエネルギー/エンストロフィー保持波数との相互作用によって形成されることを示している. このような観点から, 彼らの考え方は物理的に理にかなっている. それゆえ, 我々は彼らの計算の任意の  $\alpha$  を持った系に対する適用を期待する. 実際, 我々は次元解析によって  $d|\hat{\psi}(\mathbf{k})|/dt$  を  $\mathcal{E}_\alpha$  を用いて表現できる:

$$\frac{d}{dt}|\hat{\psi}(\mathbf{k})| \sim k^{2-\alpha}\mathcal{E}_\alpha. \quad (36)$$

(36) の右辺は時間に依存しない量で表現されているので, (36) を形式的に積分し, 流れ関数のモードの発展を得る:

$$|\hat{\psi}(\mathbf{k})| \sim k^{2-\alpha}\mathcal{E}_\alpha t. \quad (37)$$

(37) を使って, 一般化エンストロフィースペクトル  $Q_\alpha(k)$  は,

$$Q_\alpha(k) \sim \frac{1}{2}k \left( k^\alpha |\hat{\psi}(\mathbf{k})| \right)^2 \sim k^5 \mathcal{E}_\alpha t^2, \quad (38)$$

と表現できる. (38) で与えられる一般化エンストロフィースペクトルの波数依存性は本研究で議論してきた赤外領域スペクトルと一致する. しかしながら,  $\alpha < 0$  に関して大規模スケールを特徴づける物理量は流れ関数  $\psi$  ではなく, 一般化渦度  $q$  であり, 上方輸送される量は一般化エネルギー  $\mathcal{E}_\alpha$  ではなく一般化エンストロフィー  $Q_\alpha$  である. それゆえ,  $\alpha < 0$  に関して, 彼らの計算が大規模な力学を表現していると解釈することは不可能である. さらに, 我々は Cauchy-Schwarz の不等式と三波の関係式だけを用いて,  $\alpha = 1, 2$  以外の場合にモードの流れ関数の発展を  $k^{2-\alpha}\mathcal{E}_\alpha$  を使って表現することはできない (詳細については Iwayama & Watanabe<sup>(15)</sup> の付録 C を参照のこと). このような理由から, Tran & Dritschel<sup>(32)</sup> の計算は  $\alpha = 1$  と  $2$  のときにのみうまくいく, といえる.

## 6 まとめ

本論文では, 減衰性  $\alpha$  乱流の低波数域に形成されるエンストロフィースペクトルに関して, 理論的, 数値実験的研究を行った.  $\alpha$  乱流方程式の EDQNM 完結近似方程式を用いた解析により, 急峻な初期スペクトルからの減衰性  $\alpha$  乱流の赤外領域には,  $\alpha$  の値に依存しない普遍的なエンストロフィースペクトル  $Q_\alpha(k) \sim k^5$  が形成されること, さらに (5b), (5c) で定義される渦度の 2 点相関関数のモーメント  $J, \hat{L}$  が保存されることが導かれた. 低波数域に十分な解像度を持った詳細な数値実験により, これらの理論的な予想を正当化する結果を得た. 過去に行われた 2DNS 乱流,<sup>(1)</sup> CHM-AM 乱流<sup>(8), (16), (36)</sup> の赤外領域スペクトルの研究はそれぞれ本研究の  $\alpha = 2, -2$  の場合と一致することも示した.

(24) で乱流粘性係数の具体的な大きさや波数依存性については言及してこなかった. もし, 乱流粘性係数が定数であるならば,  $\alpha$  の値の正負で, 乱流粘性の波数依存性が変わる.  $\alpha > 0$  のときには, 乱流粘性は  $\alpha$  に依存してエンストロフィースペクトルに対し,  $k^{4-\alpha}$  型で作用する. 一方,  $\alpha < 0$  では, 乱流粘性は  $\alpha$  の値に

よらず,  $k$  の 4 次 に 比例 する.  $\alpha$  乱流 における 乱流 粘性 係数 の 波数 依存 性 を 調 べる ため に, 2DNS 系 に対 して Kraichnan<sup>(19)</sup> によ っ て 展 開 さ れ た 乱流 粘性 の 議 論 を, 本 論 文 で 扱 っ た 系 に対 して 行 う こ と は 興 味 深 い 将 来 の 問 題 で あ る.

## 謝辞

本研究は日本学術振興会からの科学研究費 (基盤研究 (C) No. 24540472) の援助を受けて行われた.

