

惑星科学通論 II/特論 II
Hamilton の原理を用いた流体力学方程式の導出に
ついて^{*1}

岩山隆寛^{*2}
(地球および惑星大気科学研究室)

2008 年 1 月 16 日

^{*1} このノートは宮原三郎教授（九州大学）との personal communication に基づいている.

^{*2} iwayama@kobe-u.ac.jp

第 1 章

Introduction

ある関数の積分が停留値をとるという形に表された原理は、変分原理と呼ばれる。自然界の法則の中には、変分原理の形で表現されるものがしばしば存在する。例えば、幾何光学における Fermert の原理、「光は最小の時間に到達するような経路を選ぶ」、がある。質点や質点系がある力の作用のもとに運動するとき実現される運動も、作用と呼ばれる積分が停留値をとる、という形で表現される。これは Hamilton の原理と呼ばれ解析力学における議論の出発点である。Hamilton の原理は、質点や質点系以外の連続体（流体）に対しても適用することができる。本稿では、流体に Hamilton の原理を適用して、流体力学の基礎方程式の導出を行う議論を紹介する。

第 2 章

質点系の力学の解析力学の復習

質量が $m^{(\alpha)}$, ($\alpha = 1, 2, \dots, N$), の N 個の質点系の運動を考える. ある時刻 t における各質点の位置ベクトルを $\mathbf{q}^{(\alpha)}(t)$ で表すことにする. また特に断りがないときには上付きのドットは時間微分を表すものとする. 即ち, $\dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)} \equiv \frac{d\mathbf{q}^{(\alpha)}}{dt}$. さらに, $\mathbf{q} \equiv (\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}, \dots, \mathbf{q}^{(N)})$ と表記する.

2.1 Hamilton の原理

N 個の質点によって構成される力学系において, $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t$ を独立変数とする関数, Lagrangian L , が与えられたとする. 質点系の運動が保存力場中, 即ち, ポテンシャル $V(\mathbf{q})$ の勾配で与えられる力場中, で運動する場合には, Lagrangian は

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m^{(\alpha)} \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)} \cdot \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)} - V(\mathbf{q}) \quad (2.1)$$

で与えられる. Lagrangian L を時間積分して得られる汎関数 I ,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (2.2)$$

は作用 (action) と呼ばれる. Lagrangian L を持つ $t_1 < t < t_2$ における力学系の運動は, $\mathbf{q}^{(\alpha)}, \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)}$ の変分に対して I が停留値を持つときである. 即ち,

$$\delta I = 0. \quad (2.3)$$

なお, ここで変分は t_1, t_2 においてゼロであると仮定する:

$$\delta \mathbf{q}^{(\alpha)}(t_1) = 0, \quad \delta \mathbf{q}^{(\alpha)}(t_2) = 0. \quad (2.4)$$

このように, 実現される運動が, 作用が停留値をとる状態であることを主張する原理は Hamilton の原理と呼ばれるものである.

2.2 Lagrange 形式

作用 I が停留値を取るという条件を微分方程式によって書き下すことにする. (2.2) の変分をとると

$$\begin{aligned}
 \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}^{(\alpha)}} \cdot \delta \mathbf{q}^{(\alpha)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)}} \cdot \delta(\dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)}) \right) dt \\
 &= \sum_{\alpha=1}^N \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)}} \cdot \delta \mathbf{q}^{(\alpha)} \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}^{(\alpha)}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)}} \right) \right\} \cdot \delta \mathbf{q}^{(\alpha)} dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}^{(\alpha)}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)}} \right) \right\} \cdot \delta \mathbf{q}^{(\alpha)} dt
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

第二式から第三式への変形は微分と変分の順序の入れ替え, 即ち,

$$\delta(\dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)}) = \frac{d\delta \mathbf{q}^{(\alpha)}}{dt}, \tag{2.6}$$

を用い, 被積分関数の第二項を部分積分した. また, 第三式から第四式へは (2.4) を用いた. 任意の変分 $\delta \mathbf{q}^{(\alpha)}$ に対して, (2.5) が成り立つためには,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}^{(\alpha)}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)}} \right) = 0 \tag{2.7}$$

が満足されなければならない. (2.7) は Euler–Lagrange 方程式と呼ばれ, Lagrangian をもつ系の発展方程式である.

