

惑星学基礎 III
&
惑星学基礎 III 演習

岩山 隆寛

2017 年 6 月 16 日

目次

ガイダンス	v
0.1 惑星学基礎 III	v
0.2 惑星学基礎 III 演習	vii
0.3 連絡先	viii
0.4 その他	viii
第 1 章 常微分方程式の解法の復習	1
1.1 はじめに	1
1.2 言葉の定義 (その 1)	2
1.3 変数分離法による 1 階の常微分方程式の解法	2
1.4 言葉の定義 (その 2)	3
1.5 定数係数の 2 階線形常微分方程式の解法 (1)	5
1.6 定数係数の 2 階線形常微分方程式の解法 (2)	7
1.7 非斉次型の微分方程式の解法	8
1.8 最後に...	13
1.9 演習問題	14
1.10 *定数係数の 2 階線形連立常微分方程式	19
1.11 *Sturm–Liouville 型の微分方程式	21
1.12 *微分方程式の級数解法	23
第 2 章 Fourier 級数	25
2.1 周期関数	25
2.2 Fourier 級数	26
2.3 Fourier 係数の導出	26
2.4 Fourier 級数の例	28
2.5 Fourier 級数展開に関するいくつかの注意	31
2.6 Parseval の恒等式	33

2.7	演習問題	33
第 3 章	複素 Fourier 級数	37
3.1	実 Fourier 級数からの導出	37
3.2	いくつかの注意	39
3.3	複素 Fourier 級数の例	42
3.4	Fourier 級数の応用：関数を近似する	42
3.5	演習問題	44
第 4 章	Fourier 変換と Fourier 積分	47
4.1	復習	47
4.2	Fourier 変換	48
4.3	Fourier 積分	52
4.4	まとめ	54
4.5	演習問題	54
第 5 章	Fourier 級数 (Fourier 変換) の幾何学的意味：直交関数展開	57
5.1	ベクトルの復習	57
5.2	Fourier 級数展開のココロ	59
5.3	まとめ	62
第 6 章	拡散方程式	65
6.1	拡散方程式の導出	65
6.2	拡散方程式の解法	67
6.3	Gauss 積分	71
6.4	複素関数の積分	73
6.5	(6.19) の別解	74
6.6	演習問題	75
第 7 章	波動方程式	79
7.1	d'Alembert 解	79
7.2	変数分離法を用いた波動方程式の解法の例	81
7.3	コメント	85
7.4	演習問題	86
第 8 章	Laplace-Poisson 方程式とそれに関連する話題	89
8.1	はじめに	89

8.2	曲線座標系での Laplacian	90
8.3	Laplace 方程式と特殊関数	96
8.4	Green 関数	99
8.5	演習問題	101
第 9 章	和の規約	103
9.1	表記	103
9.2	和の規約	104
9.3	Kronecker のデルタ	105
9.4	Eddington のイプシロン	106
9.5	和の規約を使ったベクトル解析の公式の証明の例	107
9.6	演習問題	108
第 10 章	複素解析	111
10.1	複素数の復習	111
10.2	正則関数	112
10.3	Cauchy の積分定理	115
10.4	級数展開の復習	117
10.5	留数	119
10.6	Laurent 展開に基づく留数の求め方	119
10.7	留数定理	122
10.8	複素関数積分に基づく実数関数積分	123
10.9	演習問題	125
付録 A	2 階の線形偏微分方程式の分類	127
A.1	はじめに	127
A.2	特性曲線	127
A.3	座標変換	129
付録 B	Laplace 変換	133
B.1	定義	133
B.2	Laplace 変換の幾つかの例	135
B.3	Laplace 変換を用いた微分方程式の解法 ~例題~	135
付録 C	熱力学の数学	137
C.1	状態方程式	137

C.2	Jacobian	139
-----	--------------------	-----

ガイダンス

0.1 惑星学基礎 III

0.1.1 講義内容

本講義の目的は，惑星学^{*1}の勉強や研究において必要な数学を解説することである．同じ目的の講義として，1年次に開講されている惑星学基礎 I & 演習および惑星学基礎 II & 演習がある．本講義はその後行科目である．^{*2}

自然科学（特に物理学^{*3}）の大きな特徴の一つは，現象の未来を定量的に予測することができる点であろう．自然現象を支配している法則を，微分方程式の形に書き下し，それを解くことによって，現象の未来が予測できるのである．そこで，微分方程式を解くことが必要になってくる．振り子の運動や天体の運動は時間に関する微分を含んだ常微分方程式^{*4}で書かれる．常微分方程式の解法については既に惑星学基礎 I で学んでいる．惑星学では，空間的に広がった物理量（たとえば，気圧の空間分布，温度の空間分布など）の時間発展も研究の対象にする．それを支配する方程式は時間微分と空間微分の両方を含んだ偏微分方程式の形で書かれる．本講義では，この偏微分方程式を解く手法や，それに関連する話題を解説する．

先ず，既に惑星学基礎 I で習ったが常微分方程式の解法を復習をしておく．偏微分方程式を解くためには，変数分離や直交関数展開（本講義の主題の一つである Fourier 級数・Fourier 変換を一般化した概念）といった方法を用いて偏微分方程式を常微分方程式に書き直して解くことが一般的である．したがって偏微分方程式を解く場合にも，常微分方程式の解法を知っておく必要があり，そのため常微分方程式の解法をまず復習する．

次に，偏微分方程式の解法やデータ解析に用いられる Fourier 級数，Fourier 変換，お

^{*1} 惑星学という学問は確立されていないが，本学科で開講されている授業科目全般や本学科の教員，本専攻の大学院生が行っている研究を指すものと解釈してほしい

^{*2} 惑星学基礎 I ~ III は，（神戸大学に限らず）物理学科で「物理数学」という名前で開講される授業科目に相当する．物理数学は，物理学において用いられる数学的手法を解説することが目的である．

^{*3} 惑星学もその一部．

^{*4} いわゆる Newton の運動方程式．

よびそれらに関連する話題について述べる。

偏微分方程式には様々なタイプの方程式があるが、本講義で対象とする偏微分方程式は、拡散方程式、波動方程式、Laplace-Poisson 方程式である。

複素数を変数とする関数の微分・積分 (複素関数論) についても時間があれば取り扱う。拡散方程式を解く際に現れる積分にこれが利用できる。

また、和の規約もしくは Einstein's notation と呼ばれる表記法も紹介する。和の規約は気象学や地震学（およびその基礎である流体力学，弾性体力学，さらに相対性理論）で用いられるものである。和の規約を用いることの利点は、これを用いると、ベクトル解析で現れる複雑な計算がたちどころに行えることである。さらにこの表記法はスカラーでもベクトルでもない量（テンソル量）の導入に必要なものである。

本講義の内容は、理論的研究，実験的研究といった研究手法に係わらず，将来物理系の研究分野で研究を行う上で必要不可欠なものであり，常識として知っておく必要がある。また，本講義で取り扱う内容は各大学の大学院入学試験において「基礎科目」の一部として頻繁に出題される。

0.1.2 参考書

本講義に関連する内容を含んだ参考書をリストアップしておく。

- 程度は高いが，大学生としては是非一度は手にとって眺めて欲しい書籍。
 - R. Courant and D. Hilbert: Method of Mathematical Physics, vol. I. Wiley, 1953. (Fourier 級数の話は chapter II. 邦訳: 数理物理学の方法, 東京図書出版)
 - A. Sommerfeld: Partial Differential Equation. Academic Press, 1949. (Fourier 級数の話は chapter I, 邦訳: 物理数学, 講談社)
 - 高木貞治: 解析概論. 岩波書店, 1983, (Fourier 級数の話は第 6 章).
 - 寺澤寛一: 自然科学のための数学概論 [増訂版], 岩波書店, 1983.
 - ポントリャーギン: 常微分方程式, 共立出版
- 初学者向け参考書
 - 和達三樹: 物理のための数学, 岩波書店.
 - 小暮陽三: なっとくするフーリエ変換, 講談社.
- 一般的程度の参考書 (微分方程式)
 - 矢野健太郎: 微分方程式, 裳華房
 - 矢野健太郎: 大学演習 微分方程式, 裳華房
 - 上記の 2 冊は，私が大学生のときに「物理数学 I」(1 年次，通年開講) 担当の先生がテキストとして指定した本である。「物理数学 I」のテキストは，こ

の本以外に安達忠次著：ベクトル解析（培風館）であった。）

- 一般的程度の参考書 (Fourier-Laplace 解析, 複素関数論)
 - 木村英紀, Fourier-Laplace 解析. 岩波講座「応用数学」, 岩波書店, 1999 年, 第 1 章.
 - 矢野健太郎, 石原繁, 解析学概論 (新版). 裳華房, 1982 年, 第 IV 部.
上記の書籍は, 私が大学生のときに「物理数学 II」(2 年次, 通年開講) 担当の先生がテキストとして指定した本である.
- 一般的程度の参考書 (物理数学全般)
 - マージナウ, マーフィ共著, 佐藤次彦, 国宗真 共訳: 物理と化学のための数学 I, II, 共立出版
上記の書籍は, 私が大学生時代に愛読した物理数学の本である. 熱力学の数学から, 微分方程式, 特殊関数, テンソル解析, 量子力学や統計力学の数学, 数値計算法まで収録した大著である.
下記の本も演習書であるが非常に便利で今もお世話になっている本である.
 - M. R. Spiegel, Advanced Calculus.Schaum's outline series, McGraw-Hill, 1962, 384 pp.

0.1.3 合否判断

授業の合否判断は, 試験の点数と演習の時間に黒板で解いた問題数に応じた点数を合計して行う. 出席点は加味しない (出席はとらない). 講義と演習は同じ成績をつける.

0.1.4 注意

惑星学基礎 III の講義の内容は惑星学基礎 III 演習で出題される問題を解くことにより, 理解が深まるので, 講義と演習の両方の授業を履修することが望ましい.

0.2 惑星学基礎 III 演習

惑星学基礎 III で取り扱った話題に関連する演習問題を自ら解くことによって, 講義への理解を深めることが演習の授業の目的である.

0.2.1 方針

- 演習問題は, 配布した講義資料の章末にある.
- 履修者は演習問題をその場で, もしくは次回以降の授業までに解いてくる. 希望者

が黒板に模範解答を示し、さらに模範解答の解説をする。教員は必要に応じてそれに対して補足説明を行う。これは人前で喋るプレゼンテーションの練習になる。なお、解答者を教員側から指名することは原則として行わない。あくまでも学生が自主的に黒板に出て模範解答を示し、解説を行う。演習の授業は学生が主体となって作って行くべきものと考えている。

0.2.2 合否判断

授業の合否判断は、試験の点数と演習の時間に黒板で解いた問題数に応じた点数を合計して行う。出席点は加味しない（出席はとらない）。講義と演習は同じ成績をつける。

0.3 連絡先

質問は授業中でも授業後でもいつでも受け付ける。連絡先は以下のとおりである。授業後に質問がある場合には、下記のメールに質問内容を送ってもよいし、私の居室に訪ねてきてもよい。不在の時があるので、居室に来るときには事前に電子メールで訪問の日時を伝えてほしい。

- 電子メール: iwayama@kobe-u.ac.jp
- 居室: 自然科学総合研究棟 3 号館西棟 502 号室

本講義の内容をテキスト形式にまとめた資料（講義ノート）を岩山のホームページ

http://www2.kobe-u.ac.jp/~iwayama/teach/teach_17.html

からダウンロードできるようにしておく。講義ノートは順次上記ページにアップロードする予定である。なお、昨年度の講義のノートは

http://www2.kobe-u.ac.jp/~iwayama/teach/teach_16.html

に掲載してある。

0.4 その他

毎年行っている授業評価アンケートによると、ここ数年の本講義、演習の改善点としては

- i) よく喋りながら板書されているので、書いてから考えて理解出来る自分にとっては、

実際の速度以上に速く感じました。一度立ち止まって考える時間があれば、もう少し全体的に理解出来ると思います。

- ii) 授業はとても有意義であった。だが、板書が速く、字が少し小さかったので写しにくかったところがありました。
- iii) 丁寧な解説でとても良いのですが、全体的なスピードが遅いように感じました。(全コンテンツおわらないのでは?) あと基礎 III 演習が教職科目とかぶっているのがとても迷惑。
- iv) 板書のスピードはちょうど良かったです。前回の復習を授業はじめにやってくれるのはとてもありがたい。
- v) 添え字が小さくて見えにくかった。
- vi) 問題を解答するのが早い者勝ちなので、授業時間中忙しいのが大変だった。予約制にすればよいと思う。
- vii) たのしかった。
- viii) 最後の授業で答がほしい。

といったものがあげられている。i)–iv) については相反する意見なのでどう対応していいか悩んでいる。速いと感じる人は、講義ノートを参考に板書を写す量を減らして講義についてきて欲しい。遅いと感じる人は、講義よりもさらに高度な内容を各自で自習するなど、上のレベルを目指して欲しい。v) については気をつけるつもりであるが、それでも見にくいときには、講義の進行にかかわらず遠慮なく指摘して欲しい。viii) については、解答があるとそれで安心してしまい自力で問題を解かなくなるでしょう。自力で問題を解くための教育的な配慮から、演習問題の解答を公開していない。もし自分で解いた解答を見て欲しい場合には遠慮なく申し出て欲しい。そのような積極的な授業への参加を歓迎する。

第 1 章

常微分方程式の解法の復習

1.1 はじめに

物理学や惑星学においては、以下のような形をした方程式が頻繁に登場する：

$$A \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + Cx = 0. \quad (1.1)$$

ここで、 t は独立変数、 x は t の未知関数で従属変数、 A, B, C は定数である。

例 1： 放射性同位元素（例えば炭素 ^{14}C ）は一定の比率（単位時間当たり α の比率）で崩壊して安定な原子になる。時刻 t における放射性同位元素の原子の数 N は次の方程式に従う：

$$\frac{dN}{dt} = -\alpha N. \quad (1.2)$$

例 2： 質量 m の質点がバネ定数 k の線形バネ^{*1}につながれている場合、質点の平衡位置からの変位 x が従う運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (1.3)$$

である。

例 3： 一様な重力場中で長さ l の伸びない紐の端に質量 m のおもりがつるされているとする。この振り子（おもり）の平衡点からの振れ角 θ が従う運動方程式は

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} + mg \sin \theta = 0 \quad (1.4)$$

である。ここで、 g は重力加速度である。なお、振れ角 θ が小さい場合には (1.4) は

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} + mg\theta = 0 \quad (1.5)$$

*1 バネの復元力が、バネの伸びに比例するバネのこと。

と近似される.

例4: 例2の系で速度に比例する抵抗が質点に働いている場合には, 質点の運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (1.6)$$

となる. ここで, $\gamma > 0$ である.

このように, (紹介したのはほんの数例であるが様々な状況で (1.1) の形で書ける微分方程式に従う系がある.

1.2 言葉の定義 (その1)

(1.1) のように微分を含んだ方程式を微分方程式という. 独立変数が1個の場合は特に常微分方程式と呼ばれる.

微分方程式に含まれる微分の最高階数をもってその微分方程式の階数という. (1.1) は $A = 0$ のとき, 1階の常微分方程式である. $A \neq 0$ の場合は (1.1) は2階の常微分方程式である.

定数を c_1, c_2, \dots, c_n で表し, これらは任意の値を取るものとする. このような定数を任意定数と呼ぶ. 微分方程式を満たす解が任意定数を含む形で表現されるとき, そのような解を一般解という. 一般解に含まれる定数に特定の値を代入して得られる解を特殊解という. 微分方程式の一般解や特殊解を求めることを微分方程式を解くという.

1.3 変数分離法による1階の常微分方程式の解法

(1.1) で $A = 0$ とした場合を含む次のような1階の常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (1.7)$$

を考える. $f(x, t)$ は x, t の既知の関数である. 特に, $f(x, t)$ が

$$f(x, t) = F(x)G(t) \quad (1.8)$$

と x のみの関数 $F(x)$ と t のみの関数 $G(t)$ の積としてかける場合, すなわち

$$\frac{dx}{dt} = F(x)G(t) \quad (1.9)$$

と書ける場合を考える. このとき (1.9) は次のように変形できる:

$$\frac{dx}{F(x)} = G(t)dt. \quad (1.10)$$

(1.10) の両辺を不定積分することにより微分方程式 (1.9) の一般解を得ることができる:

$$\int \frac{dx}{F(x)} = \int G(t)dt. \quad (1.11)$$

■補足 一般に, 1 階の微分方程式は形式的に 1 回不定積分すれば一般解が求まるので, 1 階の微分方程式の一般解には不定積分に伴う任意定数が一つ含まれる. (1.11) では左辺の積分で 1 個, 右辺の積分で 1 個出てくるが, これをひとまとめにして一つの任意定数にできる.

1.4 言葉の定義 (その 2)

一般に, 未知関数と未知関数の全ての微分について 0 次もしくは 1 次の微分方程式は線形微分方程式といわれる. (1.1) における未知関数及びその全ての微分は, $x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$ であり, 全て 1 次である. そこで, (1.1) は線形常微分方程式である.

線形という言葉についてももう少し説明しておく.

1.4.1 線形関数

ある関数 $f(t)$ が以下の様な性質を満足する場合, $f(t)$ を線形関数と呼ぶ:

$$f(t_1 + t_2) = f(t_1) + f(t_2), \quad (1.12)$$

$$f(at) = af(t). \quad (1.13)$$

ここで, a は定数である. もし $f(t)$ が上記の性質を満足しないならば, $f(t)$ は非線形関数であるという.

1.4.2 線形演算子

上記の線形・非線形という概念は, 関数のみならず, 微分演算子についても定義できる. 独立変数を t とする微分演算子を \mathcal{D}_t と表す. \mathcal{D}_t は $\frac{d}{dt}$ の多項式や関数である.*2 \mathcal{D}_t が

*2 例えば,

$$\mathcal{D}_t = \sum_{m=1}^N a_m \left(\frac{d}{dt} \right)^m$$

や

$$\mathcal{D}_t = e^{\frac{d}{dt}}$$

など.

以下の性質を満足するならば, \mathcal{D}_t を線形微分演算子とよぶ:

$$\mathcal{D}_t[f_1 + f_2] = \mathcal{D}_t[f_1] + \mathcal{D}_t[f_2], \quad (1.14)$$

$$\mathcal{D}_t[af] = a\mathcal{D}_t[f]. \quad (1.15)$$

ここで, f_1, f_2 は共に t の関数である. 線形演算子を以下では \mathcal{L}_t で表すことにする.

例えば, (1.1) の左辺第一項, および第二項に現れた微分演算子 $\frac{d^2}{dt^2}$ や $\frac{d}{dt}$ はともに上記 (1.14), (1.15) の性質を満足する.

一般に一変数の微分方程式は演算子 \mathcal{D}_t を使って,

$$\mathcal{D}_t[x] = X(t) \quad (1.16)$$

の形に表現できる. ここで $X(t)$ は t の既知関数である. 例えば, (1.1) は

$$\mathcal{D}_t = A \frac{d^2}{dt^2} + B \frac{d}{dt} + C \frac{d^0}{dt^0}, \quad (1.17)$$

$$X(t) = 0 \quad (1.18)$$

となる (1.16) である. ここで, (1.17) は線形演算子であり, (1.16) は $\mathcal{L}_t[x] = 0$ と書ける.

1.4.3 線形微分方程式

演算子 \mathcal{L}_t を使って,

$$\mathcal{L}_t[x] = 0$$

と表される微分方程式は次のような2つの性質を満足することがわかる:

- i) 微分方程式の独立な2つの解 x_1, x_2 ^{*3}があったとき, $x_1 + x_2$ も元の微分方程式の解になっている. 実際に

$$\mathcal{L}_t[x_1 + x_2] = \mathcal{L}_t[x_1] + \mathcal{L}_t[x_2] = 0 + 0 = 0.$$

- ii) 微分方程式の解 x を任意定数倍したもの, 即ち ax , も元の微分方程式の解になっている. ここで a は任意定数である. 実際に

$$\mathcal{L}_t[ax] = a\mathcal{L}_t[x] = a \times 0 = 0.$$

上記の2つの性質 i), ii), を満足する微分方程式を線形微分方程式と呼ぶ. もしくは, 上記の i), ii) の性質をひとつにまとめて,

^{*3} つまり $x_1 \neq x_2$ となる x_1, x_2 が $\mathcal{L}_t[x_1] = 0, \mathcal{L}_t[x_2] = 0$ を満たす.

“微分方程式 $D_t[x] = 0$ の独立な 2 つの解 x_1, x_2 があつたとき, 任意定数を c_1, c_2 として $c_1x_1 + c_2x_2$ も元の微分方程式の解となつてゐるとき, その微分方程式は線形微分方程式と呼ばれる”

と言える.

1.4.4 重ね合わせの原理

一般に, 微分方程式の独立な解が複数個 x_1, x_2, \dots, x_n が見つかったとき, それらをおのおの定数倍して足し合わせる操作

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1.19)$$

を解を重ね合わせるといふ.*⁴ 重ね合わせた解も元の微分方程式を満足するとき, 重ね合わせの原理が成り立つといふ. したがつて, 線形微分方程式は重ね合わせの原理が成り立つ微分方程式である.

以下で見るように線形常微分方程式のこの性質は一般解を構成するときに必要な知識である.

1.5 定数係数の 2 階線形常微分方程式の解法 (1)

ここでは, (1.1) の解法として, 代表的なものを紹介する. 特に, “推定法” と呼ばれるもの取り上げることにする.*⁵

*⁴ 線形結合ともいふ.

*⁵ 2000 年度から本講義を担当してきたが, 2007 年度の前期にある人からの指摘を受けて, “推定法” という言い方は一般的ではないことに気づいた. 私は大学 1 年生の物理数学の講義でここで紹介する “推定法” という方法を呼び名も含めて習つた. 講義を担当していた先生は, 原子核物理学の理論を専門とする先生で, 講義のうまさには定評があつた. その先生がいい加減なことを教えていたとは思えない. しかしながら, 指摘されて改めて調べてみると, 本講義で紹介する方法を “推定法” と呼んでいる物理数学の本が見当たらないのである. ためしに Google でネット検索してみても, “推定法”, “微分方程式” のキーワード検索で上位にかかるものは別の推定法である. (因みに, 私の講義ノートが結構上位でヒットする.) ただし, ネット検索して気づいたのであるが, (2007 年の時点で) 東海大学理学部物理学科 (私の出身大学) のシラバスには微分方程式の解法として, “推定法” の名前が挙げられていた. 私が東海大学で物理数学を習つたのは 20 年以上前であり, それを教えていた先生は今には既に退職している. しかしながら, “推定法” の名前はいまだに東海大学に残つてゐるのである. 以上の様なわけで, “推定法” という呼び名は, 注意して使つて欲しい. ただし, 以下に解説するようにこの言葉はよく手法を反映していることは理解してくれるだろう.

(1.1) を $A \neq 0$ で割り, (1.1) を改めて

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A\frac{dx}{dt} + Bx = 0. \quad (1.20)$$

と書く. (1.20) の解を

$$x = e^{\lambda t}, \quad (1.21)$$

と推定する. (1.21) を (1.20) に代入して整理すると,

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0 \quad (1.22)$$

という λ に関する代数方程式が得られる.*⁶ (1.22) は (1.20) の特性方程式と呼ばれる. (1.21) のように微分方程式の解を推定すると, 微分方程式は代数方程式に帰着される.

特性方程式 (1.22) の解は一般に 2 個ある. なぜならば, 2 次方程式の解は一般に 2 個であるからである.*⁷ その解を $\lambda_1, \lambda_2, (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ とする:

$$\lambda_1 = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2}. \quad (1.23)$$

そこで, (1.23) の結果と (1.21) を考慮すると, 微分方程式の解は

$$x_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = e^{\lambda_2 t} \quad (1.24)$$

の二つとなる. しかしながら, 前節で述べたように, x_1, x_2 がともに線形微分方程式の独立な解であるので, 重ね合わせの原理により

$$\begin{aligned} x &= c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \quad (1.25)$$

も微分方程式の解となる. (1.23) を持つ (1.25) が (1.20) の一般解である.

■補足 1 2 階の微分方程式は, 形式的には 2 回の不定積分を実行することにより解が求まる. 1 回不定積分を実行すると積分定数である任意定数が一つ現れる. そこで, 2 階の微分方程式の一般解には, 形式的な 2 回の不定積分により, 積分定数である任意定数が 2 個現れることになる. (1.25) は任意定数 c_1, c_2 を含んでいるので, (1.25) が微分方程式 (1.20) の一般解として充分であることが理解されるであろう.

*⁶ (1.21) を (1.20) に代入すると $(\lambda^2 + A\lambda + B)e^{\lambda t} = 0$ が得られる. ただし, $e^{\lambda t} = 0$ となる解は $x = 0$ という自明な解である. 非自明な解は (1.22) を満たすが, そのような解には興味がないのでここでは非自明な解 $x \neq 0$ を求める.

*⁷ 特性方程式が重解を持つ場合については次節で扱う.