## 参考文献

- [1] C. Basdevant, M. Lesieur, and R. Sadourny. Subgrid-scale modeling of enstrophy transfer in two-dimensional turbulence. *J. Atmos. Sci.*, Vol. 35, p. 1028, 1978.
- [2] G. K. Batchelor. Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids Suppl. II*, Vol. 12, p. 233, 1969.
- [3] W. Blumen. Uniform potential vorticity flow: Part I. theory of wave interactions and two-dimensional turbulence. *J. Atmos. Sci.*, Vol. 35, p. 774, 1978.
- [4] B. H. Burgess and T. G. Shepherd. Spectral nonlocality, absolute equilibria, and Kraichnan-Leith-Batchelor phenomenology in two-dimensional turbulent energy cascades. *J. Fluid Mech.*, Vol. 725, p. 332, 2013.
- [5] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 1988.
- [6] J. R. Chasnov. On the decay of two-dimensional homogeneous turbulence. *Phys. Fluids*, Vol. 9, p. 171, 1997.
- [7] P. A. Davidson. On the large-scale structure of homogeneous two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, Vol. 580, p. 431, 2007.
- [8] S. Fox and P. A. Davidson. Integral invariants of two-dimensional and quasigeostrophic shallow-water turbulence. *Phys. Fluids*, Vol. 20, p. 075111, 2008.
- [9] U. Frisch and P. L. Sulem. Numerical simulation of the inverse cascade in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, Vol. 27, p. 1921, 1984.
- [10] E. Gkioulekas and K. K. Tung. A new proof on net upscale energy cascade in two-dimensional and quasi-geostrophic turbulence. *J. Fluid Mech.*, Vol. 576, p. 173, 2007.
- [11] I. M. Held, R. T. Pierrehumbert, S. T. Garner, and K. L. Swanson. Surface quasi-geostrophic dynamics. *J. Fluid Mech.*, Vol. 282, p. 1, 1995.
- [12] T. Iwayama, T. G. Shepherd, and T. Watanabe. An ‘ideal’ form of decaying two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, Vol. 456, p. 183, 2002.
- [13] T. Iwayama, M. Sueyoshi, and T. Watanabe. Linear stability analysis of parallel shear flows for an inviscid generalized two-dimensional fluid system. *J. Phys. A: Math. Theor.*, Vol. 46, p. 065501, 2013.
- [14] T. Iwayama and T. Watanabe. Green’s function for a generalized two-dimensional fluid. *Phys. Rev. E*, Vol. 82, p. 036307, 2010.
- [15] T. Iwayama and T. Watanabe. Universal spectrum in the infrared range of two-dimensional turbulent flows. *Phys. Fluids*, Vol. 26, p. 025105, 2014.

- [16] T. Iwayama, T. Watanabe, and T. G. Shepherd. Infrared dynamics of decaying two-dimensional turbulence governed by the charney-hasegawa-mima equation. *J. Phys. Soc. Japan*, Vol. 70, p. 376, 2001.
- [17] R. H. Kraichnan. Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, Vol. 10, p. 1417, 1967.
- [18] R. H. Kraichnan. Inertial-range transfer in two- and three-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, Vol. 47, p. 525, 1971.
- [19] R. H. Kraichnan. Eddy viscosity in two and three dimensions. *J. Atmos. Sci.*, Vol. 33, p. 1521, 1976.
- [20] V. D. Larichev and J. C. McWilliams. Weakly decaying turbulence in an equivalent-barotropic fluid. *Phys. Fluids*, Vol. A3, p. 938, 1991.
- [21] C. E. Leith. Diffusion approximation for two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, Vol. 11, p. 671, 1968.
- [22] M. Lesieur. *Turbulence in Fluids*. Springer, 4 th edition, 2008.
- [23] A. J. Lowe and P. A. Davidson. The evolution of freely-decaying, isotropic, two-dimensional turbulence. *Euro. J. Mech. B*, Vol. 24, p. 314, 2005.
- [24] K. Ohkitani. Asymptotics and numerics of a family of two-dimensional generalized surface quasi-geostrophic equations. *Phys. Fluids*, Vol. 24, p. 095101, 2012.
- [25] S. Ossia and M. Lesieur. Large-scale energy and pressure dynamics in decaying 2d incompressible isotropic turbulence. *J. Turbul.*, Vol. 2, p. N13, 2001.
- [26] J. Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 2 nd edition, 1987.
- [27] R. T. Pierrehumbert, I. M. Held, and K. L. Swanson. Spectra of local and nonlocal two dimensional turbulence. *Chaos, Solitons Fractals*, Vol. 4, p. 1111, 1994.
- [28] N. Schorghofer. Energy spectra of steady two-dimensional turbulent flows. *Phys. Rev. E*, Vol. 61, p. 6572, 2000.
- [29] K. S. Smith, G. Boccaletti, C. C. Henning, I. Marinov, C. Y. Tam, I. M. Held, and G. K. Vallis. Turbulent diffusion in the geostrophic inverse cascade. *J. Fluid Mech.*, Vol. 469, p. 13, 2002.
- [30] J. Sukhatme and L. M. Smith. Local and nonlocal dispersive turbulence. *Phys. Fluids*, Vol. 21, p. 056603, 2009.
- [31] C. V. Tran. Nonlinear transfer and spectral distribution of energy in  $\alpha$  turbulence. *Physica D*, Vol. 191, p. 137, 2004.
- [32] C. V. Tran and D. G. Dritschel. Large-scale dynamics in two-dimensional euler and surface quasi-geostrophic flows. *Phys. Fluids*, Vol. 18, p. 121703, 2006.
- [33] C. V. Tran, D. G. Dritschel, and R. K. Scott. Effective degrees of nonlinearity in a family of generalized models of two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. E*, Vol. 81, p. 016301, 2010.
- [34] T. Watanabe and T. Iwayama. Unified scaling theory for local and non-local transfers in generalized two-dimensional turbulence. *J. Phys. Soc. Japan*, Vol. 73, p. 3319, 2004.
- [35] T. Watanabe and T. Iwayama. Interacting scales and triad enstrophy transfers in generalized two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. E*, Vol. 76, p. 046303, 2007.
- [36] S. Yanase and M. Yamada. The effect of the finite rossby radius on two-dimensional isotropic turbulence. *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 53, p. 2513, 1984.