実際に, Lagrangian が (2.1) で与えられる力学系の Euler–Lagrange 方程式が, Newton の運動であることを示す.

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}^{(\alpha)}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}^{(\alpha)}} \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)}} = m^{(\alpha)} \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)} \tag{2.9}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)}} \right) = m^{(\alpha)} \frac{d^2 \mathbf{q}^{(\alpha)}}{dt^2} \tag{2.10}$$

なので, (2.7) はポテンシャル V の作用のもとで運動する質点の Newton の運動方程式

$$m^{(\alpha)} \frac{d^2 \mathbf{q}^{(\alpha)}}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}^{(\alpha)}} \tag{2.11}$$

となる.

2.3 Hamilton 形式

Lagrange 形式における独立変数は、位置 $\mathbf{q}$ と速度 $\dot{\mathbf{q}}$ であった。これを位置 $\mathbf{q}$ と運動量 $\mathbf{p}$ を独立変数とする形式に変換したものが Hamilton 形式である。このとき Lagrangian の代わりとなる量が Hamiltonian である。まず Lagrangian を用いて運動量 $\mathbf{p}^{(\alpha)}$ を定義する:

$$\mathbf{p}^{(\alpha)} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)}}. \quad (2.12)$$

実際に (2.1) で与えられる Lagrangian では $\mathbf{p}^{(\alpha)} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)}} = m^{(\alpha)} \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)}$ となる。

Hamiltonian は Legendre 変換,

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \equiv \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{p}^{(\alpha)} \cdot \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (2.13)$$

によって得られる。Hamilton の原理を Hamiltonian によって表現する。まず作用は

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{p}^{(\alpha)} \cdot \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right\} dt \quad (2.14)$$

である。Hamilton の原理は,

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \mathbf{p}^{(\alpha)} \cdot \delta(\dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)}) + \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)} \cdot \delta \mathbf{p}^{(\alpha)} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}^{(\alpha)}} \cdot \delta \mathbf{q}^{(\alpha)} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{p}^{(\alpha)} \right\} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^N \left\{ -\dot{\mathbf{p}}^{(\alpha)} \cdot \delta \mathbf{q}^{(\alpha)} + \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)} \cdot \delta \mathbf{p}^{(\alpha)} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}^{(\alpha)}} \cdot \delta \mathbf{q}^{(\alpha)} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{p}^{(\alpha)} \right\} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \left(-\dot{\mathbf{p}}^{(\alpha)} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}^{(\alpha)}} \right) \cdot \delta \mathbf{q}^{(\alpha)} + \left(\dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) \cdot \delta \mathbf{p}^{(\alpha)} \right\} dt = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

ここで、第一式から第二式への変形は、以前と同様に (2.6) と部分積分、さらに (2.4) を用いた。任意の変分 $\delta \mathbf{q}^{(\alpha)}$, $\delta \mathbf{p}^{(\alpha)}$ に対して、(2.15) が成り立つためには,

$$\dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}^{(\alpha)}}, \quad (2.16a)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^{(\alpha)} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}^{(\alpha)}}, \quad (2.16b)$$

が成立する必要がある。(2.16) は Hamilton の正準方程式と呼ばれるものである。

Lagrangian を用いた形式では Euler-Lagrange 方程式 (2.7) が運動方程式に対応したのに対し、Hamiltonian を用いた形式では Hamilton の正準方程式 (2.16) が運動方程式になる。

(2.1) の系で Hamiltonian や Hamilton の正準方程式を求めてみると

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\mathbf{p}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{p}^{(\alpha)}}{2m^{(\alpha)}} + V \quad (2.17)$$

となり, Hamiltonian は系の全エネルギーに等しい. この場合の Hamilton の正準方程式を具体的に計算すると,

$$\dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)} = \frac{\mathbf{p}^{(\alpha)}}{m^{(\alpha)}}, \quad (2.18a)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^{(\alpha)} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}^{(\alpha)}}, \quad (2.18b)$$

となり, 第一式を第二式に代入すると再び保存力場の場合の Newton の運動方程式 (2.11) が得られる.

Hamilton の正準方程式は 1 階の微分方程式の組なのに対し, Euler–Lagrange 方程式は 2 階の微分方程式であるという点も Lagrange 形式と Hamilton 形式の違いのひとつである.