■補足2 任意定数を決定して特殊解を導出するには、ある特定の t の値における、 x や $\frac{dx}{dt}$ の値が必要である。時間発展問題では、このような条件はいわゆる初期条件、 $t = 0$ における x や $\frac{dx}{dt}$ の値、として与えられる。

1.6 定数係数の2階線形常微分方程式の解法(2)

前節で $x = Ce^{\lambda t}$ と与えられた微分方程式の解を推定し、それを微分方程式に代入して微分方程式の特性方程式を作り、それを解くことによって λ を求め、解きたいの微分方程式の一般解を構成する方法を説明した。^{*8} しかし、前節の方法が適用できない場合もある。特性方程式の解が重解になる場合(特性方程式の解が一つ(それを λ_1 とする)しか求まらない場合)がそのような場合である。このときには解の推定 $x = Ce^{\lambda t}$ が(一部)誤りであると判断し、改めて解を $x = C(t)e^{\lambda_1 t}$ と推定する。つまり、 C を定数ではなく、 t に依存した関数と考えるのである。このような方法は係数変化法と呼ばれる。このようにすると、 C に関する微分方程式が得られるので、改めてこれを解いて推定した解の形 $x = C(t)e^{\lambda_1 t}$ に代入すればよい。なお、係数変化法を用いる場合でも、解が $e^{\lambda t}$ に比例するという先に紹介した“推定法”が基本になっていることに注意してほしい。

例: 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0 \quad (1.26)$$

を解く。この微分方程式の解を $x = Ce^{\lambda t}$ と推定する。ここで、 C は任意定数である。(1.26)の特性方程式は、

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \quad (1.27)$$

となり、この解は $\lambda = -2$ の重解となる。そこで、

$$x = C(t)e^{-2t} \quad (1.28)$$

と改めて推定し、(1.26)に代入する。その結果、

$$\frac{d^2C}{dt^2} = 0 \quad (1.29)$$

が得られる。(1.29)の一般解は $C = c_1t + c_2$ である。ここで、 c_1, c_2 は任意定数である。したがって、微分方程式(1.26)の一般解は

$$x = (c_1t + c_2)e^{-2t} \quad (1.30)$$

^{*8} 前節では $x = e^{\lambda t}$ という形の推定をしたが、これを任意定数 C 倍したものもまったく同じ特性方程式を満足する。したがって、前節の解の推定は一般には、 $x = Ce^{\lambda t}$ としたものとも解釈できる。

となる。(注:(1.30)には任意定数が2個含まれている。つまり、2階の微分方程式の一般解として充分である。)

1.7 非斉次型の微分方程式の解法

物理学・惑星学においては、(1.20)の右辺に既知の関数(いわゆる外力項)を含むような形の微分方程式も頻繁に登場する：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A\frac{dx}{dt} + Bx = f(t). \quad (1.31)$$

ここで、 A, B は定数である。

例1：質量 m の質点がバネ定数 k の線形バネにつながれており、さらに速度に比例する抵抗と周期的な外力 $A \sin \omega_0 t$ が質点に働いている場合、質点の平衡位置からのずれ x が従う運動方程式は、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m\gamma\frac{dx}{dt} + kx = A \sin \omega t, \quad (1.32)$$

となる。ここで、 $\gamma > 0$ である。

例2：インダクタンス L のコイル、抵抗値 R の抵抗、容量 C を持ったコンデンサを直列に接続した回路に起電力 $E(t)$ を加える。この回路の方程式は次のような微分方程式に従う：

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t). \quad (1.33)$$

ここで、 Q はコンデンサに蓄積される電荷であり、回路を流れる電流 I とは $I = \frac{dQ}{dt}$ の関係がある。

一般に(1.16)のような微分方程式で、右辺の $X(t)$ がゼロであるような方程式、すなわち前節までに扱ってきたものを斉次*⁹微分方程式と呼び、右辺が0でない場合を非斉次微分方程式とよぶ。斉次微分方程式が線形であれば、非斉次微分方程式の解は、以下のように簡単に構成できる。

非斉次微分方程式(1.31)の解は、斉次微分方程式(1.20)の一般解 x_g と、(1.31)を満足する解のうちの一つ(これは特殊解と呼ばれている) x_p の和として表現できる。即ち、

*⁹ 「せいじ」と読む。「さいじ」ではないので注意。もしくは同次ともいう。英語では homogeneous という語である。

$x = x_g + x_p$ である。実際に斉次微分方程式の線形性から x_g, x_p がそれぞれ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t[x_g] &= 0. \\ \mathcal{L}_t[x_p] &= X(t)\end{aligned}$$

であれば, $x = x_g + x_p$ は

$$\mathcal{L}_t[x_g + x_p] = \mathcal{L}_t[x_g] + \mathcal{L}_t[x_p] = 0 + X(t) = X(t).$$

すなわち, 非斉次微分方程式の解になっている。

■補足 特殊解が複数個見つかったときでも, そのうちの任意の 1 個のみを一般解 x_g に加えておけば (1.31) の解としては充分である。どの特殊解を選択するか, という自由度は一般解 x_g に含まれている任意定数で調整されるからである。初期条件を考慮すればどの特殊解を選んでも最終的な解は唯一に決まる。特殊解を求める方法は, 非斉次項 $X(t)$ がある特定の形を持つ場合, 常套手段が知られている。例えば, $X(t)$ が n 次の多項式の場合に特殊解を n 次の多項式で推定する: $x_p = \sum_{m=1}^n a_m t^m$ 。 $X(t)$ が e^{pt} の場合には $x_p = C e^{pt}$ と, $X(t) = \cos pt$ または $X(t) = \sin pt$ といった場合には, 解を $x_p = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt$ と推定して代入することにより, a_m, C, C_1, C_2 を決める。また例 5 で説明する微分方程式では係数変化法によって x_p を求める。

例 3 以下の様な微分方程式を考える :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = A \sin \omega t. \quad (1.34)$$

これは, 例 1 において質点に抵抗が働かない場合の方程式である。なお, $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ とし, $\omega_0 \neq \omega$ とする。

微分方程式 (1.34) の斉次方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.35)$$

の一般解は, $x_g = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t$ である*10。特殊解は, 解を $x_p = f \sin \omega t$ と推定し, これをもとの方程式 (1.34) に代入して係数 f を定めればよい。実際に代入すると

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} + \omega_0^2 x_p = -\omega^2 f \sin \omega t + \omega_0^2 f \sin \omega t = A \sin \omega t.$$

従って $f = A/(\omega_0^2 - \omega^2)$ を得る。よって, (1.34) の一般解は

$$x = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t \quad (1.36)$$

*10 $x = c_1 \exp[i\omega_0 t] + c_2 \exp[-i\omega_0 t]$ と表現してもよい。

である.*11

例4 次に例1で与えられた微分方程式を考える:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A \sin \omega t. \quad (1.37)$$

ここで, $\gamma_0 \equiv \gamma/m$, $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ とし, $\omega_0 \neq \omega$ とする.

微分方程式 (1.37) の斉次方程式

$$\frac{d^2x_g}{dt^2} + \gamma_0 \frac{dx_g}{dt} + \omega_0^2 x_g = 0 \quad (1.38)$$

の一般解は, $x_g = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ である. ここで λ_1, λ_2 は特性方程式 $\lambda^2 + \gamma_0 \lambda + \omega_0^2 = 0$ の2つの解である. ここでは改めてこの特性方程式は解かない. 特殊解の求め方だけを解説する. 特殊解は, 解を $x_p = f_1 \sin \omega t + f_2 \cos \omega t$ と推定し, これをもとの方程式 (1.37) に代入して係数 f_1, f_2 を定める. 推定した特殊解を元の微分方程式に代入すると

$$\begin{aligned} & \frac{d^2x_p}{dt^2} + \gamma_0 \frac{dx_p}{dt} + \omega_0^2 x_p \\ &= -\omega^2 f_1 \sin \omega t - \omega^2 f_2 \cos \omega t \\ & \quad + \gamma_0 (\omega f_1 \cos \omega t - \omega f_2 \sin \omega t) \\ & \quad + \omega_0^2 (f_1 \sin \omega t + f_2 \cos \omega t) \\ &= (-\omega^2 f_1 - \omega \gamma_0 f_2 + \omega_0^2 f_1) \sin \omega t + (-\omega^2 f_2 + \omega \gamma_0 f_1 + \omega_0^2 f_2) \cos \omega t \\ &= A \sin \omega t. \end{aligned}$$

従って f_1, f_2 は

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\omega \gamma_0 \\ \omega \gamma_0 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

を満足する. (1.39) の解は,

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma_0^2} \begin{pmatrix} (\omega_0^2 - \omega^2) A \\ -\omega \gamma_0 A \end{pmatrix}$$

なので, (1.37) の一般解は

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma_0^2} \{ (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \omega t - \omega \gamma_0 \cos \omega t \} \quad (1.40)$$

である. ここで c_1, c_2 は任意定数である.

*11 特殊解を $x_p = f_1 \sin \omega t + f_2 \cos \omega t$ と推定してもよいが, 経験をつむとこれは冗長な解の推定であることがわかる.

例 5: 最後に共鳴を起こす型の微分方程式を取り扱う. これは, (1.34) で, 外力の振動数 ω と, バネの固有振動数 ω_0 が等しい場合である. (1.34) の一般解で, $\omega = \omega_0$ とおくと x_p は発散する. そこで, 先の特殊解 x_p の推定は破綻している. 物理的にはこのような場合には, 振動の振幅が時間ともに増大していく (つまり共鳴が起きている). そこで, x_p として, ω_0 で振動し振幅が時間に比例する

$$x_p = f_1 t \sin \omega_0 t + f_2 t \cos \omega_0 t \quad (1.41)$$

と推定してみよう. これを (1.34) の式に代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_p}{dt^2} + \omega_0^2 x_p &= 2\omega_0(f_1 \cos \omega_0 t - f_2 \sin \omega_0 t) - \omega_0^2(f_1 t \sin \omega_0 t + f_2 t \cos \omega_0 t) \\ &\quad + \omega_0^2(f_1 t \sin \omega_0 t + f_2 t \cos \omega_0 t) \\ &= A \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

したがって, $f_1 = 0$, $f_2 = -A/(2\omega_0)$. つまり特殊解は

$$x_p = -\frac{At}{2\omega_0} \cos \omega_0 t \quad (1.42)$$

となる. したがって, (1.34) で $\omega = \omega_0$ の場合の一般解は

$$x = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t - \frac{At}{2\omega_0} \cos \omega_0 t \quad (1.43)$$

となる. ここで, c_1, c_2 は任意定数である.

■補足 : (1.41) では振幅を時間 t に比例すると推定して特殊解を求めた. いわゆる係数変化法を用いて特殊解を推定したときには, どのような計算になるのかここで示しておく. 特殊解は 1 個見つければよいという指針を積極的に使うことになる. 特殊解を

$$x_p = f(t) \sin \omega_0 t + g(t) \cos \omega_0 t \quad (1.44)$$

と推定する. これを元の微分方程式に代入する:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_p}{dt^2} + \omega_0^2 x_p &= \left(\frac{d^2 f}{dt^2} - 2\omega_0 \frac{dg}{dt} \right) \sin \omega_0 t + \left(\frac{d^2 g}{dt^2} + 2\omega_0 \frac{df}{dt} \right) \cos \omega_0 t \\ &= A \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (1.45)$$

したがって

$$\frac{d^2 f}{dt^2} - 2\omega_0 \frac{dg}{dt} = A, \quad (1.46a)$$

$$\frac{d^2 g}{dt^2} + 2\omega_0 \frac{df}{dt} = 0, \quad (1.46b)$$

が得られる。(1.46b) を (1.46a) に代入して f を消去すると,

$$\frac{d^3g}{dt^3} + 4\omega_0^2 \frac{dg}{dt} = -2\omega_0 A \quad (1.47)$$

となる。上式を t で積分すると

$$\frac{d^2g}{dt^2} + 4\omega_0^2 g = -2\omega_0 At + C \quad (1.48)$$

を得る。ここで C は任意定数である。この任意定数は $C = 0$ と選んでよい。なぜなら、特殊解としては与式を満たすものを一つ見つければよいからである。したがって、(1.48) は

$$\frac{d^2g}{dt^2} + 4\omega_0^2 g = -2\omega_0 At \quad (1.49)$$

となる。 g の満たす方程式が再び非斉次微分方程式となった。この方程式の解は非斉次項が t の多項式なので、

$$g = at + b \quad (1.50)$$

と推定する。この時、

$$\frac{d^2g}{dt^2} + 4\omega_0^2 g = 4\omega_0^2 at + 4\omega_0^2 b = -2\omega_0 At, \quad (1.51)$$

$$\therefore 4\omega_0^2 a = -2\omega_0 A, \quad (1.52)$$

$$4\omega_0^2 b = 0,$$

となる。以上より、

$$a = -\frac{A}{2\omega_0}, \quad b = 0$$

が得られ、最終的に求めるべき係数 g は

$$g = -\frac{A}{2\omega_0} t \quad (1.53)$$

である。(1.53) を (1.46b) に代入すると $df/dt = 0$ となり、 $f = D$ 、ここで D は任意定数であるがこれは再び 0 としてよい。以上より特殊解として

$$x_p = -\frac{A}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t \quad (1.54)$$

が再び得られた。

ひとりごと : 初等的な物理数学の有名な教科書に、非斉次型の微分方程式の解をロンスキー行列というものを使って表現する公式が書かれている。この公式を使って非斉次型の微分方程式を解くことよりも、上で解説した“推定法”による解法を強く勧める。その理由は、

- i) この公式を使った解法は膨大な計算が必要となる。特に積分を複数回実行しなければいけない。それに比べれば、“推定法”による解法は計算量が格段に少なく、積分の必要はなく微分だけで解が求まるため容易である。積分よりも微分のほうが圧倒的に計算は簡単である！
- ii) この公式が成り立つにはある条件が必要である。公式の適用範囲を与えられた微分方程式が満足しているかをきちんと吟味しなければいけない。公式の適用範囲と共に公式を記憶しておくことは、この公式が複雑な形をしているため（記憶力の落ちた私にとっては）難しい。
- iii) 私が今までお目にかかった非斉次型の微分方程式で、“推定法”で解けなかったものはない。逆にロンスキー行列を使った公式にお世話になったことはない！それでも貴方はロンスキー行列を使って非斉次型の微分方程式を解きますか？

1.8 最後に...

“推定法”が成功するためには、与えられた微分方程式を眺めてどのような解が存在するのかをうまく推定してやらなければいけない。よい推定をしないと解は求まらない。それでは、よい推定をするにはどうしたらいいのであろうか？それはいたって簡単で、

よい推定を行うには微分方程式を山ほど（もしくは星の数ほど）解いて **知識と経験と勘** を養うことである。 **知**

本稿で紹介した常微分方程式以外にも物理学・惑星学で頻繁に登場するタイプの微分方程式があり、これらについては各自で微分方程式や物理数学の教科書を参照して勉強してほしい。1.10 節以降のそのようなもののいくつかを挙げておいた。

1.9 演習問題

1.9.1 Euler の関係式

Euler の関係式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1.55)$$

は極めて便利な公式である。以下の演習問題でその便利さを体験しよう。

i) 以下の公式を Euler の関係式を用いて証明しなさい。

a) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$

b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$

c) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

d) $\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$ を証明しなさい。ここで、 n は自然数とする。(de Moivre の公式)

ii) $\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ を証明しなさい。

iii) 以下の積分を計算しなさい。

a) $\int_0^{\infty} e^{-z} \sin z \, dz$

b) $\int_0^{\infty} e^{-z} \cos z \, dz$

1.9.2 微分方程式の性質について

i) 以下の微分方程式は線形の微分方程式かそれとも非線形の微分方程式か答えなさい。

a) 質量 m の質点がバネ定数 k の線形バネにつながれている場合、質点の平衡位置からの変位 x が従う運動方程式:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0.$$

b) 重力場中で長さ l の伸びない紐の端に質量 m のおもりがつるされているとする。この振り子（重り）の平衡点からの振れ角 θ が従う運動方程式:

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mg \sin \theta = 0. \quad (1.56)$$

ここで、 g は重力加速度である。

c) 方程式 (1.56) で振れ角 θ が小さい場合:

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} + mg\theta = 0.$$

d) 同じバネ定数 κ を持った 3 つの線形バネにつながれた 2 つの質点の運動方程式 (連成振動の方程式):

$$\begin{cases} m \frac{d^2}{dt^2} x_1 = \kappa (x_2 - 2x_1), \\ m \frac{d^2}{dt^2} x_2 = \kappa (x_1 - 2x_2). \end{cases}$$

ここで, κ は正の定数である. x_1, x_2 は 2 つの質点の平衡位置からの変位である (図 1.1 参照).

e) 真空中の Maxwell 方程式:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases}$$

ここで, c は光速である.

ii) 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

が

$$x = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

の解を持つことを示しなさい. ここで, A, B は任意定数である. またこの解が以下の形に書けることを示しなさい:

$$\begin{aligned} x &= C \cos(\omega t + \alpha), \\ &= D \sin(\omega t + \beta), \end{aligned}$$

さらに, C, D, α, β を A, B で表現しなさい.

補足: C, D は振幅, α, β は位相と呼ばれる.

1.9.3 1 階の微分方程式の問題

次の 1 階の微分方程式を解きなさい.

i)

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

ii)

$$\frac{dy}{dx} = 2xy.$$

iii)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + xy^2}{2y + x^2y}.$$

1.9.4 定数係数を持った 2 階の線形常微分方程式の問題

以下の微分方程式の一般解を求めなさい。

i)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0.$$

ii)

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} - 5x = 0.$$

iii)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$

iv)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 25x = 0.$$

v)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0.$$

vi)

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} - 5x = t^2 + 2e^{3t}.$$

vii)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 25x = 20 \cos 2t.$$

viii)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = f_0 \cos \omega t.$$

ここで, ω, f_0 は実数の定数であるとする.

ix) 次の微分方程式を, 以下の 2 つの方法で解きなさい:

$$\frac{dx}{dt} + \omega x = 0.$$

ここで, ω は実数の定数であるとする.

a) 定数係数を持った 2 階の線形常微分方程式と同様に “推定法” を用いて解きなさい.

b) 変数分離法を用いて解きなさい.

x) 次の微分方程式を, 前設問の解を参考にして, 係数変化法を用いて解きなさい:^{*12}

$$\frac{dx}{dt} + \omega x = f(t).$$

ここで, ω は実数の定数, $f(t)$ は t の既知関数とする.

1.9.5 発展問題

i) 次の連立微分方程式は, 大気の下層や海洋の表層の流れを記述する方程式で Ekman 方程式と呼ばれるものである:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dz^2} - v &= 0, \\ \frac{d^2v}{dz^2} + u &= U_\infty. \end{aligned}$$

ここで, U_∞ は定数である.

a) 上記の連立微分方程式の一般解を求めなさい.

ヒント: u もしくは v のみの 4 階の微分方程式に書き直して, “推定法” で解

^{*12} 解は $f(t)$ の積分を含む形で与えられる. $f(t)$ が陽に与えられていないので, その積分は実行できない. したがってここで得られる解は形式解である.

く. もしくは, 第1式と, 第2式に純虚数 i を掛けたものを足し, $\hat{u} \equiv u + iv$ に関する2階の微分方程式に書き直して“推定法”で解く. なお, 1.9.1節で証明した $\sqrt{i} = (1 + i)/\sqrt{2}$ を用いなさい.

- b) $z \rightarrow \infty$ で $u \rightarrow U_\infty, v \rightarrow 0, z = 0$ で $u = 0, v = 0$ という境界条件を満足する解を求めなさい. (各 z に対して u, v をプロットすると螺旋を描く. この螺旋は Ekman 螺旋と呼ばれる.)

*余力があれば自習しておくとい 話題

1.10 *定数係数の 2 階線形連立常微分方程式

図 1.1 のようにバネ定数 $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ を持った 3 つの線形バネにつながれた 2 つの質点の運動方程式は,

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2}{dt^2} x_1 = -\kappa_1 x_1 + \kappa_3 (x_2 - x_1), \\ m_2 \frac{d^2}{dt^2} x_2 = -\kappa_2 x_2 - \kappa_3 (x_2 - x_1), \end{cases} \quad (1.57)$$

の形の定数係数 2 階線形連立常微分方程式で書ける. このような方程式を解いてみよう.

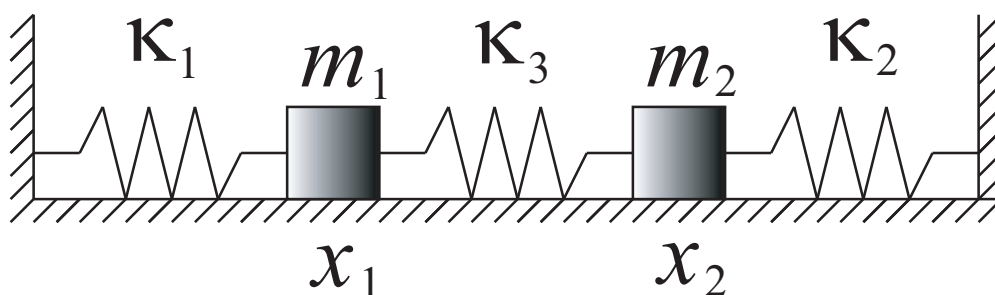


図 1.1 線形バネにつながれた質点. x_1, x_2 は平衡の位置からの変位とする.

簡単のために 質点の質量とバネ定数は全て等しいとする. 即ち, $m \equiv m_1 = m_2$, $\kappa \equiv \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3$.

解法 1: 変数変換を行うことにより, 独立な 2 つの微分方程式に書き直す. $X \equiv x_1 + x_2$, $Y = x_1 - x_2$ として, X, Y に関する方程式に書き直す. X, Y に関する方程式はそれぞれ X, Y のみを含む定数係数 2 階線形常微分方程式になるので, それを“推定法”を使って解く. (X は 2 つ質点の重心の位置を表し, Y は相対位置を表す.)

解法 2: (1.57) は今の状況設定のもとでは、次のように行列を用いて書き下すことができる:

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

ここで、 $\omega^2 \equiv \frac{\kappa}{m}$ である。これを“推定法”と行列の知識を使って解いてみる。

先ず、この方程式の解を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

と推定し、(1.58) に代入する。ここで c_1, c_2 は定数とする。このとき、(1.58) は

$$\begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

となる。これは、 λ^2 を固有値とする行列

$$M = \begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -2\omega^2 \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

の固有値問題になっている。(1.61) の固有値は、 $\lambda^2 = -3\omega^2, -\omega^2$ と求められる。さらに、固有値 $\lambda^2 = -3\omega^2$ に属する固有ベクトルは、 $c_1 = -c_2$ 、固有値 $\lambda^2 = -\omega^2$ に属する固有ベクトルは、 $c_1 = c_2$ である。そこで、微分方程式の解はこれら求められたものを重ね合わせて、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t} + D_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\sqrt{3}\omega t} + D_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\sqrt{3}\omega t} \quad (1.62)$$

となる。ここで、 C_1, C_2, D_1, D_2 は任意定数である。

1.10.1 演習問題

- i) $m_1 = m_2, \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3$ のとき、(1.57) を上で説明した解法 1 の方法で説き、解が (1.62) であることを確かめなさい。
- ii) $m_1 = m_2, \kappa_1 = \kappa_2$ のとき、(1.57) を上で説明した解法 2 の方法で説きなさい。

1.11 *Sturm–Liouville 型の微分方程式

1.11.1 はじめに

物理学・惑星学で登場する微分方程式は、次のような形式のものが多い：

$$\left\{ \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x) \right\} y(x) = \lambda r(x) y(x). \quad (1.63)$$

ここで、 λ は未定の定数で、 $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ は既知の x の関数である。方程式 (1.63) は Sturm–Liouville 型の微分方程式と呼ばれ、 p , q , r を適当に選ぶと著名な種々の微分方程式になる。

例 1 : 三角関数や双曲線関数^{*13}が解となる

$$\frac{d^2}{dx^2} y = \lambda y \quad (1.64)$$

は (1.63) において、 $p = 1$, $q = 0$, $r = 1$ の場合である。 $\lambda < 0$ のとき三角関数が、 $\lambda > 0$ のとき双曲線関数が解となる。

例 2 : Hermite の微分方程式,

$$\frac{d^2}{dx^2} y - 2x \frac{d}{dx} y + 2ny = 0, \quad (1.65)$$

は (1.63) において $p = \exp(-x^2)$, $q = 0$, $r = \exp(-x^2)$, $\lambda = -2n$ の場合である。ここで、 n は 0 または正の整数である。この方程式の解は多項式で与えられ、Hermite 多項式と呼ばれ、通常 $H_n(x)$ と表される。地球の大気・海洋中には様々な種類の波動が存在し、赤道付近に捕捉された波動（赤道波と呼ばれる）の従う方程式は (1.65) の形に変形することができる。（量子力学を習うと、調和振動子の Schrödinger 方程式を解く際に (1.65) が登場する。）

例 3 : Bessel の微分方程式,

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} y + x \frac{d}{dx} y + (x^2 - n^2) y = 0, \quad (1.66)$$

は (1.63) で $p = x$, $q = x$, $r = 1/x$, $\lambda = n^2$ の場合である。ここで、 n は 0 または正の定数である。この方程式の解は Bessel 関数と呼ばれ、 $J_n(x)$ と表される。Bessel 関数は円筒関数もしくは円柱関数と呼ばれ、円柱状の境界値問題ではこの関数が登場する。大気・海洋中には円形の渦が卓越するが、このような渦の安定性を吟味するときに Bessel の微分方程式や Bessel 関数が登場する。

^{*13} $\sinh x \equiv (e^x - e^{-x})/2$ や $\cosh x \equiv (e^x + e^{-x})/2$ のこと。

例4 : Laguerre の微分方程式,

$$x \frac{d^2}{dx^2} y + (1-x) \frac{d}{dx} y + \alpha y = 0, \quad (1.67)$$

は (1.63) において $p = x \exp(-x)$, $q = 0$, $r = \exp(-x)$, $\lambda = -\alpha$ の場合である. この方程式の解は Laguerre の多項式と呼ばれ, 通常 $L_n(x)$ で表される.

例5 : Laguerre の多項式を k 階微分した多項式は Laguerre の陪多項式と呼ばれ, $L_n^k(x)$ で表される. この多項式は次の微分方程式の解となる:

$$x \frac{d^2}{dx^2} y + (k+1-x) \frac{d}{dx} y + (\alpha-k)y = 0. \quad (1.68)$$

この微分方程式は Laguerre の陪微分方程式といい, これは (1.63) で $p = x^{k+1} \exp(-x)$, $q = 0$, $r = x^k \exp(-x)$, $\lambda = k - \alpha$ 場合である.

例6 : Legendre の微分方程式,

$$(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} y - 2x \frac{d}{dx} y + l(l+1)y = 0, \quad (1.69)$$

は (1.63) で $p = 1-x^2$, $q = 0$, $r = -1$, $\lambda = l(l+1)$ の場合である. ここで, n は正の整数である. この方程式の解は多項式で与えられ, Legendre の多項式と呼ばれ, 通常 $P_l(x)$ と書かれる.

例7 : Legendre の多項式 $P_l(x)$ を, m 階微分したものに $(1-x^2)^{m/2}$ を乗じたものは Legendre の陪関数と呼ばれ, $P_l^m \equiv (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$ と書かれる. この関数は次の微分方程式の解となる:

$$(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} y - 2x \frac{d}{dx} y + \left\{ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right\} y = 0. \quad (1.70)$$

この微分方程式は Legendre の陪微分方程式と呼ばれ, これは (1.63) において $p = (1-x^2)$, $q = -m^2/(1-x^2)$, $r = 1$, $\lambda = -l(l+1)$ の場合である. ここで, m は 0 または正の整数 (ただし, $l \geq m$) である. 地球大気の運動は, 球面上に張り付いた流体 (気体や液体の総称) の運動と考えることができる. このような運動を考察する際に, Legendre の陪関数を用いると便利である. また, 気象の数値実験 (天気予報) を精度よく行う際にも, Legendre の陪関数が必要となる.

1.11.2 演習問題

- i) (1.65)~(1.70) が Sturm-Liouville 型の微分方程式であることを確かめなさい. 各微分方程式の名前も調べなさい.

ii) Sturm–Liouville 型の微分方程式は線形微分方程式であることを確かめなさい.

補足： (1.63) は

$$p \frac{d^2}{dx^2} y + p' \frac{d}{dx} y + (q - \lambda r) y = 0, \quad (1.71)$$

と書き直せる. ここで, $p' = \frac{dp}{dx}$ である. Sturm–Liouville 型の微分方程式は定数係数ではないが 2 階の線形常微分方程式である.

1.12 *微分方程式の級数解法

1.12.1 はじめに

前の節で挙げた例 2～7 の多項式や関数は特殊関数と呼ばれる. それらの従う微分方程式をといて解を得ようとするとき, $y = e^{\alpha x}$ と置く“推定法”では解くことができない. このような方程式を解くには, 級数解法と呼ばれるものを使う.

この解法のエッセンスは, 解を

$$\begin{aligned} y &= \frac{a_{-m}}{x^m} + \frac{a_{-m+1}}{x^{m-1}} + \dots + a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \\ &= \sum_{i=-m}^{\infty} a_i x^i \end{aligned} \quad (1.72)$$

と級数で表現する. これをもとの微分方程式に代入して係数 a_n を決める. 通常は a_n の漸化関係式が得られる.

どの項から展開を始めるか, 即ち m の値をいくつにとるか, また (1.72) の展開が収束するための条件を考慮する必要があるなど, 他に説明すべきことはあるが, ここではそのような問題は伏せておいて, 解のよく知られた微分方程式を級数解法で解いて, 級数解法に触れて見よう.

1.12.2 演習問題

i) 指数関数 $y = e^{\lambda x}$ を $x = 0$ を中心に Taylor 展開しなさい.

ii) 定数係数を持った 1 階の線形微分方程式

$$\frac{d}{dx} y = \lambda y \quad (1.73)$$

を級数解法で解きなさい. ここで, λ は定数であり, 解は

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \end{aligned} \quad (1.74)$$

と展開できると仮定する. (1.74) を (1.73) に代入することにより係数 a_i の従う漸化関係式を導きなさい.

iii) 前設問で導いた級数が指数関数であることを確かめなさい.

第 2 章

Fourier 級数

本章と引き続く幾つかの章で, Fourier 級数と Fourier 変換, それらの応用について述べる. Fourier とはフランス人 Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830) のことで, 彼は数学者, 技術者として活躍し, Napoleon に仕えた人物である. 1822 年に熱伝導に関する書籍 (Theorie analytique de la chaleur) を出版し, その中で全ての関数は三角関数の和によって表現される (三角関数に分解される) という原理を提唱した. これが Fourier 級数である. Fourier の原理は提唱以後, 精密化, 拡張を経てきた. Fourier 変換は彼の栄誉にちなんで名づけられたものである.

本章と次章では周期関数に関する Fourier の原理であるところの Fourier 級数について述べ, 4 章で周期を持たない関数に関する Fourier の原理である Fourier 変換を扱うことにする. Fourier 級数は物理学 (地球惑星科学も含む) や工学で広く応用されていて, 方程式の求解や実験・観測データの解析の手段として広く用いられている.

2.1 周期関数

実関数 $f(x)$ が全ての x , ($x \in \mathbb{R}$),^{*1} に対して, $f(x+T) = f(x)$ であるならば, $f(x)$ は T の周期をもつ, もしくは周期 T で周期的である, と呼ばれる. ここで T は正の定数である. 最小の T は最小周期 (the least period) もしくは, 単に $f(x)$ の周期と呼ばれる.

例 1: 関数 $\sin x$ は, $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ の周期をもつ. なぜならば, $\sin(x+2\pi), \sin(x+4\pi), \sin(x+6\pi), \dots$ は全て $\sin x$ と同じ値を持つからである. しかしながら, 2π が $\sin x$ の (最小) 周期である.

例 2: $\sin nx$ もしくは $\cos nx$ の周期は $2\pi/n$ である. ここで, n は正の整数である.

*1 実数の集合を \mathbb{R} で表す. $x \in \mathbb{R}$ は x が実数 \mathbb{R} の集合の要素であること, すなわち, x が実数であることを表している.

例 3: $\tan x$ の周期は, π である.

例 4: 定数は任意の正の周期を持つ.

2.2 Fourier 級数

実関数 $f(x)$ は $-L < x < L$ の範囲内で与えられ, その区間の外側では $f(x+2L) = f(x)$ とする. すなわち, $f(x)$ は $2L$ の周期をもつ. このとき $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (2.1)$$

と表現できる. (ia) の右辺は $f(x)$ の Fourier 級数もしくは Fourier 級数展開と呼ばれる. ここで a_n, b_n は Fourier 係数と呼ばれ

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.2a)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.2b)$$

で与えられる.

2.3 Fourier 係数の導出

Fourier 係数は以下の様な方法で求められる.

■ a_n の導出 (ただし, $n \neq 0$) (ia) の両辺に $\cos \frac{n\pi x}{L}$ を乗じて, x について $-L$ から L まで積分する. このとき $n \in \mathbb{N}$ に対して*2

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad (2.3)$$

および, $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = L\delta_{m,n}, \quad (2.4)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0 \quad (2.5)$$

*2 自然数の集合を \mathbb{N} で表す. $n \in \mathbb{N}$ は n が自然数 \mathbb{N} の集合の要素である, すなわち, n が自然数であることを表している.

であることに注意する。ここで $\delta_{m,n}$ は Kronecker のデルタと呼ばれ、

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0, & (m \neq n \text{ のとき}), \\ 1, & (m = n \text{ のとき}), \end{cases} \quad (2.6)$$

で定義される量である。上記の関係式を用いると、 a_n についての公式 (2.2a) が得られる。

■ b_n の導出 (ただし, $n \neq 0$) a_n の導出と同様にして, (ia) の両辺に $\sin \frac{n\pi x}{L}$ を乗じて x について $-L$ から L まで積分すると, b_n に関する公式 (2.2b) が得られる。

■ a_0 の導出 (ia) の両辺を関数の定義域全体にわたって積分し, その結果を a_n , ($n \in \mathbb{N}$) の公式と見比べると, 先に求めた a_n は $n = 0$ に対しても拡張できることがわかる。

注意: Fourier 係数の導出の際には, 添え字の扱いに注意が必要である。例えば, a_n を求めるために (ia) の両辺に $\cos \frac{n\pi x}{L}$ を乗じると

$$f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} = \cos \frac{n\pi x}{L} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \right\} \quad (2.7)$$

となるが, 右辺の $\cos \frac{n\pi x}{L}$ を単純に総和記号の中に入れることはできない。なぜなら, (2.7) の右辺の総和に関する項を総和の定義にしたがって表現すると

$$\begin{aligned} & \cos \frac{n\pi x}{L} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \right\} \\ &= \cos \frac{n\pi x}{L} \left(a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + b_1 \sin \frac{\pi x}{L} \right. \\ & \quad + a_2 \cos \frac{2\pi x}{L} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{L} \\ & \quad + \dots \\ & \quad \left. + a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} + \dots \right) \\ &= a_1 \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{\pi x}{L} + b_1 \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{\pi x}{L} \\ & \quad + a_2 \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{2\pi x}{L} + b_2 \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} \\ & \quad + \dots \\ & \quad + a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} + \dots \end{aligned}$$

最後の表現を総和の記号を使って表すと,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \quad (2.8)$$

である。添え字に注意を払わないで、単純に $\cos \frac{n\pi x}{L}$ を総和の中に入れてしまうと

$$\begin{aligned} & \cos \frac{n\pi x}{L} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \right\} \\ & \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos^2 \frac{n\pi x}{L} + b_n \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

となってしまう。(2.8) と (2.9) は明らかに異なる。(2.7) において総和記号の中で n は $1 \sim \infty$ まで変化する整数であり、整数を表すものであれば m でも k でもよい。(その場合には、総和記号はそれぞれ $\sum_{m=1}^{\infty}$ や $\sum_{k=1}^{\infty}$ となる。) 一方、総和記号の前にある $\cos \frac{n\pi x}{L}$ の n はある特定の整数を表している。総和記号の前にある $\cos \frac{n\pi x}{L}$ の n と総和記号の n は別の意味を持っているので、両者を混同しないように後者を別の記号を使って書いておく方がいい。

このような混乱を避ける別の方法としては、(ia) の両辺に $\cos \frac{m\pi x}{L}$ や $\sin \frac{m\pi x}{L}$ を乗じて、 x について $-L$ から L まで積分し、 a_m, b_m を導出し、結果の m を n におきかえる、という方法もある。

2.4 Fourier 級数の例

以下の例では関数の Fourier 級数を示すと共に、Fourier 級数の一つの応用例として Fourier 級数を用いた無限級数和の計算を示す。

例1 $f(x) = x$, $(-\pi < x < \pi)$, 周期 2π

Fourier 係数の公式より,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx = 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

したがって,

$$f(x) = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right). \quad (2.10)$$

上式で $x = \pi/2$ とおけば,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

という級数が得られる。この級数は Leibniz の級数、もしくは Euler の級数と呼ばれるものである。このようにして無限級数の和が Fourier 級数を用いて計算できる。

Fourier 級数展開によって関数が表現できることを示すために、この例で議論した関数 $f(x) = x$ およびその Fourier 級数展開 (2.10) の右辺の最初の幾つかの項までを図 2.1 に示した。項が増えるにしたがって、級数は $f(x)$ に近づいていくのがわかる。

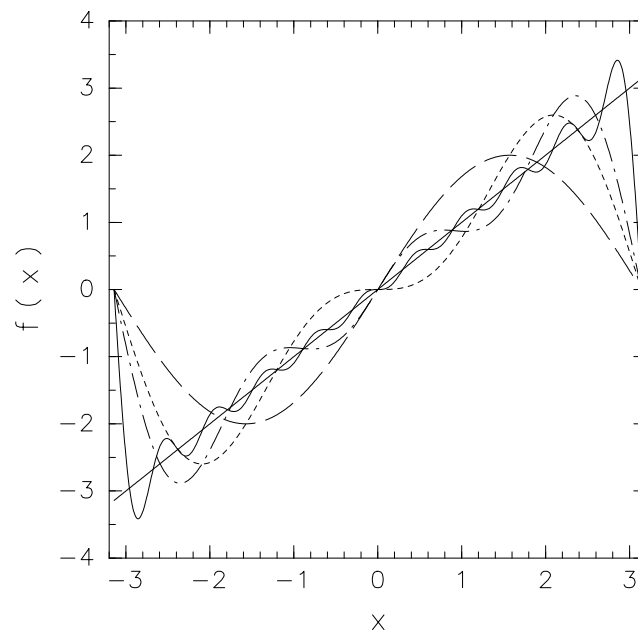


図 2.1 太実線は $f(x) = x$. 破線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の初項を、点線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の第 2 項まで、一点破線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の第 3 項まで、細実線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の第 10 項目までを図示した。

例 2 $f(x) = |x|$, $(-\pi \leq x \leq \pi)$, 周期 2π

例 1 と同様にして

$$\begin{aligned} a_0 &= \pi, \\ a_n &= \begin{cases} 0, & n \text{ が偶数} \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & n \text{ が奇数} \end{cases} \\ b_n &= 0. \end{aligned}$$

したがって、

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots \right). \quad (2.12)$$

上式で $x = 0$, または $x = \pi$ とおけば,

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \quad (2.13)$$

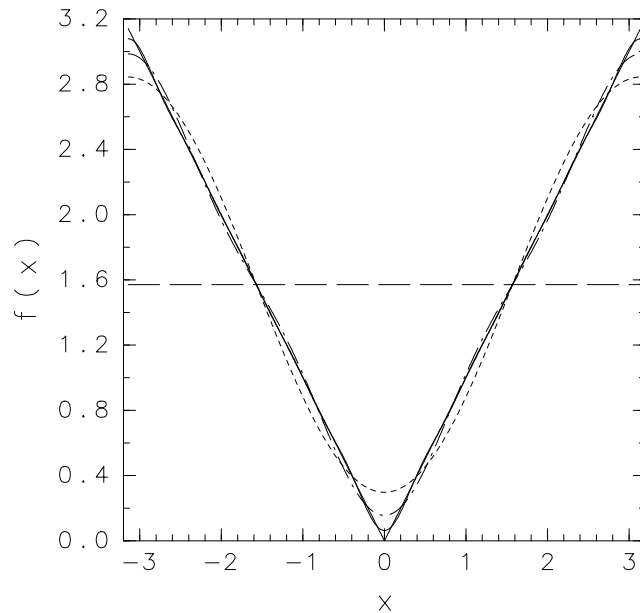


図 2.2 太実線は $f(x) = |x|$. 破線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の初項. 点線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の第 2 項まで. 一点破線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の第 3 項まで. 細実線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の第 10 項目まで.

例 3 $f(x) = x^2$, $(-\pi \leq x \leq \pi)$, 周期 2π

例 1 と同様にして

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{3}\pi^2, \\ a_n &= (-1)^n \frac{4}{n^2}, \\ b_n &= 0. \end{aligned}$$

したがって,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots \right). \quad (2.14)$$

上式で $x = 0$ とおけば,

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots \quad (2.15)$$

が, 一方 $x = \pi$ とおけば,

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \quad (2.16)$$

が得られる.*³

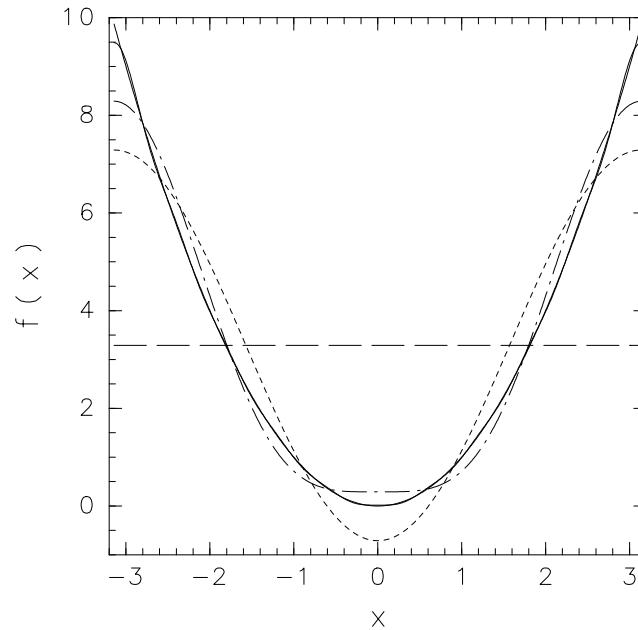


図 2.3 太実線は $f(x) = x^2$. 破線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の初項. 点線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の第 2 項まで. 一点破線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の第 3 項まで. 細実線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の第 10 項目まで.

2.5 Fourier 級数展開に関するいくつかの注意

2.5.1 関数の定義域が $-L < x < L$ ではなく一般的な場合

実関数 $f(x)$ が $c < x < c + 2L$ で与えられ (ここで c は任意の実数である), $2L$ の周期をもつとする. このような場合にも $f(x)$ は (ia) のように Fourier 級数展開できる. ただし, Fourier 係数 a_n, b_n は

$$a_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.17a)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.17b)$$

*³ (2.16) の無限級数和は, P. Mengoli によって 1644 年に提起され, L. Euler が 1735 年に解いたものである.

で与えられる。(2.17a), (2.17b) の証明は, (2.2a), (2.2b) を導出したのと同様に行える. 実関数 $f(x)$ の指定されている区間が $c < x < c + 2L$ の場合にも (ia) のように三角関数の重ね合わせとしてかけることを認めると, (ia) の両辺に $\cos \frac{n\pi x}{L}$ を掛け, その結果を x について c から $c + 2L$ まで積分し整理すると (2.17a) が得られ, $\cos \frac{n\pi x}{L}$ の代わりに $\sin \frac{n\pi x}{L}$ を掛けて, 同様の演算を行った場合には (2.17b) が得られる.

$c = -L$ という特別な場合には, (2.17a), (2.17b) はそれぞれ (2.2a), (2.2b) になる.

なお, 関数が指定される区間が変わっても関数自身の形は変わらないので, その Fourier 級数展開も変わらないはずである. 実際に, (2.17a), (2.17b) は変数変換と $f(x)$ が周期 $2L$ を持つという性質を利用して, (2.2a), (2.2b) に帰着させることができる. したがって, (ia), (2.2a), (2.2b) が Fourier 級数展開の基本形と言える.

2.4 節の図 2.1 では, $-\pi < x < \pi$ の範囲のみを図示したが, $-3\pi < x < 3\pi$ の範囲を図示すると図 2.4 のようになる. このとき, "関数 $f(x)$ が $-\pi < x < \pi$ の範囲で与えられていて, その外側では 2π 周期をもつ", と考えても, "ある適当な正の整数 c に対して, $c < x < c + 2\pi$ で関数形 $f(x)$ が与えられていて, その外側で 2π を持つ" としても両者は等価であることがわかるであろう.

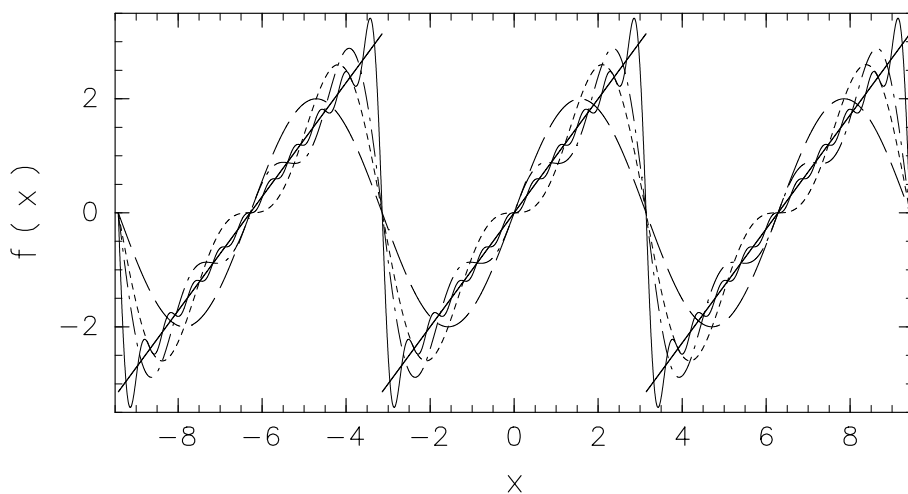


図 2.4 図 2.1 と同様. ただし, $-3\pi < x < 3\pi$ の範囲を図示した.

2.5.2 係数 a_0 について

(ia) の定数項は

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{\int_{-L}^L f(x) dx}{\int_{-L}^L dx}$$

に等しく、これは $f(x)$ の周期にわたる平均である。このことは積分を区分求積法に直すとすぐにわかる。

2.5.3 関数が不連続点を持つ場合

x_d において実関数 $f(x)$ が不連続である場合には、係数 (2.2a), (2.2b) をもつ級数 (ia) は $x = x_d$ において

$$\frac{f(x_d + 0) + f(x_d - 0)}{2}$$

の値に収束する。

図 2.4 の $x = \pm\pi$ では $f(x)$ は不連続である。しかしながら、(2.10) の右辺の値は、 $\frac{f(x_d+0)+f(x_d-0)}{2}$ の値、即ち 0 に収束していることがわかる。

2.6 Parseval の恒等式

もし、 a_n, b_n が実関数 $f(x)$ の Fourier 係数のとき、

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L \{f(x)\}^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (2.18)$$

が成り立つ。これは Parseval の恒等式と呼ばれる。この式は $f(x)$ の二乗平均値が Fourier 係数の二乗和として表現できることを示している。

■補足 $a_0/2$ が $f(x)$ の平均値であるので、 $\frac{1}{2L} \int_{-L}^L \{f(x) - \frac{a_0}{2}\}^2 dx$ は $f(x)$ の偏差の平均値つまり分散である。この値は Parseval の恒等式を用いると、 $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ となる。つまり、Parseval の恒等式は

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left\{ f(x) - \frac{a_0}{2} \right\}^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2), \quad (2.19)$$

とも書ける。 $f(x)$ の分散は Fourier 係数の自乗和で表される、と述べた方が Parseval の恒等式の意味が理解しやすいかもしれない。

2.7 演習問題

2.7.1 Fourier 級数の問題

i) $k = 1, 2, 3, \dots$ のとき、 $\int_{-L}^L \sin \frac{k\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} dx = 0$ となることを証明しなさい。

ii) 以下の関係式を証明しなさい。ただし, $m, n \in \mathbb{N}$ とする。

$$\text{a) } \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = L\delta_{m,n}. \text{ ここで,}$$

$\delta_{m,n}$ は Kronecker のデルタである.

$$\text{b) } \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0.$$

iii) $-L < x < L$ で与えられ, その区間の外側では周期 $2L$ をもつ実関数 $f(x)$ に関する Fourier 級数

$$f(x) = A + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right)$$

において, $m \in \mathbb{N}$ に関して $a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx$, $b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx$, $A = \frac{a_0}{2}$ となることを証明しなさい。

iv) 以下の関数を図示し, その関数の Fourier 係数を求めなさい。

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 3, & (0 < x < 5) \\ -3, & (-5 < x < 0) \end{cases}$$

周期は 10 とする。

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \sin x, & (0 \leq x \leq \pi) \\ 0, & (\pi < x < 2\pi) \end{cases}$$

周期は 2π とする。

2.7.2 種々雑多の問題

- i) 偶関数と偶関数の積は偶関数であることを証明しなさい。
- ii) 奇関数と奇関数の積は偶関数であることを証明しなさい。
- iii) 偶関数と奇関数の積は奇関数であることを証明しなさい。
- iv) $f_{\text{even}}(x)$, $f_{\text{odd}}(x)$ をそれぞれ偶関数, 奇関数とする。このとき, 以下の式を証明しなさい。ここで L は正の実数とする。

$$\text{a) } \int_{-L}^L f_{\text{even}}(x) dx = 2 \int_0^L f_{\text{even}}(x) dx$$

$$\text{b) } \int_{-L}^L f_{\text{odd}}(x) dx = 0$$

2.7.3 Fourier 級数の問題 (2)

- i) a) 以下の関数に対応する Fourier 級数を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & (-5 < x < 0) \\ 3, & (0 < x < 5) \end{cases}$$

周期は 10 とする.

- b) 関数 $f(x)$ の不連続点 $x = -5, 0, 5$ において Fourier 級数はどのような値をとるか.

- ii) $-\pi < x < \pi$ において $f(x) = x^2$ となる周期 2π の関数を Fourier 級数展開しなさい.

- iii) 前設問の結果を用いて, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を証明しなさい.*4

- iv) $f(x)$ を $-L < x < L$ で指定された周期 $2L$ の偶関数とする. $f(x)$ の Fourier 級数展開には \sin の項は現われない, 即ち,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad (2.20a)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.20b)$$

となることを証明しなさい. (2.20) は Fourier 余弦級数と呼ばれる.

- v) $f(x)$ を $-L < x < L$ で指定された周期 $2L$ の奇関数とする. $f(x)$ の Fourier 級数展開には \cos の項は現われない, 即ち,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (2.21a)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.21b)$$

となることを証明しなさい. (2.21) は Fourier 正弦級数と呼ばれる.