2.4 symplectic 形式

来年までの宿題. これを説明すると Hamilton 形式の流体力学について語れるようになる.

第 3 章

Hamilton の原理を用いた流体力学の基礎方程式の導出

Hamilton の原理を用いた流体力学の基礎方程式の導出について紹介する．ここで流体の存在する領域は無限の領域で単連結領域とする．また流体は非粘性流体とし，重力のような外力場はない状況を考える．

熱力学的関数・変数に関しては表 3.1 に示されている表記を用いることにする．熱力学

単位体積あたりの内部エネルギー	e
密度	ρ
圧力	p
単位体積あたりのエントロピー	s
温度	T

表 3.1 熱力学変数の記号の定義

の第一法則から圧力, 温度は内部エネルギーを用いてそれぞれ,

$$p = \rho^2 \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_s, \quad (3.1)$$

$$T = \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_\rho, \quad (3.2)$$

と表現できる．

Lagrange 的記述と Euler 的記述の両方で議論を行うことにする．先ず, Lagrange 的記述から議論を行い, 次に Euler 的記述の議論を行う．Lagrange 的記述は古典力学（質点系の力学）との間により対応関係があり, 質点系の議論を自然に拡張することにより流体系における議論が成功する．しかしながら, 質点系の議論の自然な拡張を Euler 的記述に適

用しても、流体力学方程式の導出は失敗する。Euler 的記述の場合には注意深い取り扱いが必要である。

3.1 Lagrange 的記述からの導出

本節では、Lagrange 的記述で議論を進めることにする。

3.1.1 復習：Lagrange 記述の流体力学

流体力学には二つの記述形式がある。ひとつは Lagrange 的記述で、もう一方は Euler 的記述である。Lagrange 的記述は仮想的な流体粒子の運動に注目した記述で、独立変数は流体粒子の初期位置 $\mathbf{a}$ と時刻 t である。 $\mathbf{a}$ は物質座標とも呼ばれる。この物質座標は流体粒子を識別する名前であり、質点系の質点の番号 α に相当するものである。質点の番号は離散的なのに対し、Lagrange 的記述の流体粒子の名前は連続的な値をとる。

Lagrange 的記述における連続の式（質量保存則）は、

$$\rho(\mathbf{x}, t)J(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = \rho(\mathbf{a}, 0) \quad (3.3)$$

と書ける。^{*1} ここで、 $J(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ は $d\mathbf{x}$ から $d\mathbf{a}$ への変数変換における Jacobian である：

$$J(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = \frac{\partial(\mathbf{x})}{\partial(\mathbf{a})}. \quad (3.4)$$

3.1.2 Hamilton の原理を用いた流体力学方程式系の導出

以上の準備のもと、Hamilton の原理を用いて流体力学方程式系を導出してみる。

まず、Lagrangian を求める。質点系の Lagrangian を参考にすると、Lagrangian は各流体粒子の運動エネルギーからポテンシャルエネルギーを引いたものとして表現される。そこで今の場合、運動エネルギーは

$$\int \frac{1}{2} \rho(\mathbf{a}) \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)^2 d\mathbf{a}$$

であり、ポテンシャルエネルギーは内部エネルギーのみである：

$$\int \rho(\mathbf{a}) e(\rho, s) d\mathbf{a}.$$

^{*1} 初期時刻に $d\mathbf{a}$ の微小体積に存在した流体粒子が、時刻 t において $d\mathbf{x}$ に移動したとする。このとき、それぞれの時刻における微小体積に含まれる質量は、質量が保存していれば等しいので、 $\rho(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x} = \rho(\mathbf{a}, 0)d\mathbf{a}$ が成り立つ。さらに、 $d\mathbf{x} = J(\mathbf{x}; \mathbf{a}) d\mathbf{a}$ を用いることにより、(3.3) が得られる。

内部エネルギー e は密度 ρ とエントロピー s の関数であり, 密度とエントロピーは $\mathbf{a}$ に依存する. 即ち, e は ρ, s を通じて, $\mathbf{a}$ に依存する. したがって, Lagrangian と作用はそれぞれ

$$L = \int \rho(\mathbf{a}) \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)^2 - e \right\} d\mathbf{a} \quad (3.5)$$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \rho(\mathbf{a}) \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)^2 - e \right\} d\mathbf{a} \quad (3.6)$$

となる.