- vi) 以下の関数に対応する Fourier 係数を求めなさい.*5

$$f(x) = \begin{cases} 3, & (0 < x < 5) \\ 0, & (5 < x < 10) \end{cases}$$

周期は 10 とする.

*4 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は ζ 関数と呼ばれる.

*5 この関数は, $-\infty < x < \infty$ の範囲で眺めると, i) で考察した関数と同じである. 従って, Fourier 級数は a) で求めたものと同じになるはずである.

2.7.4 Parseval の恒等式の問題

- i) 周期 $2L$ の関数 $f(x)$ が区間 $(-L, L)$ において $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$ に収束するとき, Parseval の恒等式

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

を証明しなさい.

- ii) 次の関数を Fourier 級数展開しなさい:

$$a) f(x) = \begin{cases} x, & (0 \leq x < 2) \\ -x, & (-2 < x < 0) \end{cases}$$

周期 4.

- b) 前設問の Fourier 級数に対応する Parseval の恒等式を書き下しなさい.
c) 前設問の結果をもちいて, 無限級数和

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots + \frac{1}{n^4} + \cdots$$

を求めなさい.

第 3 章

複素 Fourier 級数

3.1 実 Fourier 級数からの導出

Euler の関係式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (3.1)$$

を使うと、前章で議論した周期 $2L$ の実関数 $f(x)$ の実 Fourier 級数^{*1}はもっと簡潔に書き下すことができる。ここでは、 $f(x)$ は $-L < x < L$ の区間で定義されているとする。 $c < x < c + 2L$ で定義される場合にも以下の議論は全く同様に行える。

(3.1) より

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad (3.2a)$$

である。(ia) の \cos, \sin を Euler の関係式を用いて表せば、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \frac{e^{in\pi x/L} + e^{-in\pi x/L}}{2} + b_n \frac{e^{in\pi x/L} - e^{-in\pi x/L}}{2i} \right\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\pi x/L} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\pi x/L} \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

ここで、

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.4)$$

^{*1} 前章で議論した Fourier 級数をこの章では実 Fourier 級数、Fourier 係数を実 Fourier 係数と呼ぶことにする。

と定義する. (2.2a), (2.2b) を用いると c_n は

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx - \frac{i}{2L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(\cos \frac{n\pi x}{L} - i \sin \frac{n\pi x}{L} \right) dx, \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi/L} dx, \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.5)$$

と表現できる. また (2.2a) を用いると

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

と書けるので, (3.5) を $n = 0$ まで適用して

$$\frac{a_0}{2} = c_0 \quad (3.6)$$

と表現できる. さらに (3.4) の複素共役は

$$c_n^* = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

であるが, 上式の右辺の実 Fourier 係数に (2.2a), (2.2b) を代入し, $(e^{i\theta})^* = e^{-i\theta}$ と $f(x)$ が実関数であることに注意すれば

$$c_n^* = c_{-n} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.7)$$

と表現できる. (3.4), (3.6), (3.7) を用いると (3.3) は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \quad (3.8)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx, \quad (n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

と書ける. (3.8) の右辺を $f(x)$ の複素 Fourier 級数と呼び, c_n は複素 Fourier 係数と呼ばれる. なお, (3.7) は $f(x)$ は実関数であるという条件とも解釈できる.*2

*2 この定理は次節で証明する.

(余談) : i は純虚数 $i = \sqrt{-1}$ である. これは万国共通の記号と思っていたが, 工学系の単科大学に在籍していたときに, 電気工学の分野では純虚数は j で表す, ということを知った. 電気工学では i は交流電流に用いられる記号 (直流電流は I) で, それと混同しないように j を用いるらしい. ちょっとショックだった...

3.2 いくつかの注意

3.2.1 Parseval の恒等式

複素 Fourier 係数 c_n を用いると, Parseval の恒等式 (2.18) は,

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (3.10)$$

と表せる.

3.2.2 関数 $f(x)$ が実であることの性質

$c_n = c_{-n}^*$ は, 複素 Fourier 級数の導出の過程で得られたものであるが, 以下で見るように $f(x)$ が実であることの帰結である. (3.8) で両辺の複素共役を取ると,

$$\begin{aligned} (\text{l.h.s.}) &= f(x)^* = f(x), \\ (\text{r.h.s.}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-in\pi x/L}. \end{aligned}$$

n の符号を入れ替える ($n \rightarrow -n$) と,

$$(\text{r.h.s.}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}^* e^{in\pi x/L}.$$

したがって,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}^* e^{in\pi x/L}. \end{aligned}$$

つまり

$$c_n = c_{-n}^* \quad (3.11)$$

が導かれる.

3.2.3 複素数値をとる関数の Fourier 級数展開

今までは周期 $2L$ を持つ実関数の Fourier 級数展開を考えてきたが、周期 $2L$ を持つ 2 つの実関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ から作られる複素数値をとる関数*3

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x) \quad (3.12)$$

も Fourier 級数展開や複素 Fourier 級数展開することができる。 f_1 , f_2 が以下のように Fourier 級数展開できるものとする：

$$f_1(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \beta_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad (3.13)$$

$$f_2(x) = \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \gamma_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \delta_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}. \quad (3.14)$$

ここで、

$$\alpha_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_1(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.15)$$

$$\beta_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_1(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.16)$$

$$\gamma_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_2(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.17)$$

$$\delta_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_2(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.18)$$

である。(3.12) の定義から $f(x)$ の Fourier 級数表示は

$$f(x) = \frac{\alpha_0 + i\gamma_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\alpha_n + i\gamma_n) \cos \frac{n\pi x}{L} + (\beta_n + i\delta_n) \sin \frac{n\pi x}{L} \right\} \quad (3.19)$$

となるが、係数 $\alpha_n + i\gamma_n$, $\beta_n + i\delta_n$ を改めて a_n , b_n と記せば、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right\} \quad (3.20)$$

と書ける。ここで、 a_n , b_n は (3.15) ~ (3.18) と (3.12) を使って

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.21)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.22)$$

*3 こういう言葉が一般的に広く使われているかどうか疑わしいが、(3.12) の定義から言い表している意味は理解できると思う。 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ である。

と書ける. さらに Euler の関係式 (3.1) を用いれば (3.20) は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \quad (3.23)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx \quad (n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots) \quad (3.24)$$

とも書くことができる. これらの議論は, 実部, 虚部が周期 $2L$ の実関数で作られる複素数値をとる関数の場合でも, 今まで議論してきた Fourier 級数や複素 Fourier 級数の表式がそのまま当てはまることを示している.

なお今の場合, Parseval の恒等式は

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad (3.25)$$

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (3.26)$$

である. したがって, (2.18) と (3.10) をそれぞれ (3.25) や (3.26) の左辺のように表現しておけば, その公式は $f(x)$ が複素数値をとる関数や実関数の場合でも適用できる.

3.2.4 複素 Fourier 係数の導出

周期 $2L$ の実関数 $f(x)$ が (3.8) の右辺のように展開できると仮定すれば, 実 Fourier 級数の実 Fourier 係数の公式を経なくとも, 複素 Fourier 係数の公式を導出することができる. 導出の方法は, 実 Fourier 係数を導いた方法と同様である.

(3.8) の両辺に $e^{im\pi x/L}$ を乗じて, x について $-L$ から L まで積分する:

$$(\text{l.h.s.}) = \int_{-L}^L f(x) e^{im\pi x/L} dx.$$

$$(\text{r.h.s.}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-L}^L e^{i(m+n)\pi x/L} dx.$$

ここで,

$$\int_{-L}^L e^{i(m+n)\pi x/L} dx = 2L\delta_{m,-n} \quad (3.27)$$

を用いると,

$$(\text{l.h.s.}) = 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{m,-n} = 2Lc_{-m}. \quad (3.28)$$

以上の結果を整理すると，複素 Fourier 係数の公式

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx \quad (3.29)$$

が得られる。

3.3 複素 Fourier 級数の例

2.5 節の例 3 を複素 Fourier 級数で表現（計算）してみる。

$(-\pi < x < \pi)$ において $f(x) = x^2$ で与えられ，周期 2π の周期関数の複素 Fourier 係数は，

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx \\ &= \begin{cases} (-1)^n \frac{2}{n^2}, & (n \neq 0), \\ \frac{\pi^2}{3}, & n = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.30)$$

したがって，

$$x^2 = \dots - \frac{2}{3^2} e^{-3ix} + \frac{2}{2^2} e^{-2ix} - \frac{2}{1^2} e^{-ix} + \frac{\pi^2}{3} - \frac{2}{1^2} e^{ix} + \frac{2}{2^2} e^{2ix} - \frac{2}{3^2} e^{3ix} + \dots$$

3.4 Fourier 級数の応用：関数を近似する

$-L < x < L$ の範囲で与えられた周期 $2L$ の実関数 $f(x)$ は無限個の三角関数 $(\exp[\frac{n\pi x}{L}], n = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty)$ の重ねあわせで表現できるが，もし有限個の三角関数の重ねあわせで関数 $f(x)$ を表現しようとするときには，各三角関数の係数をどのように選ぶと誤差が少なくなるか，ということについて考えてみる。

有限個の三角関数で表現された関数を

$$g(x) = \sum_{n=-N}^N d_n e^{ik_n x}, \quad (3.31)$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (3.32)$$

とする。 $N \rightarrow \infty$ で $g(x) \rightarrow f(x)$ となる。一般に $f(x) \neq g(x)$ である。いま， $f(x)$ と $g(x)$ の間の自乗誤差を ϵ とする：

$$\epsilon = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x) - g(x)|^2 dx. \quad (3.33)$$

どのように d_n を選ぶと ϵ を最小にできるであろうか．複素 Fourier 級数の知識を用いると，

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left| \sum_{n=-N}^N (c_n - d_n) e^{ik_n x} + \sum_{|n|>N} c_n e^{ik_n x} \right|^2 dx \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N (c_n - d_n)(d_m - c_m) e^{i(k_n + k_m)x} dx \\
&\quad + \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sum_{n=-N}^N \sum_{|m|>N} (c_n - d_n) c_m e^{i(k_n + k_m)x} dx \\
&\quad + \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \sum_{|n|>N} \sum_{|m|>N} c_n c_m e^{i(k_n + k_m)x} dx \\
&= \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N (c_n - d_n)(d_m - c_m) \delta_{n,-m} \\
&\quad + 2 \sum_{n=-N}^N \sum_{|m|>N} (c_n - d_n) c_m \delta_{n,-m} \\
&\quad + \sum_{|n|>N} \sum_{|m|>N} c_n c_m \delta_{n,-m} \\
&= \sum_{n=-N}^N |c_n - d_n|^2 + \sum_{|n|>N} |c_n|^2. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

ここで， d_n を変化させて ϵ を最小にするためには

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial d_n} = 0 \tag{3.35}$$

でなければならない．(3.35) に (3.34) を代入し整理すると，

$$c_n = d_n \tag{3.36}$$

が得られる． c_n は実関数 $f(x)$ の複素 Fourier 係数なので，有限個の三角関数の重ねあわせで実関数 $f(x)$ を近似するときには，重ねあわせの係数 d_n として Fourier 係数 c_n を用いれば誤差は最小となることが上の解析からわかる．*4

*4 ここで用いた関数がある既知の関数の重ねあわせとして表現しておいて，その係数の変分をとることにより関数の変分を計算するやり方は，Rayleigh-Ritz の変分法と呼ばれる．

3.5 演習問題

i) $-L < x < L$ の範囲で定義される周期 $2L$ の周期関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \quad (3.37)$$

で与えられるとき, c_n が

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx \quad (3.38)$$

であることを証明しなさい. (実 Fourier 級数を経ずに, (3.37) を出発点とした議論を行う.)

ii) $-L < x < L$ の範囲で $f(x) = e^{kx}$ と与えられる周期 $2L$ の関数の複素 Fourier 級数表示は

$$f(x) = \frac{\sinh(kL)}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{k + i(n\pi/L)}{k^2 + (n\pi/L)^2} e^{in\pi x/L} \quad (3.39)$$

となることを証明しなさい. ここで k は $k > 0$ である.

iii) $0 < x < T$ において $f(x) = \frac{ax}{T}$ で与えられ, 周期 T の関数 (こぎり波) を図示し, さらに複素 Fourier 級数を求めなさい. ただし, a は正の実数とする.

iv) $0 < x < 1$ において $f(x) = A \sin \pi x$ で与えられ, 周期 1 で定義される関数の複素 Fourier 級数を求めなさい. ここで A はある定数とする.

v) $-\pi < x < \pi$ の範囲で, $f(x) = \cos \alpha x$ の関数について, 以下の問いに答えなさい. ここで, α は整数でないとする.

a) $f(x)$ の複素 Fourier 級数表示を求めなさい.

b)

$$\pi \cos \alpha x = 2 \sin \alpha \pi \left\{ \frac{1}{2\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha \cos nx}{\alpha^2 - n^2} \right\} \quad (3.40)$$

を証明しなさい.

c) 前設問で $x = \pi$, $\alpha = z$ とおくことにより,

$$\pi \cot \pi z - \frac{1}{z} = 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}$$

となる. この式が,

$$\frac{d}{dz} \ln \left(\frac{\sin \pi z}{\pi z} \right) = \frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right) \quad (3.41)$$

となることを示しなさい。ここで $0 \leq z \leq 1$ とする。

d)

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad (3.42)$$

を証明しなさい。

vi) $-L < x < L$ の範囲で $f(x)$ で定義され、周期 $2L$ の実関数 $f(x)$ の Parseval の等式

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (3.43)$$

を実 Fourier 級数の Parseval の恒等式を使って証明しなさい。

vii) $-L < x < L$ の範囲で $f(x)$ で定義され、周期 $2L$ の関数 $f(x)$ の Parseval の等式

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (3.44)$$

を証明しなさい。(注意：ここで $f(x)$ は実関数ではない。)

viii) a を整数でない実数とする。関数 $f(x) = e^{iax}$, ($-\pi < x < \pi$), (周期 2π) を複素 Fourier 級数に展開せよ。さらに Parseval の恒等式を用いて

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 a\pi}$$

を証明しなさい。注意：この問題では $f(x)$ は複素関数なので、Parseval の恒等式は

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (3.45)$$

であることを注意しなさい。

第 4 章

Fourier 変換と Fourier 積分

4.1 復習

4.1.1 実 Fourier 級数

$-L < x < L$ の範囲（即ち有限区間）内で定義され、その外側の区間では $2L$ の周期を持つ実関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k_n x + b_n \sin k_n x) \quad (4.1)$$

と展開できる. ここで $k_n \equiv n\pi/L$ であり, Fourier 係数 a_n, b_n は

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos k_n x \, dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.2)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin k_n x \, dx, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.3)$$

で与えられる. これが全ての基本である.

x を位置と解釈すると, k_n は波数 (2π という距離の間に存在する波の山, もしくは谷の数) と解釈できる. 以下, 便宜的に k_n を波数と呼ぶ.

4.1.2 複素 Fourier 級数

上記の展開で、三角関数を Euler の関係式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いて書き直すと Fourier 級数 (4.1) は、

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik_n x} \quad (4.4)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-ik_n x} dx \quad (4.5)$$

と書ける。 $f(x)$ が実関数でなくても (4.1), (4.4) のように展開できる。ただし、 $f(x)$ が実関数のとき、複素 Fourier 係数 (4.5) には $c_n = c_{-n}^*$ の関係が存在する。

4.2 Fourier 変換

有限区間で定義された周期関数を三角関数の重ね合わせで表現したものが実 Fourier 級数もしくは複素 Fourier 級数であった。取り扱う関数を有限区間で定義された周期関数から無限区間 $-\infty < x < \infty$ で定義された関数（周期は無量大、即ち周期関数でなくてもよい）に拡張した複素 Fourier 級数が、以下で説明する Fourier 変換である。このとき、重ね合わせは和（無限級数）の形ではなく、積分の形で表現される。

4.2.1 Fourier 変換の導出

Step 1 : (4.5) を (4.4) に代入する: *1

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \left\{ \int_{-L}^L f(x') e^{-ik_n x'} dx' \right\} e^{ik_n x} \quad (4.6)$$

係数 $1/(2L)$ は $k_n = \pi n/L$ の関係を使って、 $1/(2L) = \Delta k/(2\pi)$ と表現できる。ここで、 Δk は隣り合う波数の差を表し、 $\Delta k \equiv k_n - k_{n-1}$ である。従って、(4.6) は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta k}{2\pi} \left\{ \int_{-L}^L f(x') e^{-ik_n x'} dx' \right\} e^{ik_n x} \quad (4.7)$$

と書ける。

*1 c_n の積分の積分変数に注意。積分変数には任意の文字が使える。ここでは $f(x)$ の変数 x との混同を避けるため、 c_n の積分変数には x' を用いることにする。

Step 2 : $L \rightarrow \infty$ の極限をとる. 即ち, 関数の周期を無限に長いとする. このとき, 離散変数 (離散的波数) であった k_n は連続変数 (連続的波数, k で表す) になり, また, 和は積分に置き換えられる (n に関する和は, k に関する積分に置き換えられる):*2

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta k \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dk. \quad (4.8)$$

従って, (4.7) は

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \right\} e^{ikx} \quad (4.9)$$

と書ける.

Step 3 (final step) : ここで,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \quad (4.10)$$

と置くと, (4.9) のように表現された $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk \quad (4.11)$$

と表現できる. (4.10) は関数 $f(x)$ の **Fourier 変換** と呼ばれ, しばしば $\hat{f}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ と書かれる. 一方, $f(x)$ は $\hat{f}(k)$ の逆 **Fourier 変換** (inverse Fourier transform) と呼ばれ, $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(k)\}$ と書かれる.

4.2.2 いくつかの注意

Note 1 : (4.9) はある関数 $f(x)$ を Fourier 変換し, さらにそれを逆変換すれば, もとの関数 $f(x)$ に戻る:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\{f(x)\}]. \quad (4.12)$$

ことを言っているに過ぎない.

Note 2 : (4.9) を

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk \right\} \quad (4.13)$$

*2 区分求積法の極限が積分になることを思い出そう.

と書き換えておくと,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\delta(x-x')dx' = f(x) \quad (4.14)$$

という性質を持った関数 $\delta(x-x')$,

$$\delta(x-x') \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk, \quad (4.15)$$

が存在することが期待される. 実際, このような関数は δ 関数 (もしくはこの関数を提唱した人の名前をつけて, Dirac の δ 関数) と呼ばれ, 量子力学を定式化するときに Dirac が導入した関数である. この関数は一般の関数とは異なった性質を持っており超関数という部類の関数に位置付けられる.*³ (4.14) で $f(x) = 1$ とおくと

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')dx = 1 \quad (4.16a)$$

もしくは, $\xi \equiv x-x'$ と変数変換してさらに $\xi \rightarrow x$ と置き換えることにより

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \quad (4.16b)$$

が導かれる. これも δ 関数の重要な性質の一つである. Delta 関数は Kroneker のデルタ,

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases} \quad (4.17)$$

ここで m, n は整数, の連続変数版 (m, n が整数ではなく実数の場合の Kroneker のデルタ) と見なせる.

Note 3 : (4.10), (4.11) に現れる係数 $1/(\sqrt{2\pi})$ は Fourier 変換, 逆 Fourier 変換が対称的な形になるように選んである. テキストによっては,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-ikx'} dx' \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} dk \quad (4.18)$$

や

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-ikx'} dx' \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} dk \quad (4.19)$$

*³ Dirac が δ 関数を導入してから, 数学にあらたに超関数を研究する分野が出来上がったらしい. δ 関数が量子力学にいかにも導入されたかは, Dirac の量子力学のテキスト, Principles of Quantum Mechanics, Oxford Univ. Press (日本ではみすず書房が発行), 日本語訳は岩波書店が発行, を参照して欲しい. これも理学部の大学生としては一度は手にとって眺めておいて欲しい書物である.

と表現している場合がある。これは (4.9) に現れている係数 $1/(2\pi)$ を分解するか、という任意性に由来している。ともかく、正変換のあと逆変換して元の関数に戻るよう係数をうまく分解してくっつけておけばよい。

Note 4 : テキストによっては、Fourier 変換, Fourier 逆変換を

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{ikx'} dx' \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-ikx} dk \quad (4.20)$$

と表現している場合もある。上式は $x \rightarrow -x, k \rightarrow -k$ という変数変換によって、先の公式 (4.10), (4.11) に戻る。これも、正変換を、 $\int \dots e^{ikx} dx$ で定義したら、逆変換を $\int \dots e^{-ikx} dk$ で定義するという風に、やはり正変換のあと逆変換して元の関数に戻るようになっていけばよい。(Delta 関数についても同様。)

Note 5 : $f(x)$ が実であれば、

$$\hat{f}(-k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' = \hat{f}(k)^* \quad (4.21)$$

である。これは複素表示の Fourier 級数における Fourier 係数 c_n が満足する関係 $c_{-n} = c_n^*$ に対応するものである。

Note 6 : Parseval の恒等式は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk \quad (4.22)$$

と表せる。

Note 7 : 複素 Fourier 級数の補足説明でも同様のことを述べたが、関数 $f(x)$ が (4.11) の右辺のように表現できることを認めれば、Fourier 変換の公式 (4.10) の公式は、以下のように導くことができる。

(4.11) の両辺に $e^{ik'x}$ を乗じて x について $-\infty$ から ∞ まで積分する。

$$\text{l.h.s} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ik'x} dx.$$

$$\text{r.h.s} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx \hat{f}(k) e^{i(k+k')x}.$$

ここで、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k+k')x} dx = 2\pi \delta(k+k'),$$

を用いると、

$$\text{r.h.s} = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{f}(k) \delta(k+k') = \sqrt{2\pi} \hat{f}(-k').$$

以上を整理すると,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx,$$

すなわち (4.10) を得る.

4.3 Fourier 積分

Fourier 変換とは, 周期関数の級数展開表現である複素 Fourier 級数を, 周期のない関数に拡張したものであることは前節で示した. いっぽう複素 Fourier 級数とは, Fourier 級数の展開関数である三角関数を Euler の関係式を用いて単に書き直したものである. したがって, 上記の2つの関係から, 周期関数の表現である Fourier 級数を, 周期のない関数に拡張した表現も存在するであろうことは容易に想像がつく. それは Fourier 積分と呼ばれるものである.

通常のテキストでは, Fourier 級数展開の拡張として Fourier 積分を導入し, さらにそれを複素表示して Fourier 変換を導入するが, ここでは順序を逆にして, Fourier 変換から Fourier 積分を導いてみる.

4.3.1 Fourier 積分の導出

Step 1 $f(x)$ の Fourier 変換を $\hat{f}(k)$ とし,

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \quad (4.23)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} dk \quad (4.24)$$

と定義する. このとき, $f(x)$ が実数関数であるという要請から,

$$\hat{f}(-k)^* = \hat{f}(k) \quad (4.25)$$

となる.

Step 2 (4.24) を以下のように変形する:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \hat{f}(k)e^{ikx} dk.$$

上式右辺第二項は積分変数を $k \rightarrow -k$ と変換し, さらに (4.25) の関係式を用い

ると,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \hat{f}(k) e^{ikx} dk + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \hat{f}(k)^* e^{-ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left(\hat{f}(k) e^{ikx} + \hat{f}(k)^* e^{-ikx} \right) dk \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\hat{f}(k) e^{ikx} \right] dk. \end{aligned} \quad (4.26)$$

$\hat{f}(k)$ の実部, 虚部をそれぞれ $\hat{f}_r(k)$, $\hat{f}_i(k)$ とすると, (4.26) は

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \hat{f}_r(k) \cos kx - \hat{f}_i(k) \sin kx \right\} dk \quad (4.27)$$

となる.

Step 3 (4.23) より

$$\begin{aligned} \hat{f}_r(k) &= \int_{-\infty}^\infty f(x) \cos kx dx, \\ \hat{f}_i(k) &= - \int_{-\infty}^\infty f(x) \sin kx dx, \end{aligned}$$

とあたえられるので, あらためて $A(k)$, $B(k)$ として

$$A(k) = \int_{-\infty}^\infty f(x) \cos kx dx, \quad (4.28)$$

$$B(k) = \int_{-\infty}^\infty f(x) \sin kx dx, \quad (4.29)$$

を定義すると, (4.27) は

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ A(k) \cos kx + B(k) \sin kx \right\} dk \quad (4.30)$$

となる. (4.30) を $f(x)$ の Fourier 積分表示という.

4.3.2 いくつかの注意

Note 1: テキストによっては Fourier 積分は

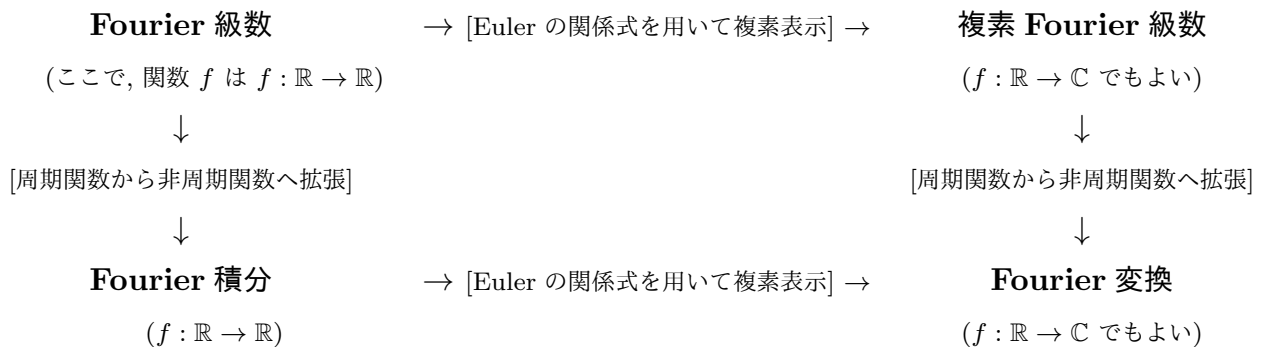
$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \int_{-\infty}^\infty d\xi f(\xi) \cos k(x - \xi) \quad (4.31)$$

と表現しているものもある. これは, (4.30) の $A(k)$, $B(k)$ に (4.28), (4.29) を代入すれば直ちに得られる.

Note 2: 周期関数 $f(x)$ の Fourier 級数展開を周期のない関数に拡張するというやり方 (これは Fourier 変換の導出のところで行ったものと全く同じやり方) で (4.28), (4.29), (4.30) を導くことができる.

4.4 まとめ

Fourier 級数, 複素 Fourier 級数, Fourier 積分, Fourier 変換の相互の関係は以下のよう
にまとめることができる.



4.5 演習問題

4.5.1 Fourier 変換に関する問題

関数 $f(x)$ の Fourier 変換, 逆変換をそれぞれ $\hat{f}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$,
 $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(k)\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} dk$, と定義する.

i) a) 次の関数の Fourier 変換を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (4.32)$$

b) $a = 3$ として, $f(x)$ とその Fourier 変換を図示しなさい.

ii) a) 前問の結果を用いて, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ka \cos kx}{k} dk$ の値を見積もりなさい.

b) $\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$ の値を求めなさい.

iii) a) $f(x)$ が偶関数の時, Fourier 変換の公式は以下のように与えられることを示し
なさい.

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos kx dx, \quad (4.33)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}(k) \cos kx dk. \quad (4.34)$$

ヒント: $\hat{f}(k)$ が (4.33) で与えられるとき, $\hat{f}(k)$ は偶関数か奇関数か.

- b) $f(x) = e^{-m|x|}$, $m > 0$ の Fourier 変換を求めなさい。
 c) 前設問の結果を用いて,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2 + m^2} dk = \frac{\pi}{2m} e^{-mx}, \quad (m > 0, x > 0)$$

を示しなさい。

- iv) Fourier 変換に関する以下の性質を証明しなさい。 α, β, γ は定数で有限の値を持つとする。

- a) $\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(x)\} + \beta \mathcal{F}\{g(x)\}$
 b) $\mathcal{F}\{f(x - \alpha)\} = e^{-ik\alpha} \mathcal{F}\{f(x)\}$
 c) $\mathcal{F}\{e^{-\alpha x} f(x)\} = \hat{f}(k - i\alpha)$
 d) $\mathcal{F}\{f(\gamma x)\} = \frac{1}{|\gamma|} \hat{f}\left(\frac{k}{\gamma}\right), \quad (\gamma \neq 0)$
 e) $f(x)$ が微分可能で, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ のとき, $\mathcal{F}\left\{\frac{df(x)}{dx}\right\} = ik\mathcal{F}\{f(x)\}$

4.5.2 Delta 関数の問題

- i) a) 次の関数の Fourier 変換を求めなさい。^{*4}

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases} \quad (4.35)$$

- b) $a \rightarrow 0$ の極限では $f(x)$ およびその Fourier 変換はどのような関数になるか述べなさい。

4.5.3 畳み込みに関する問題

$f(x)$ と $g(x)$ の畳み込みを $f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u) du$ で定義する。このとき以下の設問に答えなさい。

- i) $f * g = g * f$ を証明しなさい。
 ii) $f * (g * h) = (f * g) * h$ を証明しなさい。
 iii) $f * (g + h) = f * g + f * h$ を証明しなさい。
 iv) 畳み込みの定理 $\mathcal{F}\{f * g\} = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}\{f\} \mathcal{F}\{g\}$ を証明しなさい。

^{*4} 不連続点 $x = \pm a$ における $f(x)$ の値は, $\{f(x+0) + f(x-0)\}/2$ とする。

第 5 章

Fourier 級数 (Fourier 変換) の幾何学的意味：直交関数展開

第 2 章では、周期関数の Fourier 級数を天降りの導入し、それを出発点として複素 Fourier 級数展開、Fourier 積分、Fourier 変換と拡張を行ってきた。本節では、再び Fourier 級数に戻って、ベクトルという立場から、その意味 (ココロ) を説明することにする。ここに登場する考え方や概念は、ベクトルと三角関数と三角関数の積分だけ、即ち高校の数学で習ったものだけである。

5.1 ベクトルの復習

まず、高校生のように習ったベクトルの復習をしておく。なお、高校生のようにベクトル量は \vec{A} などと上付きの矢印を付してスカラー量と区別した。しかし、理由は知らないが大学の講義や大学で使う教科書、研究論文ではベクトル量は \mathbf{A} など太字であらわすことが多い。ここでもベクトル量は太字で表すことにする。^{*1}

3次元空間内の任意のベクトルを \mathbf{u} とする。デカルト座標系では \mathbf{u} は次のように表現される：

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}. \quad (5.1)$$

ここで、 \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} はそれぞれ x , y , z 方向の単位ベクトルであり u_x , u_y , u_z はそれぞれ x , y , z 方向の \mathbf{u} の成分である。^{*2}

^{*1} 私は大学入学当初、ベクトル量を太字で書くことを習ったときには、一生懸命アルファベットの太字がうまく書けるように練習した。ベクトルを \mathbf{A} と表記すると高校数学を超えたもっと高級なもの、程度の高いものをやっているような錯覚を覚えたからである。皆さんもそんな経験はありませんか？

^{*2} ベクトル \mathbf{u} を高校数学では $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ と書いていたが、大学では $\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}$ と単

ベクトルでは「内積」という演算が定義でき、単位ベクトルは内積に対して次のような性質を持つベクトルである:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{i}|^2 = 1, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{j}|^2 = 1, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{k}|^2 = 1. \quad (5.3)$$

(5.2) 式の性質は,

- 異なる単位ベクトルは互いに直交する

という性質を表しており, (5.3) 式の性質は,

- 単位ベクトルの大きさは1である

ことを表している. 成分 u_x, u_y, u_z は単位ベクトルのこのような性質を用いて, \mathbf{u} と $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ との内積をそれぞれ計算することにより求められる. 例えば \mathbf{u} と \mathbf{i} の内積は,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{i} = u_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + u_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = u_x |\mathbf{i}|^2.$$

従って,

$$u_x = \frac{1}{|\mathbf{i}|^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{i}. \quad (5.4)$$

同様にして u_y, u_z は,

$$u_y = \frac{1}{|\mathbf{j}|^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{j}, \quad u_z = \frac{1}{|\mathbf{k}|^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{k}. \quad (5.5)$$

と求められる. ここでは, あるデカルト座標系でベクトル \mathbf{u} を表現したが, いま考えた座標系を例えば z 軸を回転軸にして任意の角度回転させたような座標系 (単位ベクトルが $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}$, これも直交座標系である) を考えることができる. つまり空間の中にはいろいろな直交座標系を張ることができる. そして各座標系で同じようにベクトル \mathbf{u} を表現できる (展開できる). このとき, 各座標系における \mathbf{u} の成分の値は異なる (表現は異なる) が, \mathbf{u} はあくまでも \mathbf{u} である. どういう座標系を用いて \mathbf{u} を表現すればよいか? それは問題が最も簡単に扱えるような座標系を選べばよいのである.

位ベクトルを使って書く. このような表記もぜひ採用してほしい. ベクトルの微分を考えると, この表記は便利である. デカルト座標系では単位ベクトルの空間微分は0なので, デカルト座標で成分表示されたベクトルの空間微分では, それは単に各成分を微分すればよかった. しかしながら, 円柱座標系や極座標系では単位ベクトルの方向が場所によって異なるために, ベクトルをこれらの座標系で表示したときの空間微分は, ベクトルの成分の微分のほかに単位ベクトルの微分も残ってくる. 高校数学のようにベクトルの成分表示を (u_x, u_y, u_z) と書いていると, このようなことに気づかずに大きな過ちを犯すことがあるので, 単位ベクトルまで含めた記法を使うことを強く薦める.

5.2 Fourier 級数展開のココロ

ここでは Fourier 級数展開 (4.1) 式とは関数 $f(x)$ を (5.1) 式の右辺の様にベクトルとその成分を使って表現したものでことを説明する. 関数 $f(x)$ がベクトル \mathbf{u} に, 可算無限個^{*3}の三角関数 $\cos(k_n x)$, ($n = 0, 1, 2, \dots, \infty$), $\sin(k_n x)$, ($n = 1, 2, \dots, \infty$) が単位ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, に, 可算無限個の Fourier 係数 a_n , ($n = 0, 1, 2, \dots, \infty$), b_n , ($n = 1, 2, \dots, \infty$) が成分 u_x, u_y, u_z に対応する. 関数を可算無限次元のベクトルと見做すことがミソである.

ベクトル - 関数 対応表		
\mathbf{u}	\iff	$f(x)$
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	\iff	$\cos(k_n x), (n = 0, 1, 2, \dots, \infty)$ $\sin(k_n x), (n = 1, 2, \dots, \infty)$
u_x, u_y, u_z	\iff	$a_n, (n = 0, 1, 2, \dots, \infty)$ $b_n, (n = 1, 2, \dots, \infty)$

関数 $f(t)$ が (5.1) 式の様な形に展開できるということは, 単位ベクトルに相当する三角関数が, (5.2) 式に相当する性質を持っていなければならない. そこで, まず「関数の内積」を定義する. 関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との内積を (f, g) で表し,

$$(g, f) \equiv \int_{-L}^L g^*(x) f(x) dx, \quad (5.6)$$

と定義する. ここで, $*$ は複素共役を表す. 即ち, $f(x)$ の複素共役と $g(x)$ の積を関数の定義域で積分する. 今の場合実関数を考えているので, “複素共役”を定義に持ち込まなくてもよいが, Fourier 変換のように複素数値をとる関数を取り扱うときに必要となる. (5.6) 式の定義のもと, 三角関数の内積を計算する.

$$\left(\sin(k_m x), \cos(k_n x) \right) = \int_{-L}^L \sin(k_m x) \cos(k_n x) dx = 0, \quad (5.7)$$

$$(m = 1, 2, \dots, \infty, n = 0, 1, 2, \dots, \infty).$$

$$\left(\sin(k_m x), \sin(k_n x) \right) = \int_{-L}^L \sin(k_m x) \sin(k_n x) dx = 0, \quad (5.8)$$

^{*3} 1, 2, 3, ... と勘定できる無限大のこと. 例えば自然数全体の集合の要素の個数がこれに相当する. これに対し, 数えられない無限大 (非可算無限) とは実数全体の集合の要素の個数のようなもの.

$$(m, n = 1, 2, \dots, \infty. \text{ 但し, } m \neq n).$$

$$\left(\cos(k_m x), \cos(k_n x) \right) = \int_{-L}^L \cos(k_m x) \cos(k_n x) dx = 0, \quad (5.9)$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots, \infty. \text{ 但し, } m \neq n).$$

$$\left(\sin(k_n x), \sin(k_n x) \right) = \int_{-L}^L \sin^2(k_n x) dx = L, \quad (5.10)$$

$$(n = 1, 2, \dots, \infty).$$

$$\left(\cos(k_n x), \cos(k_n x) \right) = \int_{-L}^L \cos^2(k_n x) dx = L, \quad (5.11)$$

$$(n = 1, 2, \dots, \infty).$$

但し, $\cos(k_0 x)$ は恒等的に 1 であるから (5.11) 式において $n = 0$ は別に考える必要がある.

$$\left(\cos(k_0 x), \cos(k_0 x) \right) = (1, 1) = \int_{-L}^L dx = 2L. \quad (5.12)$$

三角関数の内積で考えられるものは, 上にすべて列挙した. (5.7) 式~(5.9) 式は三角関数は互いに直交している (単位ベクトルは互いに直交することに対応: (5.2) 式参照) ことを表している. 一方 (5.10) 式~(5.12) 式は三角関数の大きさの二乗を表している. 上で見たように三角関数は内積の大きさが 1 になっていない. 即ち単位 (ベクトル) ではないことが特徴である.*4

三角関数の上に挙げた性質を利用して, 関数 $f(x)$ の (4.1) 式の表現と三角関数との内積を計算する. これは, ベクトルを (5.1) 式のように展開したときの係数を求めるときの操作と全く同様である.

例えば, $f(x)$ と $\sin k_n x$ との内積により $\sin k_n x$ の係数 (ベクトル $f(x)$ の $\sin k_n x$ 方

*4 内積は掛け算の順番を逆にしても結果は変わらないが, 上で定義される関数の内積もこの性質を満足していることに注意.

向の成分) b_n を取り出せる :

$$\begin{aligned} (\sin(k_n x), f(x)) &= \left(\sin(k_n x), \frac{a_0}{2} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m (\sin(k_n x), \cos(k_m x)) + b_m (\sin(k_n x), \sin(k_m x)), \\ &= b_m (\sin(k_n x), \sin(k_m x)), \\ b_n &= \frac{(\sin(k_n x), f(x))}{(\sin(k_n x), \sin(k_n x))} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin(k_n x) dx. \end{aligned} \quad (5.13)$$

($n = 1, 2, \dots, \infty$.)

同様に $f(x)$ と $\cos k_n x$ との内積により $\cos k_n x$ の係数 (ベクトル $f(x)$ の $\cos k_n x$ 方向の成分である) a_n を取り出せる (ただし, $n \neq 0$) :

$$\begin{aligned} (\cos(k_n x), f(x)) &= \left(\cos(k_n x), \frac{a_0}{2} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m (\cos(k_n x), \cos(k_m x)) + b_m (\cos(k_n x), \sin(k_m x)), \\ &= a_n (\cos(k_n x), \cos(k_n x)), \\ a_n &= \frac{(\cos(k_n x), f(x))}{(\cos(k_n x), \cos(k_n x))} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(k_n x) dx. \end{aligned} \quad (5.14)$$

($n = 1, 2, \dots, \infty$.)

$n = 0$ の時は,

$$\begin{aligned} (\cos(k_0 x), f(x)) &= (1, f) = \left(1, \frac{a_0}{2} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m (1, \cos(k_m x)) + b_n (1, \sin(k_m x)), \\ &= \frac{a_0}{2} (1, 1), \\ a_0 &= \frac{(1, f(x))}{(1, 1)/2} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx. \end{aligned} \quad (5.15)$$

である. (5.15) 式は (5.14) 式において, $n = 0$ としたものと一緒なので, (5.14) 式の定義に含めてよい. このようにして, Fourier 級数展開における Fourier 係数の公式が得られた. ((4.2) 式, (4.3) 式参照.)

これら (5.13) 式~(5.15) 式が (5.4) 式~(5.5) 式に相当していることは一目瞭然である. 従って, 3次元空間内の任意のベクトルが, 互いに直交する単位ベクトルで (5.1) 式のように展開されるのと同様に, 関数を可算無限次元のベクトルと見做せば, Fourier 級数展開とは三角関数という可算無限個の規格化されていない互いに直交する関数で周期関数を展開したものである, といえる. このような, 互いに直交する関数の組を直交関数系と言う. も

しそれらの大きさが 1 に規格化されていれば, 正規直交関数系と呼ばれる. 例えば,

$$\frac{1}{\sqrt{2L}}, \quad (5.16)$$

$$\frac{1}{\sqrt{L}} \cos k_n x, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.17)$$

$$\frac{1}{\sqrt{L}} \sin k_n x, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.18)$$

は正規直交関数系である.

さらに, (5.16)~(5.18) のうちどれか一つでもかけると, それらの重ね合わせでは周期 $2L$ の関数を表現できなくなる. 3次元空間のベクトルを表現するには単位ベクトルが, 2つ以下では不十分で3つ必要であったのと同様である. このように, 関数を表現するのに十分な数の直交関数系は, 完全系と呼ばれ (5.16)~(5.18) は完全正規完全直交系と呼ばれる.

上で見たように Fourier 係数, a_n, b_n に $1/L$ という因子が現れるのは, 関数を展開する時に用いた直交関数の大きさが 1 に規格化されていないために現れたものであり, また, Fourier 級数展開 (5.1) において a_0 に $1/2$ の因子が現れるのも $(\cos(k_n x), \cos(k_n x)), (n = 1, 2, \dots, \infty)$ と $(\cos(k_0 x), \cos(k_0 x))$ とで大きさが因子 2 だけ異なることに由来していることがわかる. ((5.16), (5.17) との違いからも Fourier 級数展開 (5.1) における因子 $1/2$ の出現の理由がわかる.)

5.3 まとめ

このように Fourier 級数展開がベクトルの展開と対応していることは, 単なる偶然ではなく, 関数をベクトルと見做すことはきちんとした数学の概念である. 従って, いま考えているような有限区間を定義域とする関数の展開だけでなく, 実数全体を定義域とする関数の展開も同じように考えることができる. 実数全体を定義域とする関数を $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ikx)$ という完全正規直交関数系で展開したものが Fourier 変換である.*5

三角関数以外にも直交関数系は存在し, その直交関数系を用いて関数を展開することができる. 直交関数系の代表的なものとしては, 円筒関数, 球面調和関数と呼ばれるものがある.*6 前者は, 境界が円形をした領域内での関数の展開に最適な関数 (例えば太鼓の膜の振動を表現する) で, 後者は球面上で定義された関数を展開するとき威力を発揮する. 実際に, 大気大循環モデルと呼ばれる天気予報や地球温暖化などの気候研究に用いられてい

*5 展開に用いた直交関数の個数が可算無限個か不可算無限個か, に応じて展開したときの表現が和で表されたり, 積分で表される.

*6 より詳しく知りたい人は Sturm-Liouville 型の微分方程式の解の性質 (あまり数学的なものではなく, 異なる固有値に属する固有関数は直交するというような性質) を勉強して欲しい.

る数値モデル（数値計算プログラム）では、風速、気温、気圧等の物理量を（水平方向には）球調和関数で展開し、展開係数の時間発展を計算し、それを再び重ね合わせて場の量に表現しなおす、という操作を行っている。^{*7}

先に、空間内にはさまざまな直交座標が存在し、その直交座標でベクトルを表現することができるが、どのような座標系を用いようがベクトル \mathbf{u} の実体は変わることが無く、単に表現の仕方が異なるだけである。どの座標系を用いるかは、解く問題が一番簡単になる座標系を選べばよいことを注意した。これと全く同様に、関数 $f(x)$ をどのような直交関数で展開しても $f(x)$ の実体は変わりなく、ただ表現が異なるだけであり、どのような直交関数で展開してもよいのであるが、解く問題が一番簡単になる直交関数を選び展開するのが最も便利である。ではなぜ、Fourier 級数展開や Fourier 変換がよく用いられるのか？それは我々に最も馴染み深い“波”， $(\sin kx, \cos kx, \exp(ikx))$ の集まりという目で問題を理解・解釈できるからである。

^{*7} これには、計算の技術的な理由もあるのだが。

第6章

拡散方程式

これまで扱ってきた Fourier 級数は拡散方程式とは密接な関係がある。拡散方程式を解くために Fourier は Fourier 級数の概念を導入したといわれている。一方、拡散方程式は波動方程式と並んで地球惑星科学における様々な現象の素過程を記述する方程式の代表的なものである。本章では 1 次元空間の拡散方程式を取り上げ、その導出や拡散方程式が持つ性質、Fourier 級数・Fourier 変換の応用としての拡散方程式の解法を解説する。

6.1 拡散方程式の導出

本節では確率的な考え方から、拡散方程式の導出を行う。

1 次元空間を Δx の間隔で離散化し、各格子点上にはある物理量 $C(x, t)$ が割り当てられているものとする。ここで、 $x = m\Delta x$ (m は整数) である。いま、時刻 t から $t + \Delta t$ の間に、各格子上の物理量が隣の格子に確率的に飛び移ることを考える。(図 6.1 参照)

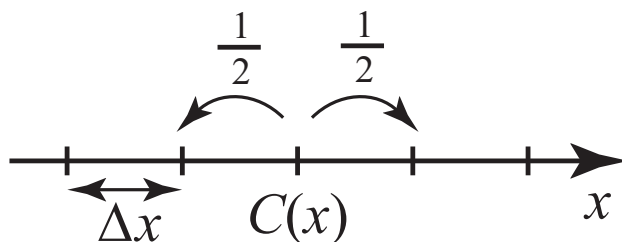


図 6.1 拡散現象の確率論的モデル

飛び移りは等方的であるとする。即ち、 x にあった物理量は Δt の間に、 $1/2$ の確率で $x + \Delta x$ に、 $1/2$ の確率で $x - \Delta x$ に飛び移るものとする。このとき $t + \Delta t$ における格子

x 上の物理量 $C(x, t + \Delta t)$ の期待値は,

$$C(x, t + \Delta t) = \frac{1}{2}C(x + \Delta x, t) + \frac{1}{2}C(x - \Delta x, t), \quad (6.1)$$

と表現できる. (6.1) の右辺第 1 項は, 時刻 t において注目している格子点 x の右隣の格子点に存在していた C が確率 $1/2$ で時刻 $t + \Delta t$ に x に飛び移ってくることを表し, 一方, 右辺第 2 項は, 時刻 t において注目している格子点 x の左隣の格子点に存在していた C が確率 $1/2$ で時刻 $t + \Delta t$ に x に飛び移ってくることを表している. ここで, 物理量 C の値もその期待値も同じ記号で示した. $\Delta x, \Delta t$ が充分小さいとして, (6.1) の各項を Taylor 展開し, 整理すると,

$$\frac{\partial C}{\partial t} \Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \quad (6.2)$$

を得る. ここで $\mathcal{O}((\Delta t)^2), \mathcal{O}((\Delta x)^3)$ を無視し,*¹ (6.2) を整理すると, 1次元の拡散方程式,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (6.3)$$

$$\kappa = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}, \quad (6.4)$$

が得られる. ここで κ は拡散係数とよばれ, (6.4) から正の量であることがわかる.

一般に拡散方程式は

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \kappa \nabla^2 C, \quad (6.5)$$

と書かれる. 1次元格子を, 正方格子や立方格子に変えて同じ議論を行えば, それぞれ 2次元, 3次元の拡散方程式が得られる.

上で述べた物理的考察は, “確率的な揺らぎ (微視的なゆらぎ) によって近傍に輸送される物理量の発展方程式は拡散方程式に従う”, ことを示している. したがって輸送される物理量としては物質であっても, 温度 (熱), 運動量等, 何でもよい. つまり, 広範な現象に対して同様の方程式が成立する.

上の確率的な飛び移りのモデルを少し変更して次のようなモデルを考えてみる. 飛び移りは等方的であるが, 同じ格子点上に留まる確率を q とし, 隣の格子に飛び移る確率を p とする. したがって, x にあった物理量は Δt の間に, $p/2$ の確率で $x + \Delta x$ に, $p/2$ の確率で $x - \Delta x$ に飛び移るものとする. (ここで $q + p = 1$ に注意.) 前と同様に $t + \Delta t$ における格子 x 上の物理量 $C(x, t + \Delta t)$ の期待値は

$$C(x, t + \Delta t) = \frac{p}{2}C(x + \Delta x, t) + \frac{p}{2}C(x - \Delta x, t) + qC(x, t) \quad (6.6)$$

*¹ $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$ とは Δt の 2 次以上の項を表す記号である. 同様に $\mathcal{O}((\Delta x)^3)$ は $(\Delta x)^3$ 次以上の項である.

と表現でき、Taylor 展開を行い、(6.6) を整理すると再び拡散方程式 (6.3) を得る。ただしこのときの拡散係数 κ は

$$\kappa = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} p, \quad (6.7)$$

となる。 $0 < p < 1$ なので、ここで考えたモデルの拡散係数は先に考えたモデルの拡散係数 (6.4) よりも小さい。このモデルでは物理量 C は注目する点に留まることができ、先のモデルに比べると物理量の“散らばりかた”は遅くなっていることが直感的に分かる。このことから拡散係数の値は物理量の輸送される、もしくは散らばっていく、速さを特徴付ける指標であることがわかる。ただし、拡散係数は (速さ) \times (長さ) の次元を持つので、物質の輸送される「速さ」ではないことに注意する必要がある。(拡散係数の値が大きいと、物理量が速く散らばっていくが。)

現象を考える空間の全領域を D で表すと、 C の総量、

$$I = \int_D C(x, t) dx \quad (6.8)$$

の値が保存するという性質を拡散方程式は持つ。この証明は実際に後で行うが、上の物理的モデルからもこのような保存量が存在することが直感でわかる。上のモデルでは、各格子上の物理量は確率的に隣の格子に飛び移るが、飛び移る際にはその値は保存されている。そこで上記の積分が時間と共に保存していることが、この微視的モデルからも理解できる。

6.2 拡散方程式の解法

6.2.1 問題設定

1 次元の拡散方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (6.9)$$

を解くことを考える。ここで、 κ は正の定数、考察する領域は、 $-\infty < x < \infty$ とする。^{*2} 拡散方程式 (6.9) は時間に関して 1 階、空間に関して 2 階の偏微分方程式であるので、これを解いて解を決定するにはある時刻における C に関する条件 (通常は初期条件) が 1 個、空間のある点における C に関する条件 (通常は境界条件) が 2 個必要である。初期条件は

$$C(x, 0) = C_0(x) \quad (6.10)$$

^{*2} 有限の領域で拡散方程式を解くことは演習で取り扱う。

ここで $C_0(x)$ は既知関数, と設定する. なお, 境界条件は, $x \rightarrow \pm\infty$ において全ての物理量が速やかにゼロになる, と設定する.*3

6.2.2 保存則

前節で述べた保存則をここで証明しておく. 拡散方程式の両辺を x について, $-\infty \sim \infty$ の区間で積分する:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial C}{\partial t} dx &= \kappa \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} dx \\ &= \kappa \left[\frac{\partial C}{\partial x} \right]_{-\infty}^{\infty}. \end{aligned}$$

ここで境界条件 ($x \rightarrow \pm\infty$ において全ての物理量が速やかにゼロになる) を用いると, 先に述べた保存則,

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} C dx = 0$$

が得られる. (ここで時間の偏微分と空間積分は独立なので, 演算の順番を置き換えてもいいことを用いている. また, $\int_{-\infty}^{\infty} C dx$ は x には依存せず, t のみの関数なので, 時間に関する微分は偏微分ではなく常微分に置き換わっている.)