(2.4) と同様の条件, 即ち,

$$\delta \mathbf{x}(t_1) = 0, \delta \mathbf{x}(t_2) = 0, \quad (3.7)$$

という条件の下, Hamilton の原理に基づいて (3.6) の変分がゼロであるとする:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\mathbf{a} \rho(\mathbf{a}) \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) \cdot \delta \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) - \delta e \right\} = 0. \quad (3.8)$$

被積分関数の第一項は変分と微分の順序を入れ替え, t に関して部分積分を行い, 境界条件 (3.7) を考慮すると

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\mathbf{a} \rho(\mathbf{a}) \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) \cdot \delta \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \int \rho(\mathbf{a}) \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{x} d\mathbf{a} \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \int \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{x} d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.9)$$

となる. 最後の式変形には, 連続の式 (3.3) を用いた.

一方, (3.8) の被積分関数の第二項は断熱条件のもとでは

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} dt \int \rho(\mathbf{a}) \delta e(\rho, S) d\mathbf{a} &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \int \rho(\mathbf{a}) \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_s \delta \rho d\mathbf{a} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int \rho(\mathbf{a}) \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \delta \mathbf{x} d\mathbf{a} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int p \nabla \cdot \delta \mathbf{x} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

ここで, 第一式から第二式への表現は (3.1) を用い, さらに流体粒子の変分に対する密度の変分は, Euler 形式の連続の式を Lagrange 微分を用いて表現した

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.11)$$

から,

$$\delta\rho = -\rho\nabla \cdot \delta\mathbf{x} \quad (3.12)$$

と表現できることを用いた. 第二式から第三式への変形には, 再び質量保存則 (3.3) を用い, さらに $\mathbf{x}$ に関して部分積分する. このとき無限遠方では物理量は速やかにゼロになるとすると境界値の項は消えて最終的に,

$$-\int_{t_1}^{t_2} dt \int \rho(\mathbf{a}) \delta e(\rho, S) d\mathbf{a} = -\int_{t_1}^{t_2} dt \int (\nabla p) \cdot \delta\mathbf{x} d\mathbf{x}. \quad (3.13)$$

以上をまとめると,

$$\delta I = -\int_{t_1}^{t_2} dt \int \left\{ \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} + \nabla p \right\} \cdot \delta\mathbf{x} d\mathbf{x} = 0 \quad (3.14)$$

任意の変分 $\delta\mathbf{x}$ に対して上式が成り立つためには

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.15)$$

でなければいけない. Lagrange 的記述では, $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{D}{Dt}$, $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$ なので, (3.15) はまさに非粘性流体の運動方程式

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.16)$$

である.

3.2 Euler 的記述からの導出

3.2.1 復習: Euler 的記述の流体力学

Euler 的記述では, 独立変数は空間 $\mathbf{x}$ と時間 t である. また未知変数は $\mathbf{v}$, p , s である.*2

質量保存則は Euler 的記述では,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.17)$$

である. また前節と同様に本節でも断熱過程を扱うことにする. このとき熱力学方程式はエントロピー s の Lagrange 的保存則として表現される:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0. \quad (3.18)$$

*2 熱力学変数の取り方には任意性がある. 2つの独立な熱力学関数をとればよい. ここでは密度とエントロピーとする.

3.2.2 Hamilton の原理を用いた流体力学方程式系の導出 (1)

以上の準備のもと, Hamilton の原理を用いて断熱過程における非粘性流体の基礎方程式系を導出してみる.

Lagrangian は全運動エネルギーからポテンシャルである内部エネルギーを引いた量である:

$$L = \int \left\{ \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \rho e \right\} d\mathbf{x}. \quad (3.19)$$

質量保存則とエントロピー保存則を Lagrange の未定係数法を用いて取り入れる. このとき Lagrangian (3.19) を

$$L = \int \left[\frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \rho e + \phi \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right\} + \rho \eta \left\{ \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right\} \right] d\mathbf{x} \quad (3.20)$$

と書き換える.