6.2.3 Fourier 変換を用いた拡散方程式の解法

偏微分方程式を解く方法で代表的なものは, 変数分離法である. 変数分離法を用いても現在の問題を解くことはできるが, ここでは Fourier 変換を利用して解く方法を紹介する.

考察する領域は, $-\infty < x < \infty$ であることから, 物理量 $C(x, t)$ は Fourier 変換を用いて,

$$C(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{C}(k, t) e^{ikx} dk, \quad (6.11)$$

と表現できる. ここで (6.11) は, 物理量の空間依存性に対しては波 e^{ikx} によって分解し, 波数 k , もしくは波長 $2\pi/k$ を持った波の振幅 $\hat{C}(k, t)$ が時間と共に変動していくことを表している.

(6.11) を (6.9) に代入して整理する:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d\hat{C}}{dt} + \kappa k^2 \hat{C} \right\} e^{ikx} dk = 0.$$

*3 物理学の問題では境界が $\pm\infty$ にある場合には, 境界に近づくにつれて物理量はすみやかに 0 になるものとして問題を解くことが極めて多い.

任意の x について上式が成り立つためには、被積分関数が 0 でなければならない。そこで、

$$\frac{d\hat{C}}{dt} + \kappa k^2 \hat{C} = 0, \quad (6.12)$$

を得る。すなわち、拡散方程式を満足する C の Fourier 変換 \hat{C} は (6.12) を満足する。この式はさまざまな k の値に対して成り立つ。 k は実数なのでしたがって (6.12) は非加算無限個の方程式系を表していることになる。つまり、偏微分方程式 (6.9) は Fourier 変換を用いると無限個の常微分方程式系に書き直すことができる。なお、各 $\hat{C}(k)$ の方程式の間には関係はなく、互いに独立で連立方程式系にはなっていない。これは拡散方程式が線型の微分方程式であるからで、もし非線形の微分方程式であれば、様々な \hat{C} が相互作用する無限連立常微分方程式系となる。^{*4}

(6.12) の解は、

$$\hat{C}(k, t) = A(k)e^{-\kappa k^2 t} \quad (6.13)$$

で与えられる。ここで、時間に依存しない任意定数 A は k の値に依存して違ってよいことを考慮して、 $A(k)$ とした。(6.13) を (6.11) に代入して

$$C(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ikx - \kappa k^2 t} dk, \quad (6.14)$$

を得る。次に初期条件を考慮する:

$$C(x, 0) = C_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ikx} dk. \quad (6.15)$$

(6.15) を満足する $A(k)$ は Fourier 変換 (逆変換) の知識から、

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C_0(x)e^{-ikx} dx \quad (6.16)$$

となるのがわかる。(6.16) の両辺に e^{-ikx} をかけて x について $-\infty \sim \infty$ の区間の積分を行う。) したがって、(6.14) は

$$C(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx' C_0(x') e^{ik(x-x') - \kappa k^2 t} \quad (6.17)$$

となる。(6.17) を整理すると、

$$C(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' C_0(x') e^{-\frac{(x-x')^2}{4\kappa t}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\kappa t \left\{ k - \frac{i(x-x')}{2\kappa t} \right\}^2} \right] \quad (6.18)$$

^{*4} 流体力学の基礎方程式 (Euler 方程式もしくは Navier-Stokes 方程式) はその代表例である。

を得る.

ここで複素関数論と Gauss 積分の知識を用いると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa t} \left\{ k - \frac{i(x-x')}{2\kappa t} \right\}^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa t x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\kappa t}}. \quad (6.19)$$

そこで (6.18) は

$$C(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} C_0(x') e^{-\frac{(x-x')^2}{4\kappa t}} dx' \quad (6.20)$$

と書き換えられる. これが任意の初期条件 $C_0(x)$ に対する拡散方程式の解である.

6.2.4 基本解

初期条件として場 $C_0(x)$ が δ 関数で与えられる場合を考える:

$$C_0(x) = \delta(x). \quad (6.21)$$

このような初期条件に対する拡散方程式の解は基本解と呼ばれる. ここでは, 基本解を $C_b(x, t)$ で表すことにする.

δ 関数の性質

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' \delta(x') f(x-x') = f(x) \quad (6.22)$$

を用いると, (6.20) は次のようになる.

$$C_b(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} \quad (6.23)$$

この解は, 初期に $x=0$ に局在していた C の分布が時間と共に広がって行き, $t \rightarrow \infty$ ではいたるところで 0 になることを示している. ($C_b(x)$ の発展を図 6.2 に示す.) ただし, 先に注意したように初期に存在していた C の総量は変化しない. このことは (6.23) を x について $-\infty \sim \infty$ で積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(x, t) dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \times \sqrt{4\pi\kappa t} = 1, \quad (6.24)$$

ここで, Gauss 積分 (6.19) を再び用いている. すなわち, 時刻に関係なく $C(x, t)$ の総量は 1 である. また, 初期時刻においても

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (6.25)$$

であり, 無矛盾である.

δ 関数を用いると拡散方程式の任意の初期条件 (6.10) は

$$C_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C_0(x') \delta(x' - x) dx' \quad (6.26)$$

で与えられ, 一方, それに対する解は, 基本解 C_b を用いて

$$C(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_0(x') C_b(x - x', t) dx' \quad (6.27)$$

と表すことが出来る. 即ち, 任意の初期条件に対する拡散方程式の解は, 基本解と C の初期分布の畳み込み積分として表現できるのである.*5

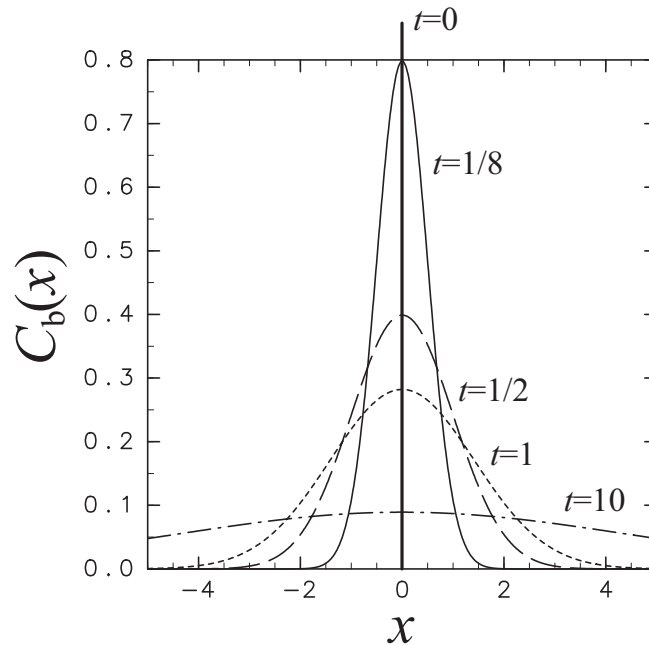


図 6.2 基本解 $C_b(x)$ の発展. 太実線 ($t = 0$), 細実線 ($t = 1/8$), 破線 ($t = 1/2$), 点線 ($t = 1$), 一点鎖線 ($t = 10$). κ の値は 1 とした.

6.3 Gauss 積分

Gauss 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \alpha > 0 \quad (6.29)$$

*5 関数 f と g の畳み込み積分とは

$$f * g \equiv \int f(x') g(x - x') dx' \quad (6.28)$$

の形の積分のことをいう.

の公式の証明を紹介する. この積分や, これに関連する積分は極めて多くの分野で登場する. 例えば, 正規分布に従う確率過程では確率密度関数は

$$p(x) = Ae^{-\alpha x^2} \quad (6.30)$$

の形で表される. A の値は事象の全確率が 1 であるという条件 $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$ から決まる. これはまさに Gauss 積分である. また, このような分布に従う確率変数の n 次のモーメント $M_n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} p(x) dx$ の計算にも Gauss 積分が利用される. なお, 2 次のモーメント $\sigma = M_2$ を使って α を表現することができる.

(6.29) の証明:

$$I_0(\alpha) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx, \quad (6.31)$$

と定義する.

$$\begin{aligned} I_0(\alpha)^2 &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \right\} \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\alpha(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

極座標 (r, θ) を用いて積分変数を変換する.

$$\begin{aligned} I_0(\alpha)^2 &= \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-\alpha r^2} \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r dr e^{-\alpha r^2} \end{aligned}$$

さらに $r^2 \rightarrow \xi$ と変数変換すると,

$$I_0(\alpha)^2 = \pi \int_0^{\infty} d\xi e^{-\alpha \xi} = \frac{\pi}{\alpha}.$$

したがって, $I_0(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

Gauss 積分を利用して, 次のような積分を実行することができる.

$$I_n(\alpha) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx. \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial I_0(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} -x^2 e^{-\alpha x^2} dx$$

なので,

$$I_1(\alpha) = -\frac{\partial I_0(\alpha)}{\partial \alpha}. \quad (6.33)$$

以下, 系統的に

$$I_n(\alpha) = -\frac{\partial I_{n-1}(\alpha)}{\partial \alpha}. \quad (6.34)$$

6.4 複素関数の積分

Gauss 積分に似た積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x+i\beta)^2} dx, \quad \alpha > 0 \quad (6.35)$$

は, 複素関数の知識を用いて実行することができる. ここで β は実数であるとする. 複素変数 $z \equiv x + i\beta$ を導入すると (6.35) は

$$\int_{-\infty+i\beta}^{\infty+i\beta} e^{-\alpha z^2} dz \quad (6.36)$$

と書ける. なお, 複素関数論によれば, 正則な関数 $f(z)$ を複素平面内で周回積分するとゼロになることが知られている. そこで $(-L, 0) \rightarrow (L, 0) \rightarrow (L, i\beta) \rightarrow (-L, i\beta) \rightarrow (-L, 0)$ という矩形領域 C (図 6.3 を参照) で周回積分を行うと, この領域内で (6.36) の被積分関数は正則であるから

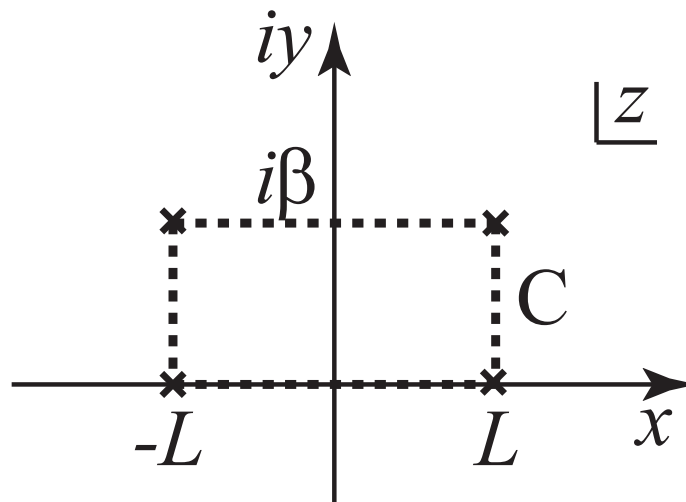


図 6.3 積分経路

$$\oint_C e^{-\alpha z^2} dz = \int_{-L}^L e^{-\alpha x^2} dx + i \int_0^\beta e^{-\alpha(L+iy)^2} dy + \int_{L+i\beta}^{-L+i\beta} e^{-\alpha z^2} dz + i \int_\beta^0 e^{-\alpha(-L+iy)^2} dy = 0. \quad (6.37)$$

(6.37) の左辺第2項および左辺第4項の被積分関数は $e^{-\alpha L^2}$ に比例するので $L \rightarrow \infty$ でこれらの項はゼロに収束する。そこで、左辺第1項および左辺第3項のみが残る。これを整理すると

$$\int_{-\infty+i\beta}^{\infty+i\beta} e^{-\alpha z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \quad (6.38)$$

が得られる。前節と本節の結果より (6.19) が証明された。

6.5 (6.19) の別解

前節では、複素積分の知識を用いて (6.19) の左辺と中辺の関係を導いた。しかしながら、複素積分の知識を使わなくても Euler の関係式と Gauss 積分の知識で、(6.19) を導けることを 2015 年度の演習の授業中に学生から教わった。この節ではその解法を示す。

まず、次の積分を定義する：

$$I(\alpha, \beta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\beta x) e^{-\alpha x^2} dx. \quad (6.39)$$

ここで、 $\alpha > 0$, β は実数である。Euler の関係式より、(6.39) は

$$\begin{aligned} I(\alpha, \beta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 + i\beta x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \{x - i\beta/(2\alpha)\}^2 - \beta^2/(4\alpha)} dx \\ &= e^{-\beta^2/(4\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \{x - i\beta/(2\alpha)\}^2} dx. \end{aligned} \quad (6.40)$$

一方、(6.39) を β で微分して部分積分を行うと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial \beta} &= \int_{-\infty}^{\infty} -x \sin(\beta x) e^{-\alpha x^2} dx, \\ &= \left[\frac{1}{2\alpha} \sin(\beta x) e^{-\alpha x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{\beta}{2\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\beta x) e^{-\alpha x^2} dx \\ &= -\frac{\beta}{2\alpha} I(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (6.41)$$

(6.41) は 1 階の微分方程式なので, その解は

$$I(\alpha, \beta) = I(\alpha, 0)e^{-\beta^2/(4\alpha)}. \quad (6.42)$$

ここで, $I(\alpha, 0)$ は Gauss 積分なので, したがって

$$I(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\beta^2/(4\alpha)}. \quad (6.43)$$

(6.40) および, (6.43) より

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\{x-i\beta/(2\alpha)\}^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (6.44)$$

が得られる.

6.6 演習問題

6.6.1 拡散方程式の問題

i) 1 次元拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\kappa > 0) \quad (6.45)$$

を, 境界条件

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0 \quad (6.46)$$

と初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (6.47)$$

のもとで解くことを考える. 以下の設問に答えなさい.

a) (6.45) を変数分離法を用いて解くために

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (6.48)$$

とおく. このとき, $X(x)$, $T(t)$ がそれぞれ満たす方程式を求めなさい.

b) 前設問で導かれた方程式の一般解を求めなさい. (注意: 変数分離を行った後の分離定数についての議論も詳しく行いなさい. 変数分離定数のある符号にとると, 解が $t \rightarrow \infty$ で発散する. このような発散を伴うような解は物理学の問題では通常は扱わない. 特に断りがなくとも物理学で扱う問題は有界の解を求めることを要求している.)

- c) 境界条件 (6.46) を $X(x)$ に関する条件に書き換えなさい。
 d) 7.21) で導かれた条件を満足する $X(x)$ を求めなさい。
 e) 重ね合わせの原理により $u(x, t)$ を求めなさい。
 f) 初期条件を満足する $u(x, t)$ を求めなさい。
 ii) 長さ L の棒の両端は常に温度 0 に保たれている。すなわち、 $u(0, t) = u(L, t) = 0$ 。
 初期の温度分布が以下のように与えられるとき、熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\kappa > 0) \quad (6.49)$$

の解を求めなさい。

ヒント: 任意の初期条件 $u(x, 0) = f(x)$ に対して、この解は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\kappa \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

$$D_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

である。^{*6}

- a) a, b, c を定数として

$$u(x, 0) = a \sin \frac{4\pi x}{L} + b \sin \frac{8\pi x}{L} + c \sin \frac{12\pi x}{L}. \quad (6.50)$$

- b)

$$u(x, 0) = ax(L - x). \quad (6.51)$$

- iii) 無限に長い棒において、熱の初期分布 $u(x, 0)$ が次のように与えられているとする。このとき、 $t > 0$ での熱の伝わり方を調べなさい。ここで、 a, b は定数とする。(注: テキストで求めた解を利用してよい.)
 a) $u(x, 0) = a$
 b) $u(x, 0) = a\delta(x)$
 c) $u(x, 0) = a \cos bx$ (次の Gauss 積分の i)-d) の問題を先に解く.)

6.6.2 Gauss 積分の問題

- i) $I_n(\alpha) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx$. ここで α は正の実数, $n \geq 0$ となる整数, とする.

^{*6} 本当はこの解を、i) と全く同様の方法を用いて自分できちんと導出して欲しいのだけれど。そうすると、変数分離法による偏微分方程式の解法がよく理解できるようになる。

- a) $I_0(\alpha)$ を求めなさい.
- b) $I_{n+1}(\alpha) = -\frac{\partial I_n(\alpha)}{\partial \alpha}$ を証明しなさい.
- c) $I_1(\alpha)$ を求めなさい.
- d) $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\beta x) e^{-\alpha x^2} dx$ を求めなさい. ただし, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x+i\gamma)^2} dx = I_0(\alpha)$ を用いてよい. ここで, γ は実数である. (ヒント: Euler の関係式を用いる.)

6.6.3 Gamma 関数の問題

Gamma 関数 $\Gamma(x)$ とは

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (6.52)$$

で定義される関数である. ここで, $n > 0$ である.

- i) $\Gamma(1)$ を求めなさい.
- ii) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ を証明しなさい.
- iii) n を自然数とするとき, $\Gamma(n+1) = n!$ を証明しなさい.
- iv) $\Gamma(\frac{1}{2})$ を求めなさい. (ヒント: Gauss 積分を利用する.)

第 7 章

波動方程式

偏微分方程式の代表例として、拡散方程式の他に波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \quad (7.1)$$

がある。真空中の Maxwell 方程式、たわみなく張られた弦の微小振幅振動、浅い水の自由表面変位変動、圧縮性流体の断熱運動など、波動方程式として書かれる現象は非常にたくさんある。ここでは、有限の領域内での波動方程式の解法について紹介する。前章では無限領域での拡散方程式の解法を示したが、有限領域での拡散方程式も、ここで紹介する方法で解くことができる。逆に無限領域内での波動方程式は、前章で紹介した方法で解くことができる。

本章で必要な知識は、方程式の線形性、定数係数の線形常微分方程式の解法、解の重ね合わせ、Fourier 級数である。即ち、本講義で扱った知識のほとんどが必要となる。

本章では簡単化のため空間 1 次元の波動方程式、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (7.2)$$

を考える。ここで、 c は時間、空間に依存しない実数で、正值でも負値でも構わないがこの章では $c > 0$ としておく。

7.1 d'Alembert 解

波動方程式 (7.2) を解く前にまず、波動方程式を満たす解の一般的性質について議論する。(7.2) は、2 つの独立変数 x, t を含むが、次のような新しい 2 つの独立変数 ξ, η を導入してみよう：

$$\xi \equiv x + ct, \quad (7.3)$$

$$\eta \equiv x - ct. \quad (7.4)$$

波動方程式の独立変数を x, t から ξ, η に変換する. t 及び x に関する偏微分は

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} = c \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (7.6)$$

となる. これらを波動方程式に代入すると, (7.2) は

$$4c^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} u = 0 \quad (7.7)$$

となる. この方程式を ξ について積分すると,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} u = G(\eta) \quad (7.8)$$

となり, さらに η について積分すると,

$$u = f(\xi) + \int^{\eta} G(\eta') d\eta' = f(\xi) + g(\eta). \quad (7.9)$$

ここで, f, G はそれぞれ ξ, η の任意関数である. また $g(\eta) \equiv \int^{\eta} G(\eta') d\eta'$ も η の任意関数である.

(7.9) の最後の表現が波動方程式 (7.2) の一般解で, **d'Alembert 解** と呼ばれている. 常微分方程式では一般解は任意定数を含んだが, 偏微分方程式の場合には一般解は任意関数の形で与えられる. 初期条件と境界条件を考慮することにより, 任意関数の形が決まる.

$f(\xi)$ の意味は, 次のとおりである. ξ が時刻 t_0 にある値 (例えば ξ_0) をとる場所 x_0 が時間と共にどのように移動するかを眺めてみる. $\Delta t (> 0)$ ののちに $\xi = \xi_0$ となる場所を x_1 とすると, それは $\xi_0 = x_1 + c(t_0 + \Delta t) = x_0 + ct_0$. したがって,

$$x_1 - x_0 = -c \Delta t (< 0) \quad (7.10)$$

つまり, x_1 は x_0 よりも x の小さな方向に移動していることになる. つまり, x の正の方向を右にとると, ξ が ξ_0 となる点は時間が経つにつれて左に移動することになる. その速さは, Δt の間に $|x_1 - x_0|$ だけ移動するので, $|x_1 - x_0|/\Delta t = c$. つまり, 速さは c である. 従って, $f(\xi)$ は x の負の方向に速さ c で進行していく解を表現している. 同様な考察により $\eta = \eta_0$ の点は時間と共に x の正の方向に速さ c で進行していく. そこで, $g(\eta)$ は x の正の方向に速さ c で進行していく解を表現している. このように (7.2) は x の正の方向に速さ c で進行していく解と, x の負の方向に速さ c で進行していく解の重ね合わせになっている. なお, ξ, η は位相と呼ばれ, c は位相が進行していく速さなので位相速度と呼ばれる.*¹

*¹ 波の塊 (波束) の重心が進行していく速さとしての, 群速度と呼ばれる速度も波動の問題には登場する.

7.2 変数分離法を用いた波動方程式の解法の例

$0 \leq x \leq L$ の領域内で, 1次元波動方程式,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (c > 0), \quad (7.11)$$

を, 境界条件,

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad (7.12)$$

と初期条件,

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x), \quad (7.13)$$

のもとで解くことを考える.*2 f, g は具体的な形はここでは指定していないが, 既知の関数である. ここでは非自明な解 (u が恒等的にゼロでない解) でなおかつ $t \rightarrow \infty$ で u が発散しない解にのみ注目する. (7.11) が $0 < x < L$ の間に張られた弦の振動の方程式を記述する場合, u は弦の振幅であり, (7.12) は弦の両端が固定されている場合に相当する. また (7.13) の初期条件は, 拡散方程式の場合と異なり, 2つあることを注意しておく. 拡散方程式では時間に関して1階の微分しか含まないので, 初期条件は1つであったが, 波動方程式は時間に関して2階の微分を含むので, この方程式を解いて完全に解を決定するためには, ある時間における u の値に関する条件を2つ必要とするからである.

7.2.1 波動方程式の線形性

方程式 (7.11) は線形の微分方程式であることが確かめられる. (7.11) の独立な解を u_1, u_2 , 任意定数を c_1, c_2 とする. このとき, $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ が (7.11) の解であることが確かめられるので, (7.11) は線形の微分方程式である.

7.2.2 波動方程式の解法

ステップ1: (7.11) を変数分離法を用いて解く. (7.11) の解を

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (7.14)$$

*2 この問題のように境界において関数がある与えられた値を持つという条件の問題は, Dirichlet 問題と呼ばれ, いっぽう関数の微分の値が境界において指定された問題は, Neuman 問題と呼ばれる.

と表現し, $T(t)$, $X(x)$ がそれぞれ満たす微分方程式を求め^{*3} (7.14) を (7.11) に代入し, 両辺を $c^2XT(\neq 0)$ で割る^{*4}と

$$\frac{1}{c^2T} \frac{d^2T}{dt^2} = \frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} \quad (7.15)$$

を得る. 上式の左辺は t のみの関数, 右辺は x のみの関数なので等式が成立するには, 両辺が x にも t にも依存しない定数である必要がある. そこで, その定数(変数分離定数と呼ばれる)を λ と置く. したがって, T, X の満たす微分方程式はそれぞれ

$$\frac{d^2T}{dt^2} = c^2\lambda T, \quad (7.16)$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \lambda X, \quad (7.17)$$

である. このように, (7.14) のように解を仮定することにより, 偏微分方程式 (7.11) は常微分方程式に変換された. この段階では, 変数分離定数 λ の符号は決定できない. 後続く議論が必要であることを注意してほしい.

ステップ2: 上で導かれた T に関する微分方程式 (7.16) の一般解を推定法で求める. $T = e^{\alpha t}$ と解を推定し, これを (7.16) に代入し, 整理すると特性方程式 $\alpha^2 = c^2\lambda$ が得られる. T の従う微分方程式は線形の微分方程式なので, \hat{T}_1, \hat{T}_2 を任意定数として, 一般解は $T = \hat{T}_1 e^{c\sqrt{\lambda}t} + \hat{T}_2 e^{-c\sqrt{\lambda}t}$ である. ここで, $\lambda > 0$ ならば, $t \rightarrow \infty$ のとき T は発散し, したがって u も発散する. 設問にあるようにこのような発散解には興味がなく, 有限に留まる解を調べる. そこで $t \rightarrow \infty$ で T が有限値に留まるために, 変数分離定数を $\lambda = -k^2 (\leq 0)$ とする. 変数分離定数をこのようにおくと, 一般解は $k \neq 0$ のとき

$$T(t) = \hat{T}_1 e^{ickt} + \hat{T}_2 e^{-ickt} \quad (7.18)$$

と表現できる. なお, あとの便利のために (7.18) を Euler の関係式を用いて

$$T(t) = T_1 \cos ckt + T_2 \sin ckt \quad (7.19)$$

と書き直しておく. ここで, T_1, T_2 も任意定数で, $T_1 = \hat{T}_1 + \hat{T}_2$, $T_2 = i(\hat{T}_1 - \hat{T}_2)$ である. 一方, $k = 0$ のとき, $T(t) = T_3 t + T_4$ である. T_3, T_4 は任意定数である.

ステップ3: 上で導かれた X に関する微分方程式の一般解を求める. X に関する微分方程式 (7.17) の解として, $X = e^{\beta x}$ と推定する. この解を (7.17) に代入し整理す

^{*3} 変数分離法の名前の由来は, (7.14) のように方程式の解が x だけの関数と t だけの関数に分離できる, としているからである.

^{*4} $XT = 0$ は自明な解である.

ると、特性方程式 $\beta^2 = \lambda = -k^2$ を得る。この解は $\beta = \pm ik$ である。 X の従う微分方程式は線形なので、重ね合わせの原理より一般解は

$$X(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}, \quad (k \neq 0) \quad (7.20)$$

と表現できる。ここで、 C_1, C_2 は任意定数である。一方、 $k = 0$ のとき、 $X(x) = C_3 x + C_4$ である。 C_3, C_4 も任意定数である。

ステップ4： 次に境界条件を考慮する。先ず、境界条件 (7.12) は $u(x, t)$ に関する条件になっている。これを $X(x)$ に関する条件に書き換える。 $x = 0$ における境界条件を $u(x, t) = X(x)T(t)$ に代入すると、 $X(0)T(t) = 0$ となる。もし、 $T(t) = 0$ であれば、 $u(x, t) = 0$ となり自明な解になってしまうので、 $T(t) \neq 0$ であり、したがって、 $X(0) = 0$ が得られる。 $x = L$ についても同様の議論を行い、 $X(L) = 0$ を得る。まとめると、

$$X(0) = X(L) = 0. \quad (7.21)$$

ステップ5： (7.21) で導かれた条件を満足する $X(x)$ を求める。 $x = 0$ を一般解 (7.20) に代入し、境界条件を考慮すると、 $C_1 + C_2 = 0$ を得る。これより、 $C_2 = -C_1$ である。さらに $x = L$ を一般解 (7.20) に代入し、境界条件を考慮すると、 $C_1 e^{ikL} - C_1 e^{-ikL} = 2iC_1 \sin kL = 0$ を得る。 $C_1 = 0$ は自明な解なので、 $C_1 \neq 0$ とすると、上の式が成り立つためには $kL = n\pi$ 、ここで n は $k \neq 0$ であることから、 n をのぞく整数でなければいけない。なお、 $k = 0$ の時には、 $X(0) = 0$ から $C_4 = 0$ 、 $X(L) = 0$ から $C_3 = 0$ 、つまり $X = 0$ となり自明な解になってしまう。したがって、題意より変数分離定数が0の場合は以降は考えなくてよい。 $2iC_1$ を改めて C とおくと、境界条件を満足する X は

$$X(x) = C \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (n \text{ は } 0 \text{ を除く整数}) \quad (7.22)$$

となる。

ステップ6： 重ね合わせの原理により $u(x, t)$ を求める。上で求めた、 T, X から、解 u は

$$u(x, t) = X(x)T(t) = \left\{ T_1 C \cos \left(c \frac{n\pi}{L} t \right) + T_2 C \sin \left(c \frac{n\pi}{L} t \right) \right\} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad (7.23)$$

となる。ここで、(7.23) はある整数 n に対して与えられた境界条件を満足する (7.11) の解である。異なる n に対しても (7.23) は (7.11) の解であり、それらは互いに独立である。(7.11) は線形の微分方程式なので、独立な解が得られたらそれら

を重ね合わせたものも、もとの微分方程式の解である。そこで、重ね合わせの原理から

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=-\infty, (n \neq 0)}^{\infty} \left\{ \hat{D}_n \cos \omega_n t + \hat{E}_n \sin \omega_n t \right\} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ D_n \cos \omega_n t + E_n \sin \omega_n t \} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \end{aligned} \quad (7.24)$$

が境界条件を満足する (7.11) の一般解である。ここで、 $T_1 C$ を \hat{D} 、 $T_2 C$ を \hat{E} と表現し、さらにその値は n の値によって異なってもよいので、そのことを明示するために \hat{D}_n 、 \hat{E}_n とした。また、 $D_n = \hat{D}_n - \hat{D}_{-n}$ 、 $E_n = \hat{E}_n + \hat{E}_{-n}$ と表現している。さらに、

$$\omega_n = \frac{cn\pi}{L} \quad (7.25)$$

と表現した。

ステップ7：最後に初期条件を満足する $u(x, t)$ を求める。前設問で得られた解に初期条件を考慮する。即ち

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) = f(x). \quad (7.26)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n E_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) = g(x). \quad (7.27)$$

(7.26)、(7.27) の式の真ん中と最後の表現に $\sin(m\pi x/L)$ をかけて x について 0 から L まで積分する。ここで、 m は正の整数である。Fourier 係数の公式を導出する際に用いた方法と同じ事を行う。安直に Fourier 係数の公式に頼ってはダメである。なぜなら、Fourier 級数は周期境界条件が課されているが、ここでの境界条件はそのようになっていないからである。このとき $\int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{L}{2} \delta_{mn}$ なので、

$$D_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (7.28)$$

$$E_n = \frac{2}{L\omega_n} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (7.29)$$

を得る。この表現を、(7.24) に代入して、最終的に与えられた初期条件、境界条件

を満足する (7.11) の解

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ \frac{2}{L} \int_0^L f(x') \sin \frac{n\pi x'}{L} dx' \right\} \cos \omega_n t + \left\{ \frac{2}{L\omega_n} \int_0^L g(x') \sin \frac{n\pi x'}{L} dx' \right\} \sin \omega_n t \right] \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (7.30)$$

を得る. 初期条件の関数形 f, g が具体的に与えられれば, (7.30) に含まれる積分が実行できる.

7.2.3 d'Alembert 解との関係

前小節で導出した解と d'Alembert 解との関係を見てみる.

$$\begin{aligned} \cos \omega_n t \sin \frac{n\pi}{L} x &= \cos \frac{cn\pi}{L} t \sin \frac{n\pi}{L} x = \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{n\pi}{L} (x + ct) + \sin \frac{n\pi}{L} (x - ct) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{n\pi}{L} \xi + \sin \frac{n\pi}{L} \eta \right\}, \end{aligned} \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned} \sin \omega_n t \sin \frac{n\pi}{L} x &= \sin \frac{cn\pi}{L} t \sin \frac{n\pi}{L} x = \frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{n\pi}{L} (x - ct) - \cos \frac{n\pi}{L} (x + ct) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{n\pi}{L} \eta - \cos \frac{n\pi}{L} \xi \right\}, \end{aligned} \quad (7.32)$$

である. そこで (7.30) は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ \frac{1}{L} \int_0^L f(x') \sin \frac{n\pi x'}{L} dx' \right\} \left\{ \sin \frac{n\pi}{L} \xi + \sin \frac{n\pi}{L} \eta \right\} + \left\{ \frac{1}{L\omega_n} \int_0^L g(x') \sin \frac{n\pi x'}{L} dx' \right\} \left\{ \cos \frac{n\pi}{L} \eta - \cos \frac{n\pi}{L} \xi \right\} \right] \quad (7.33)$$

と書き直せる. つまり, d'Alembert 解が示すように, (7.30) は ξ と η の関数の和になっている.

7.3 コメント

波動方程式を変数分離法で解くためには, 7.2 節で見たように本講義で今まで扱ったほとんどすべての知識が必要となる. 今までの講義の復習の意味も兼ねて, 境界条件が (7.12) ではなく,

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0, \quad (7.34)$$

の場合にも変数分離法により波動方程式を解いてみよう。さらには、前章で扱った拡散方程式も同様の方法で解ける。2つの異なる境界条件 ($C(0, t) = C(L, t) = 0$, $\frac{\partial C(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial C(L, t)}{\partial x} = 0$) のもとで変数分離法を用いて1次元拡散方程式 $\frac{\partial C}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ を解いてみよう。解法を眺めているだけでなく、実際に手を動かして、丁寧に解いて見ることによって理解が深まります。

7.4 演習問題

7.4.1 波動方程式の問題

$0 \leq x \leq L$ の領域内で、1次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (c > 0) \quad (7.35)$$

を、境界条件

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0 \quad (7.36)$$

と初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x) \quad (7.37)$$

のもとで解きなさい。ここでは非自明な解 (u が恒等的にゼロでない解) でなおかつ $t \rightarrow \infty$ で u が発散しない解にのみ注目する。

- 演習の時間には、問題を小分けにして、何名かで模範解答を示してください。

7.4.2 線形移流方程式の問題

流体力学では、Lagrange 微分と呼ばれる時間微分が定義できる。3次元空間内のある場の量 $A(\mathbf{r}, t)$ に対して、 A の Lagrange 微分は

$$\begin{aligned} \frac{DA}{Dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla A \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} + v \frac{\partial A}{\partial y} + w \frac{\partial A}{\partial z} \end{aligned} \quad (7.38)$$

と書ける。ここで、 u, v, w は流速 \mathbf{v} の x, y, z 成分である。(7.38) の第一の表現の右辺第2項もしくは、第二の表現の第2~4項は移流項と呼ばれる。物理量 A はスカラー量でもベクトル量でもよく、もし A が速度 \mathbf{v} 自身である場合や、 A が \mathbf{v} に依存する場合には、

移流項は速度に関する 2 次以上の項となり非線型項になる。次のような方程式は移流方程式と呼ばれている*5

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla A = 0. \quad (7.40)$$

i) 空間 1 次元で, A は速度とは無関係な線形移流方程式

$$\frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (7.41)$$

を考える。波動方程式の d'Alembert 解を導出したのと同様な手法により, この方程式の解 A の性質について議論しなさい。

*5 移流と拡散を含む方程式

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla A = \nu \nabla^2 A. \quad (7.39)$$

は移流拡散方程式と呼ばれている。

第 8 章

Laplace-Poisson 方程式とそれに関連する話題

8.1 はじめに

拡散方程式や波動方程式は場が定常 ($\partial/\partial t = 0$) である時には,

$$\nabla^2 V = 0, \quad (8.1)$$

の形の方程式に帰着することができる. (8.1) の方程式は, Laplace 方程式と呼ばれ, 場がこの方程式を満たす物理現象, 地球惑星科学現象は数多くある. 例えば, 静電場 \mathbf{E} に対して Maxwell の方程式の一つ, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, から $\mathbf{E} = -\nabla V$ を満たす静電ポテンシャル V が導入でき, 電荷がない空間ではさらに Maxwell の方程式の一つ, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, から V は (8.1) を満たす. さらに, 非圧縮性流体の渦なし流^{*1}でも, 速度場 \mathbf{v} と $\mathbf{v} = \nabla V$ の関係にある速度ポテンシャル V を導入でき, 速度ポテンシャルは (8.1) を満たす.

一方, (8.1) の右辺がゼロでなく, ある与えられた関数である場合, 即ち,

$$\nabla^2 V = f(\mathbf{r}), \quad (8.2)$$

の式も, 数多くの物理現象, 地球惑星科学現象を記述する方程式として有名である. (8.2) は Poisson 方程式と呼ばれる. 電荷の存在する空間中での静電ポテンシャル, 2次元非圧縮性流体の渦あり流の流れ関数は (8.2) を満足する.*2 この場合, 電荷分布や渦度が (8.2) の右辺の $f(\mathbf{r})$ に相当する.

^{*1} 非圧縮性流体とは, 運動中で体積 (もしくは密度) が変化しない流体である. 質量の保存則を具体的に数式で書き表した連続の式は非圧縮流体の時には, $D\rho/Dt = 0$ を満たし, 速度場は非発散 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ となる. また渦度 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ がゼロである流れは渦なし流, $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ となる流れを渦ありの流れと呼ばれる. 渦なしの流れから速度ポテンシャル $\mathbf{v} = \nabla\phi$ を導入でき, さらに非圧縮条件にこの式を代入することにより速度ポテンシャルは Laplace 方程式を満たす.

^{*2} 2次元非圧縮性流体では, 速度の x, y 成分を u, v とすると, 連続の式 $\partial_x u + \partial_y v = 0$ を満たすので, 速

微分方程式の斉次型, 非斉次型という観点で眺めれば, (8.1) と (8.2) は同じ方程式で, 前者が斉次方程式, 後者が非斉次方程式とみなせる. このような観点から (8.1) と (8.2) は総称して, Laplace-Poisson 方程式ともしばしば呼ばれる.

Laplace-Poisson 方程式は, 波動方程式や拡散方程式のように変数分離法を用いてそれらと同様に解くことができる. そこで, ここでは Laplace-Poisson 方程式の解法については改めて繰り返さない. 本節では, Laplace-Poisson 方程式を具体的な問題に対して解くのではなく, それに関連した話題として, 特殊関数と Green 関数を紹介する. 特殊関数は, 曲線座標系における Laplace 方程式を満たす関数として導入でき, その曲線座標系における直交関数系^{*3}を与える, という意味でも重要な概念である. 以下ではまず曲線座標系における Laplacian を導出し, Laplace 方程式に変数分離法を適用することにより特殊関数が導入できることをみる.

8.2 曲線座標系での Laplacian

ここでは幾つかの代表的な曲線座標系における Laplacian ∇^2 を導出する. 曲線座標系の Laplacian はデカルト座標系の Laplacian から座標変換を利用して導出すればよいのであるが, 計算が複雑である. ここでは幾何学を利用した直観的な方法による曲線座標系における Laplacian の導出を紹介する.

8.2.1 3次元極座標における Laplacian の直感的導出

3次元極座標は, 図 8.1 で示されている様に定義される. r, θ, φ 方向の単位ベクトルをそれぞれ e_r, e_θ, e_φ とする. 勾配演算子は, ある方向の単位ベクトルとその方向へ微小距離隔たった場所と元の場所におけるスカラー関数の差から構成されている. 各方向への微小距離は, 図 8.1 からわかるように, それぞれ, $\delta r, r\delta\theta, r\sin\theta\delta\varphi$ であるので, したがって勾配演算子 ∇ は

$$\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + e_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (8.3)$$

と表される. あるスカラー関数 $V(r, \theta, \varphi)$ に (8.3) を作用させれば, 3次元極座標系におけるスカラー関数の勾配の表現が得られる:

$$\nabla V = e_r \frac{\partial V}{\partial r} + e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + e_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}. \quad (8.4)$$

度と $u = -\partial_y \psi, v = \partial_x \psi$ を満たす流れ関数 ψ が導入できる. 渦度は $\omega = \partial_x v - \partial_y u$ なので, 渦度と流れ関数との関係は $\partial_x^2 \psi + \partial_y^2 \psi = \omega$ となる.

*3 5章を参照.

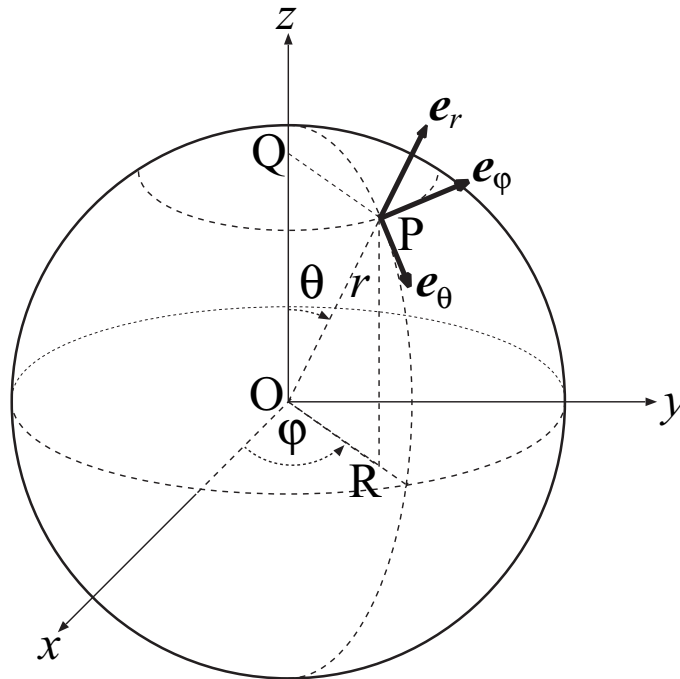


図 8.1 極座標系の定義.

次に, 3次元極座標における発散の表式を求める. あるベクトル \mathbf{A} の3次元極座標系の表現を

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_r A_r + \mathbf{e}_\theta A_\theta + \mathbf{e}_\varphi A_\varphi \quad (8.5)$$

と書くことにする. これに, (8.3) を作用させる. この時, 単位ベクトル $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ が場所ごとに向きが異なるので, 単位ベクトルの微分が存在することに注意する. これは, デカルト座標系では現れない曲線座標系の大きな特徴である. デカルト座標系に比べて曲線座標系の発散, Laplacian などの演算子の複雑さはこの曲線座標系の単位ベクトルが場所に依存することに因っている. 微分の chain rule を適用すると,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot (\mathbf{e}_r A_r + \mathbf{e}_\theta A_\theta + \mathbf{e}_\varphi A_\varphi) \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\ &\quad + A_r \left(\mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} \right) \\ &\quad + A_\theta \left(\mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ &\quad + A_\varphi \left(\mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \quad (8.6)$$

となる.

単位ベクトルの空間微分を図を利用して幾何学的に見積もる.

単位ベクトルの r 微分 r 方向に微小距離 δr だけずれた点における単位ベクトルは, 元の場所における単位ベクトルと方向は変わらないので, 単位ベクトルは r には依存せず, r による偏微分はゼロである:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} = 0.$$

単位ベクトルの θ 微分 図 8.2 の P 点における単位ベクトルとそこから θ 方向に $r\delta\theta$ だけずれた点における単位ベクトルを考える (図 8.1, 8.2 参照). \mathbf{e}_φ は, P 点とずれた点でその方向を変えないので, \mathbf{e}_φ の θ 微分はゼロである: $\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0$. \mathbf{e}_r の θ 微分は, 次のようになる:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} &= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{e}_r(\theta + \delta\theta, \varphi) - \mathbf{e}_r(\theta, \varphi)}{\delta\theta} \\ &= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\delta\theta \mathbf{e}_\varphi}{\delta\theta} = \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (8.7)$$

ここで, 第 1 行目の単位ベクトルの差は, 図 8.2 より, \mathbf{e}_θ 向きであり, その大きさは, 単位ベクトルの大きさ (大きさは 1) と 2 つの単位ベクトル間の角度 ($\delta\theta$) の積 (即ち, 弧の長さ) に等しいと見積もっている. 同様に, \mathbf{e}_φ の θ 微分も,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} &= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{e}_\varphi(\theta + \delta\theta) - \mathbf{e}_\varphi(\theta)}{\delta\theta} \\ &= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\delta\theta (-\mathbf{e}_r)}{\delta\theta} = -\mathbf{e}_r. \end{aligned} \quad (8.8)$$

単位ベクトルの φ 微分 図 8.3 の P 点における単位ベクトルと, そこから φ 方向に $r \sin \theta \delta\varphi$ だけずれた点における単位ベクトルを考える (図 8.1, 8.3 参照). 単位ベクトルの θ 微分と同様の方法により \mathbf{e}_r の φ 微分を見積もる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} &= \lim_{\delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\mathbf{e}_r(\theta, \varphi + \delta\varphi) - \mathbf{e}_r(\theta, \varphi)}{\delta\varphi} \\ &= \lim_{\delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \theta \delta\varphi \mathbf{e}_\varphi}{\delta\varphi} = \sin \theta \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (8.9)$$

第 1 行目から 2 行目への変形では \mathbf{e}_r の緯度円面 (PQ を含み極軸と垂直な平面) への射影が, $\sin \theta$ であることに注意する. 同様にして,

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos \theta \mathbf{e}_\varphi. \quad (8.10)$$

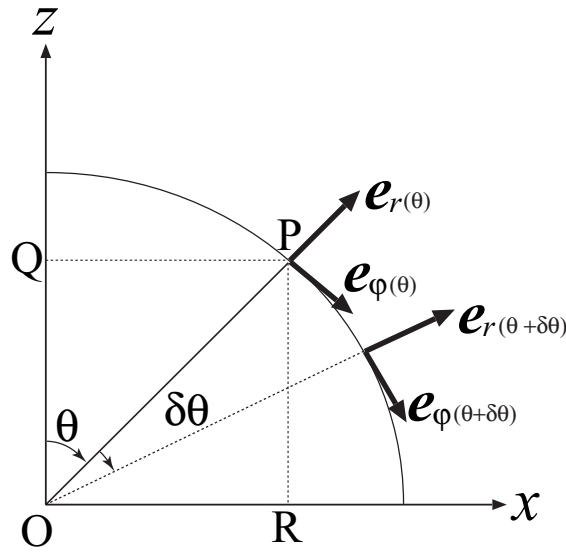


図 8.2 図 8.1 の極軸を通る (子午面) 断面. 余緯度 θ に依存して, 単位ベクトル e_r, e_φ の方向が変わることに注意. e_θ は紙面の手前から奥に向かう向きで θ に依存しない. 単位ベクトルは r には依存せず, さらに今は同じ φ における単位ベクトルを見ているので, 単位ベクトルの θ 依存性だけを明確に記している.

また, e_φ の φ 微分は,

$$\frac{\partial e_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin \theta e_r - \cos \theta e_\theta. \tag{8.11}$$

ここで, 緯度円上で P から Q へ向く単位ベクトルを図 8.2 を参考にして e_r と e_θ で表現すると, $-\sin \theta e_r - \cos \theta e_\theta$ となることを用いている.

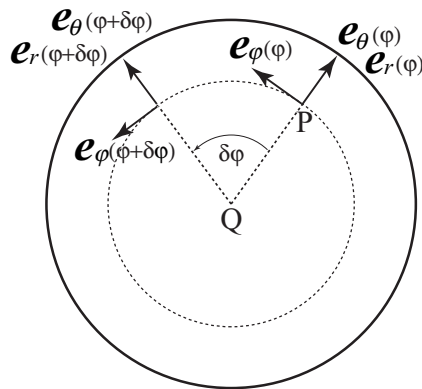


図 8.3 図 8.3 を極軸 OQ から眺めた図. 単位ベクトル e_r, e_θ の緯度円上への射影が, 共に QP 方向で, それぞれ大きさ $\sin \theta, \cos \theta$ であることに注意しなさい.

(8.7)–(8.11) を (8.6) に代入し、単位ベクトルの直交性を考慮すると最終的に、

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} A_r + \frac{\cot \theta}{r} A_\theta \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\end{aligned}\quad (8.12)$$

を得る.

スカラー関数 $V(r, \theta, \varphi)$ の Laplacian は、(8.4) と (8.12) を利用すると得られる:^{*4}

$$\begin{aligned}\nabla^2 V &= \nabla \cdot (\nabla V) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}\quad (8.14)$$

コメント 曲線座標系におけるベクトルの微分は、単位ベクトルの微分を含むため複雑である。公式を覚える必要はなく、公式集なり教科書が手元にあるときにはそれを参照すればいい。手元にそのようなものがないときには上記の考察で簡単に導くことができる。ここでは、3次元極座標の場合のやり方を紹介したが、3次元球座標系^{*5}、3次元円柱座標系、2次元極座標系でも同様の手法が使える (図 8.4 参照)。一生に一度はこの方法で上記座標系における勾配演算子、ベクトルの発散、スカラー関数の Laplacian を導出してみることを薦める。上の方法で導いた曲線座標系における勾配演算子に関する公式が正しいことを公式集や教科書と比較して確認しておいてほしい。上記のやり方の正当性が確認できる。

8.2.2 3次元球座標系、3次元円柱座標系における勾配演算子に関する公式

■3次元球座標系の場合 3次元球座標系の場合の勾配演算子、単位ベクトルの微分、ベクトルの発散、Laplacian は以下のとおりである。ここに書かれていない単位ベクトルの微

^{*4} (8.12) で

$$A_r = \frac{\partial V}{\partial r}, A_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, A_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad (8.13)$$

と見みなす。

^{*5} 3次元極座標系は極軸からの角度 (余緯度) を座標変数にしたが、3次元球座標は赤道面からの角度 (緯度) を座標変数にした座標系である。

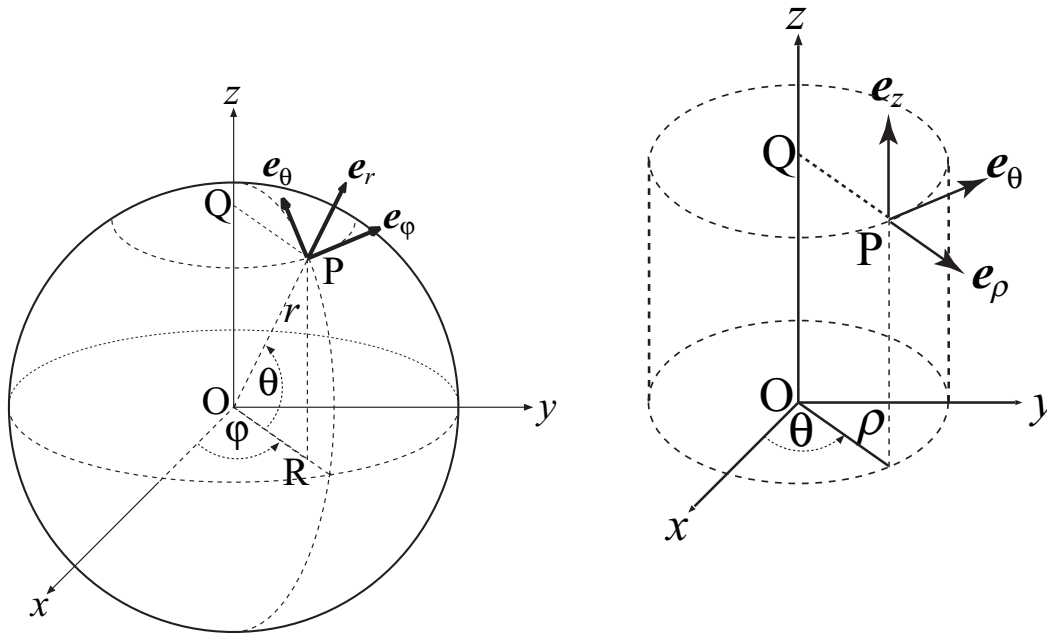


図 8.4 球座標系の定義 (左図) と円柱座標系の定義 (右図) .