このとき Hamilton の原理は

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \delta \rho + \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} - e \delta \rho - \rho \delta e \right. \\ &\quad + \delta \phi \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right\} \\ &\quad + \phi \left\{ \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \delta \rho) + \nabla \cdot (\rho \delta \mathbf{v}) \right\} \\ &\quad + \eta \delta \rho \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right) \\ &\quad + \rho \delta \eta \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right) \\ &\quad \left. + \eta \rho \left(\frac{\partial \delta s}{\partial t} + \delta \mathbf{v} \cdot \nabla s + \mathbf{v} \cdot \nabla \delta s \right) \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\mathbf{x} \left[\delta \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - e - \frac{p}{\rho} - \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \nabla \phi \right) \right. \\ &\quad + \rho \delta \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} - \nabla \phi + \eta \nabla s) \\ &\quad + \delta s \left\{ -\rho T - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \nabla \cdot (\eta \mathbf{v}) \right\} \\ &\quad + \delta \phi \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right\} \\ &\quad \left. + \rho \delta \eta \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

となる．式変形には部分積分や (3.1), (3.2) を用いた．任意の変分に対して上式が成り立つためには

$$\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 - e - \frac{p}{\rho} - \frac{\partial\phi}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \nabla\phi = 0, \quad (3.22a)$$

$$\mathbf{v} - \nabla\phi + \eta\nabla s = 0, \quad (3.22b)$$

$$-\rho T - \frac{\partial\eta}{\partial t} - \nabla \cdot (\eta\mathbf{v}) = 0 \quad (3.22c)$$

が満足されなければならない．また，連続の式 (3.17) や熱力学方程式 (3.18) が再び得られた．

(3.22) には実はいくつか問題点がある．まず，速度場 $\mathbf{v}$ には通常の流体力学では見慣れない物理量 η が含まれている．例えば，速度の回転を取ると（渦度を求めると）

$$\nabla \times \mathbf{v} = -\nabla\eta \times \nabla s \quad (3.23)$$

となる．この η という変数は Clebsch 変数と呼ばれているものであるが，この物理的な意味は何か？という問題である．次に一様なエントロピーを持つ流体では (3.22b) は

$$\mathbf{v} = \nabla\phi \quad (3.24)$$

と書かれる．このような速度場は非回転である（ $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ ），即ち渦なしの流れとなる．しかしながら流体力学の知識によれば，一様なエントロピー状態のときに常に渦なしの流れになることはない．そこで上に議論した Euler 的記述の Hamilton の原理には不備があることになる．*³ 流体力学の歴史は古く，Euler や Lagrange らの時代，即ち 1700 年代までさかのぼる．一方で，Hamilton の原理や解析力学が確立したのも 1800 年代である．したがって，流体力学の変分原理は一見極めて古典的な問題のように思えるが，上に述べた Euler 的記述の Hamilton の原理の問題点が解決されたのは実は 1960 年代以降のことである．

3.2.3 Hamilton の原理を用いた流体力学方程式系の導出 (2)

前小節で説明したように，Euler 的記述を用いた場合，ナイーブに Hamilton の原理から渦ありの流体力学方程式系を導出することはできない．Lin (1965) は新たな束縛を系に課すことによって Euler 的記述でも Hamilton の原理によって渦のある流れの流体力学方程式を導出した．ここでは，Lin (1965) の議論を紹介する．

流体粒子のラベルは Lagrange 微分に対して保存されるので，系にさらに

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{a} = 0 \quad (3.25)$$

*³ 渦なしの流れに対する変分原理を用いた流体力学方程式の導出については Clebsch が行ったようであるが，原論文をたどれなかった．

という束縛条件を加えることにする．この束縛条件を Lagrange の未定係数法によって Lagrangian に加える．即ち, 新たな Lagrangian として

$$L = \int \left[\frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \rho e + \phi \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right\} + \rho \eta \left\{ \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right\} + \rho \boldsymbol{\gamma} \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{a} \right\} \right] d\mathbf{x} \quad (3.26)$$

を用いる．このとき, Hamilton の原理によって (3.22b) の代わりに,

$$\mathbf{v} - \nabla \phi + \eta \nabla s + \boldsymbol{\gamma} \cdot (\nabla \mathbf{a}) = 0 \quad (3.27)$$

が得られる．(3.22a), (3.22c) は再び得られ, 任意の $\delta \mathbf{a}$ と $\delta \boldsymbol{\gamma}$ に対して作用が停留値を取る条件として, それぞれ

$$\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{\gamma}) = 0 \quad (3.28)$$

と (3.25) が得られる．

(3.27) はエントロピー一様状態でも渦のある流れとなっている．また Hamilton の原理から得られた式を変形していくと, 非粘性流体の運動方程式に帰着される．この計算は複雑なので, 付録 A に掲載した．このようにして Euler 的記述においても Hamilton の原理から非粘性流体の支配方程式系が導出できた．なお, Lagrange 的記述の Hamilton の原理から, Hamilton 形式の議論を経て, Lagrange 的記述から Euler 的記述への正準変換を行うことにより, Euler 的記述の流体力学方程式を導くことができる．これは, Van Saarloos (1981) によって行われた．彼の議論によると, Lin (1965) の議論において新たに付け加わった束縛条件が流体粒子のラベルであることを証明した．また, 新たに付け加わった束縛条件は三つ ((3.25) はベクトルなので, 空間 3 次元では三つの束縛条件になっている) ではなく, 一つで充分であることもわかる．

付録 A

Euler 的記述の流体力学方程式の導出

Lin (1965) によって導入された束縛条件を導入した場合の Hamilton の原理の結果をまとめると,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - e - \frac{p}{\rho}, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{v} = \phi - \eta \nabla s - \gamma \cdot \nabla \mathbf{a}, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\eta \mathbf{v}) = -\rho T, \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{a}) = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \gamma) = 0, \quad (\text{A.7})$$

である. (A.2) を時間で偏微分し, (A.1) の勾配をとったものと足すと,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \underbrace{\nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + e + \frac{p}{\rho} \right)}_{\#1} \\ & + \underbrace{\frac{\partial (\eta \nabla s)}{\partial t} + \nabla (\eta \mathbf{v} \cdot \nabla s)}_{\#2} \\ & + \underbrace{\frac{\partial \gamma \cdot (\nabla \mathbf{a})}{\partial t} + \nabla [\gamma \cdot \{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a}\}]}_{\#3} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

となる.

#1 の項は (3.1), (3.2) を用いると

$$\#1 = \nabla \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + T \nabla s + \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (\text{A.9})$$

となる. #2 の項は, (A.3) と (A.5), を用いると

$$\#2 = -T \nabla s - (\mathbf{v} \cdot \nabla \eta) \nabla s + (\mathbf{v} \cdot \nabla s) \nabla \eta \quad (\text{A.10})$$

となる. #3 の項は, (A.6) を用いると,

$$\#3 = -(\nabla \mathbf{a}) \cdot \{(\mathbf{v} \cdot \nabla)\} \gamma + \{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a}\} \cdot (\nabla \gamma) \quad (\text{A.11})$$

となる. #1 から #3 をまとめると,

$$\begin{aligned} \#1 + \#2 + \#3 = & \nabla \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \\ & - \{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \eta\} \nabla s + \{(\mathbf{v} \cdot \nabla) s\} \nabla \eta \\ & - \{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \gamma\} \nabla \mathbf{a} + \{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a}\} \nabla \gamma + \frac{1}{\rho} \nabla p. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

さらに, 再び (A.2) を用いて

$$\#1 + \#2 + \#3 = \nabla \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} (\nabla \times \mathbf{v}) + \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (\text{A.14})$$

であることに注意すると, (A.8) は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (\text{A.15})$$

となる.

参考文献

- [1] Bretherton, F. P. 1970 A note on Hamilton's principle for perfect fluids. *J. Fluid Mech.* **44**, 19-31.
- [2] 宮原三郎 1996 変分原理による流体力学方程式の導出について: 個人的ノート. pp.30
- [3] Van Saarloos, W., Bedeaux, D. and Mazur, A. 1981 Hydrodynamics for an ideal fluid: Hamiltonian formulation and Liouville-Equation. *Physica* **107A**, 109–125.
- [4] Van Saarloos, W. 1981 A Canonical Transformation Relating the Lagrangian and Eulerian Description of Ideal Hydrodynamics. *Physica* **108A**, 557–566.