分はゼロである.

$$\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + e_\varphi \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (8.15)$$

$$\frac{\partial e_r}{\partial \theta} = e_\theta, \quad \frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} = -e_r, \quad (8.16)$$

$$\frac{\partial e_r}{\partial \varphi} = \cos \theta e_\varphi, \quad \frac{\partial e_\theta}{\partial \varphi} = -\sin \theta e_\varphi, \quad \frac{\partial e_\varphi}{\partial \varphi} = -\cos \theta e_r + \sin \theta e_\theta, \quad (8.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta A_\theta) + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (8.18)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}. \quad (8.19)$$

気象学は緯度, 経度である球座標系を使用するが, 地球電磁気学では余緯度, 経度の極座標系を用いるのが慣例のようである.

■3次元円柱座標系の場合 3次元円柱座標系の場合の勾配演算子, 単位ベクトルの微分, ベクトルの発散, Laplacian は以下のとおりである. ここに書かれていない単位ベクトル

の微分はゼロである.

$$\nabla = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (8.20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_\rho, \quad (8.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (8.22)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \quad (8.23)$$

8.3 Laplace 方程式と特殊関数

Laplace 方程式を 3 次元極座標系 (r, θ, φ) で書き下し, 変数分離法で解くと, 場の θ, φ 依存性は, 球面調和関数と呼ばれる特殊関数で記述される. また, 3 次元円柱座標系では, 場の動径 (ρ) 方向依存性は, Bessel 関数と呼ばれる特殊関数で記述される. ここではこれら 2 つの座標系における Laplace 方程式を変数分離法で解く過程で現れる特殊関数について述べる.

8.3.1 3 次元極座標系

3 次元極座標系における Laplace 方程式

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (8.24)$$

を変数分離法で解く. 先ず, $V(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$ とおき, (8.24) に代入し, $r^2 V^{-1}$ をかけると,

$$\frac{1}{Y \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right), \quad (8.25)$$

を得る. 左辺は θ, φ の関数で, 右辺は r だけの関数なので両辺が等しくなるためには, 両辺は定数に等しくなければいけない. そこで, 変数分離定数を $-\alpha$ とおくと,

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = -\alpha Y, \quad (8.26)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \alpha R, \quad (8.27)$$

を得る. $R \propto r^l$ と推定すると, (8.27) より $\alpha = l(l+1)$ でなければならない. $\alpha = l(l+1)$ を (8.26) に代入し, さらにまた変数分離法を適用する: $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ を仮定し,

変数分離定数 β を導入する. このとき, (8.26) は 2 つの方程式に分離できる:

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + l(l+1) \sin^2 \theta = \beta, \quad (8.28)$$

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \beta. \quad (8.29)$$

(8.29) は, φ に関する場の 2π 周期性 ($\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$) から変数分離定数は正でなければいけない. そこで変数分離定数を m^2 , (m は整数), と表して, (8.29) の解は c_1, c_2 を任意定数として

$$\Phi(\varphi) = c_1 e^{im\varphi} + c_2 e^{-im\varphi}, \quad (8.30a)$$

もしくは,

$$\Phi(\varphi) = c_1 \cos m\varphi + c_2 \sin m\varphi, \quad (8.30b)$$

となる. (8.28) を整理すると,

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left\{ l(l+1) \sin \theta - \frac{m^2}{\sin \theta} \right\} \Theta = 0 \quad (8.31)$$

$$(8.32)$$

を得る. さらに, $x = \cos \theta$ と変数変換すると, (8.31) は

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \left\{ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right\} \Theta = 0, \quad (8.33)$$

となる. (8.33) を満たす Θ は l, m に依存するのでしばしば $P_l^m(x)$ の形で書かれる. (8.33) は Legendre の陪微分方程式といい, その解は Legendre の陪関数と呼ばれる特殊関数である.*6

上で求めた Φ と Θ を掛け合わせた解 $Y_l^m(\theta, \varphi) \equiv P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$ は (8.26) において, $\alpha = l(l+1)$ とした方程式,

$$\underbrace{\left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}}_{\nabla^2} Y_l^m = -l(l+1) Y_l^m \quad (8.34)$$

の解であり, (8.34) の左辺の演算子は半径 1 の球面上の Laplace 演算子と解釈することもできる. したがって, (8.34) は半径 1 の球面上の Laplacian に関する固有値問題で,

*6 (8.33) には第 1 種 Legendre 陪関数 P_l^m と第 2 種 Legendre 陪関数 Q_l^m がある. 関数が $0 < \theta < \pi$, もしくは $|x| < 1$ で有界であるのは, P_l^m であり, l は整数で, $l \geq m$ であることが要請される. l, m はそれぞれ次数 (degree), 位数 (order) と呼ばれる. Q_l^m は $|x| > 1$ で有界な関数である.

$l(l+1)$ が固有値と解釈できる. 異なる固有値に属する固有関数が直交する:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta Y_l^{m*} Y_{l'}^{m'} \propto \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (8.35)$$

という性質を持つので*7, 球面上の場の分布 $f(\theta, \varphi)$ は球面調和関数の重ね合わせによって表現できる:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (8.36)$$

これは, Fourier 級数展開の球面版に対応する. (5 章も参照のこと.) A_{lm} が Fourier 係数に対応する. A_{lm} はもし Y_l^m が規格化されていれば, Fourier 係数を求める時と同じ手順で,

$$A_{lm} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta f(\theta, \varphi) Y_l^{m*}(\theta, \varphi) \quad (8.37)$$

で与えられる.

8.3.2 3次元球座標系

3次元極座標系と同様に変数分離法により, この座標系における Laplace 方程式を解くと, 場の θ, φ 依存性は球面調和関数として書くことができる. $x = \sin\theta$ とおくことにより θ に依存する関数が満たす方程式は, (8.33) の形への変換ができる.

8.3.3 3次元円柱座標系

3次元円柱座標系における Laplace 方程式,

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (8.38)$$

を変数分離法で解く. 先ず, $V = R(\rho)\Theta(\theta)Z(z)$ とおき, (8.38) に代入する. θ 方向は 2π 周期であること, $z \rightarrow \pm\infty$ で場が発散しないことを要請すると,

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -n^2\Theta, \quad (8.39)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = -\alpha^2 Z, \quad (8.40)$$

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} - (\alpha^2 \rho^2 + n^2) R = 0, \quad (8.41)$$

*7 このノートの表記では球面調和関数は大きさが 1 に規格化されていない.

を得る. (8.41) は $i\alpha\rho = x$ の変換により

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - n^2)R = 0, \quad (8.42)$$

に帰着できる. (8.42) は Bessel の微分方程式と呼ばれ, その解 R は n に依存し, $J_n(x)$ と書かれる. $J_n(x)$ は Bessel 関数と呼ばれる特殊関数で,

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}, \quad (8.43)$$

で与えられる.

8.4 Green 関数

(8.2) を満たす場 V は, $f(\mathbf{r})$ という源により生成されると, Poisson 方程式 (8.2) は解積することができる. ところで任意の場の源は, 単位の源である delta 関数を用いて,

$$f(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (8.44)$$

と重ね合わせによって表現することができる. ここで Ω は今考えている問題の全領域を表す. 単位の源によって生成される場を $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ とすると, これは

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (8.45)$$

を満たす. $\nabla_{\mathbf{r}}^2$ は変数 \mathbf{r} に関する Laplacian である. このような $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ は Green 関数と呼ばれる.*⁸ Green 関数を使って任意の源に対する場を表現してみる. (8.45) の両辺に $f(\mathbf{r}')$ を掛けて, \mathbf{r}' に関して全領域にわたって積分する:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}}^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') d\mathbf{r}' &= \int_{\Omega} f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \\ \implies \nabla_{\mathbf{r}}^2 \int_{\Omega} f(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') d\mathbf{r}' &= f(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (8.46)$$

ここで, \mathbf{r} による微分と \mathbf{r}' に関する積分は可換であることを用いている. (8.2) と (8.46) を見比べると,

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (8.47)$$

と表せることがわかる. したがって, 任意の源の分布によって生成される場 V は 単位の源によって生成される場である Green 関数の重ね合わせとして書けることがわかる.

*⁸ 通常〇〇関数というときには, 具体的な形を持ったものを指すが, この Green 関数は単位の源に対する応答に対して関数という名前が付されている点が通常関数と異なる.

このような Green 関数による重ね合わせの表現は, Poisson 方程式の斉次方程式である Laplace 方程式が線形微分方程式なので可能である.

このことを一般化すると Green 関数は Poisson 方程式だけでなく, 任意の線形演算子 \mathcal{L}_r に対する非斉次型微分方程式

$$\mathcal{L}_r V(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \quad (8.48)$$

に対して定義することができる. 即ち,

$$\mathcal{L}_r G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (8.49)$$

を満たす Green 関数を用いて, (8.48) の V は (8.47) と書ける. Green 関数は演算子 \mathcal{L}_r の形と境界条件に依存してその関数形が決まることになる.*⁹

■Green 関数の例 3次元 Laplace 方程式の Green 関数を求める. Green 関数の満たす式は

$$\nabla_r^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (8.50)$$

である. 境界条件は $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$ で $G \rightarrow 0$, $(r^2 dG/dr)_{r'=0} = 0$ とする. 座標系の原点を \mathbf{r}' に移し, 場の源が球対称であることを考慮すると Green 関数は $r \equiv |\mathbf{r}|$ のみの関数となる. そこで, $r > 0$ において, Laplace 方程式

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dG}{dr} \right) = 0 \quad (8.51)$$

を解く. その結果, c_1, c_2 任意定数として

$$G = -\frac{c_1}{r} + c_2, \quad (8.52)$$

を得る. 境界条件から, $c_2 = 0$ が要請される. さらに, $\mathbf{r}' = 0$ とした (8.50) を原点を中心とした半径 ε の小球で積分すると,

$$4\pi \int_0^\varepsilon \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dG}{dr} \right) r^2 dr = 1,$$

$$4\pi \left[r^2 \frac{dG}{dr} \right]_0^\varepsilon = \left(r^2 \frac{dG}{dr} \right)_{r=\varepsilon} = 4\pi c_1 = 1,$$

*⁹ ここでは空間微分を含んだ方程式に対して, その単位の生成源に対する応答として Green 関数を定義したが, 時間を含む微分方程式の初期値問題に対しても Green 関数の概念を拡張することができる. この場合には, 任意の初期条件は単位の初期条件の重ね合わせてして表現できるので, 微分方程式が線形であれば, 任意の初期条件に対する系の時間発展は単位の初期条件に対する応答としての Green 関数の重ね合わせとして書ける. 無限領域での 1次元拡散方程式の基本解は拡散問題に対する Green 関数と見做すことができる.

ここで、境界条件と (8.52) を用いた。以上より、Green 関数は

$$G = -\frac{1}{4\pi r}, \quad (8.53)$$

となる。座標系の原点をもとに戻して最終的に

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (8.54)$$

を得る。これは電磁気学でよく知られた Coulomb ポテンシャルである。実際に電磁気学では

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (8.55)$$

の方程式の解は、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (8.56)$$

となることが知られているが、これはまさに (8.47) である。

8.5 演習問題

8.5.1 曲線座標系における Laplace 方程式の問題

- i) 3次元球座標系の場合の勾配演算子、単位ベクトルの微分、ベクトルの発散、Laplacian は以下のようになることを導きなさい。注:ここに書かれていない単位ベクトルの微分はゼロである。

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (8.57)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r, \quad (8.58)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \cos \theta \mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} = -\sin \theta \mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \quad (8.59)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta A_\theta) + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (8.60)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}. \quad (8.61)$$

- ii) 3次元円柱座標系の場合の勾配演算子、単位ベクトルの微分、ベクトルの発散、Laplacian は以下の様になることを導きなさい。注:ここに書かれていない単位ベク

トルの微分はゼロである.

$$\nabla = e_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + e_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + e_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (8.62)$$

$$\frac{\partial e_\rho}{\partial \theta} = e_\theta, \quad \frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} = -e_\rho, \quad (8.63)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (8.64)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \quad (8.65)$$

8.5.2 Laplace 方程式と特殊関数

- i) 3次元球座標系において, 変数分離を行うことにより場の θ 依存性は, Legendre の陪微分方程式

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta = 0, \quad (8.66)$$

に従うことを示しなさい.

- ii) 2次元円柱座標系における Laplace 方程式を導き, Laplace 方程式の解の動径座標依存性に関する式が

$$r^2 \frac{dR}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - n^2 R = 0 \quad (8.67)$$

となることを導きなさい. ここで, n は整数である.

8.5.3 Green 関数

- i) 2次元 Laplace 方程式の Green 関数が, $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + c$ となることを示しなさい. ここで, c は任意定数であり, $rdG/dr|_{r=r'} = 0$ とする.
- ii) 次の 1次元微分方程式

$$\frac{d^2 G(y; y')}{dy^2} - k^2 G(y; y') = \delta(y - y') \quad (8.68)$$

に従う Green 関数が,

$$\begin{aligned} G(y; y') &= \frac{\sinh k(y-1) \sinh ky'}{k \sinh k}, & (y > y') \\ &= \frac{\sinh k(y'-1) \sinh ky}{k \sinh k}, & (y < y') \end{aligned} \quad (8.69)$$

となることを示しなさい. ここで, $y - y' \rightarrow \pm\infty$ で $G(y; y') \rightarrow \infty$, $G(y'+0; y') = G(y'-0; y')$ とする.

第 9 章

和の規約

例えば, $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N$ は総和の記号を使うと, 短い表記で $\sum_{i=1}^N a_ix_i$ と書くことができることは高校数学で習った (ハズである). ここではさらに短い表記 “和の規約” と呼ばれるものについて紹介する. この表記を用いると, 複雑なベクトルの演算が非常に簡単にできる (ときがある). またスカラーでもベクトルでもない, テンソルと呼ばれる量の表現にもこの表記がしばしば用いられる.*¹ 和の規約は相対性理論で有名な Einstein が始めた表記法らしく, Einstein の縮約規約とか Einstein の規約とも呼ばれる.

9.1 表記

位置ベクトルを \boldsymbol{x} で表す. 慣例によると \boldsymbol{x} をデカルト座標系におけるその成分 x, y, z を用いて表すと,

$$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \quad (9.1)$$

となる. ここで, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ, x, y, z 方向の単位ベクトルである.

なお, 単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を, 添え字付きの文字を用いて, それぞれ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ で表し, 成分 x, y, z を x_1, x_2, x_3 と表すこともある. 即ち添え字 1 が x 成分, 添え字 2 が y 成分, 添え字 3 が z 成分を表す. この章ではこの表記を採用する.

この表記よると (9.1) は

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \quad (9.2)$$

である. また任意のベクトル \boldsymbol{A} は

$$\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3 \quad (9.3)$$

*¹ テンソルは, 2 回生前期に開講される「地球惑星物理学基礎 I」において紹介されるだろう. 相対性理論でもテンソルは登場する.

と表記する.

偏微分記号, $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ は簡単化のために, $\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z$ と記す場合がある. これも先に採用した表記を用いると $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ となるがさらにコンパクトに, $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ と書く. このような表記では微分演算子 ∇ は

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (9.4)$$

$$= \mathbf{i} \partial_x + \mathbf{j} \partial_y + \mathbf{k} \partial_z \quad (9.5)$$

$$= \mathbf{e}_1 \partial_1 + \mathbf{e}_2 \partial_2 + \mathbf{e}_3 \partial_3 \quad (9.6)$$

となる.

x 方向の単位ベクトル	\mathbf{e}_1
y 方向の単位ベクトル	\mathbf{e}_2
z 方向の単位ベクトル	\mathbf{e}_3
ある物理量 \mathbf{A} の x 成分	A_1
ある物理量 \mathbf{A} の y 成分	A_2
ある物理量 \mathbf{A} の z 成分	A_3
x による偏微分	∂_1
y による偏微分	∂_2
z による偏微分	∂_3

表 9.1 表記法のまとめ

9.2 和の規約

和の規約とは

一つの項の中に同じアルファベット*2の添字が2回用いられているとき, その添字について1から3までの和をとる

ことである. すなわち,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i \\ &= x_i \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (9.7)$$

最後の最も簡単な表式が和の規約を用いて書かれたものである。和の規約とは (9.7) の 2 番目の表式において \sum を省略することとも言える。

注意 1: 和の規約において、添字はどんな記号を用いてもよい。とにかく添え字が 2 回繰り返して出てきたらその添え字について和をとればよい。つまり $x_i \mathbf{e}_i = x_j \mathbf{e}_j = x_k \mathbf{e}_k$ である。このような理由から繰り返す添字は無効添字 (dummy index) と呼ばれる。このことは、 \sum を使った表記に戻って考えれば納得できるであろう:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^3 x_j \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^3 x_k \mathbf{e}_k.$$

注意 2: 2 次元空間であれば、和は 1 ~ 2 にわたってとる。N 次元であれば、和は 1 ~ N にわたってとる。^{*3}

例: 和の規約を用いて表現した例。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_i \mathbf{e}_i. \\ \nabla &= \mathbf{e}_i \partial_i. \\ \nabla \psi &= \mathbf{e}_i \partial_i \psi. \end{aligned}$$

9.3 Kronecker のデルタ

2 つの添え字を持ち、以下のような性質を持つ量を Kronecker のデルタという:

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0, & (i, j \text{ が異なる値を持つとき}). \\ 1, & (i, j \text{ が同じ値を持つとき}). \end{cases} \quad (9.8)$$

Kronecker のデルタの別の定義は

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (9.9)$$

である。または、

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \partial_j x_i = \delta_{ij}, \quad (9.10)$$

とも定義できる。

^{*3} 相対性理論では、0 ~ 3 もしくは 1 ~ 4 にわたって和をとる。添字 0 もしくは 4 は時間座標 ict である。ここで、 i は純虚数、 c は光速である。

例： 和の規約と Kronecker のデルタを用いると $\nabla \cdot \mathbf{A}$ は以下のようにかける：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= (\mathbf{e}_i \partial_i) \cdot (A_j \mathbf{e}_j) \\ &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \partial_i A_j + A_j \mathbf{e}_i \cdot \partial_i \mathbf{e}_j \\ &= \delta_{ij} \partial_i A_j \\ &= \partial_j A_j.\end{aligned}\tag{9.11}$$

(注意：デカルト座標系では $\partial_j \mathbf{e}_i = 0$ である.)

確認： $\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3 = \sum_{i=1}^3 \partial_i A_i$ なので、最後の表記で \sum を省略すれば確かに (9.11) と一致する。

補足： この章で用いている表記によると、添え字は座標系のある方向の成分を現している。そこで、Kronecker のデルタは2つの添え字を持つので、2つの方向に依存した量である。スカラーは方向に依存せず大きさだけを持つ量である。一方ベクトルはひとつの方向と大きさを持つ量である。2つの方向を持つような量は今までおそらく習ったことがないであろう。このような2つの方向に依存した量は2階のテンソルと呼ばれる量である。テンソルという観点から見ると、スカラーは0階のテンソル、ベクトルは1階のテンソルである。

9.4 Eddington のイプシロン

3つの添え字を持ち、以下のような性質を持つ量を Eddington のイプシロンという：

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1, & (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \text{ のとき.} \\ -1, & (i, j, k) = (3, 2, 1), (2, 1, 3), (1, 3, 2) \text{ のとき.} \\ 0, & \text{それ以外するとき.} \end{cases}\tag{9.12}$$

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}.\tag{9.13}$$

$\varepsilon_{ijk} = 1$ となる場合は $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ の偶置換、 $\varepsilon_{ijk} = -1$ となる場合は $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ の奇置換という。

例

行列

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

の行列式は, Eddington のイプシロンを用いると

$$\begin{aligned} \det \underline{\mathbf{A}} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \end{aligned} \quad (9.14)$$

と表せる. また二つのベクトル \mathbf{A} と \mathbf{B} とのベクトル積は

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i A_j B_k \end{aligned} \quad (9.15)$$

となる. 同様にして回転演算は

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j A_k \end{aligned} \quad (9.16)$$

と表現できる.

補足: Eddington のイプシロン ε_{ijk} は 3 階のテンソルである.

9.5 和の規約を使ったベクトル解析の公式の証明の例

例 1: ϕ をあるスカラー関数, \mathbf{A} をあるベクトル関数として, $\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \mathbf{A}$ を和の規約を使って証明する.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) &= \mathbf{e}_i \partial_i \cdot (\phi A_j \mathbf{e}_j) \\ &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j A_j (\partial_i \phi) + \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \phi (\partial_i A_j) \\ &= \delta_{ij} (A_j \partial_i \phi + \phi \partial_i A_j) \\ &= A_i \partial_i \phi + \phi \partial_j A_j = \mathbf{A} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \mathbf{A}. \end{aligned}$$

第 1 式から第 2 式への変形には chain rule と $\partial_i \mathbf{e}_j = 0$ を用いている. また, 第 2 式から第 3 式への変形には (9.9) を用いた.

例 2: ϕ をあるスカラー関数として, 恒等式 $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ を和の規約を使って証明する.

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \phi) &= \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j (\partial_k \phi) \\
&= \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_k (\partial_j \phi) \\
&= -\varepsilon_{ikj} \mathbf{e}_i \partial_k (\partial_j \phi) \\
&= -\varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j (\partial_k \phi)
\end{aligned}$$

第1式から第2式への変形は微分の順序の交換 $\partial_j \partial_k = \partial_k \partial_j$ を, 第2式から第3式への変形は $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$ を用いた. さらに第3式から第4式への変形は, 添え字の置き換え $j \rightarrow k, k \rightarrow j$ を行った. 第1式と第4式に注目すると,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j (\partial_k \phi) &= -\varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j (\partial_k \phi) \\
\Rightarrow \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j (\partial_k \phi) &= 0.
\end{aligned}$$

つまり, $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ である.

■最後に... 今まで研究室内で指導してきた学生・院生の中で, 数理物理的な能力に秀でていた人達でも和の規約を使いこなせる人はあまりいなかった. しかしながら, 決して難しいルールではないので, 頑張っただけで勉強をしてこれを使いこなせるようになって欲しい. 和の規約が使いこなせると, 少しは優越感に浸れる場面がある. (もちろんそれを勉強の動機にするのは褒められたことではないが.) 和の規約を使いこなせるようになるには, やはりひとえに鍛錬を積む (多数の演習問題を解く) 以外に方法はない (であろう).

9.6 演習問題

9.6.1 和の規約の問題

- i) 和の規約を用いて, 以下を書き下しなさい.
 - a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
 - b) $df(x_1, x_2, x_3)$. ここで d は全微分である.
- ii) Kronecker のデルタの定義と和の規約を用いて, δ_{ii} の値を計算しなさい.
- iii) $\delta_{ij} A_j$ を求めなさい.
- iv) $\delta_{ij} \delta_{jk}$ を求めなさい.
- v) $(\partial_j x_i)(\partial_k x_j) = \delta_{ik}$ を証明しなさい.
- vi) テキストの (9.14) を確かめなさい.
- vii) ベクトル解析に現れる公式は, δ_{ij} , ε_{ijk} や 和の規約を使うと容易に証明できる. 次にあげる公式を, δ_{ij} , ε_{ijk} や和の規約を使って証明しなさい.

- a) ベクトル積に関する公式 $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$,
 b) ベクトル三重積に関する公式

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}),$$

viii) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ を確かめなさい.

ix) 次の関係を証明しなさい.

- $\varepsilon_{ijk}A_jA_k = 0$
- $\varepsilon_{ijk}\delta_{jk} = 0$

x) 流体力学の Lagrange 微分に現れる移流項 $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ は,

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (9.17)$$

と書けることを証明しなさい. ここで \mathbf{v} は流体の速度場で, $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{v}$ は渦度と呼ばれる物理量である. (上の関係式は Bernoulli の定理を証明するときに用いられる.)

- xi) $\nabla \times (S\mathbf{A}) = (\nabla S) \times \mathbf{A} + S(\nabla \times \mathbf{A})$ を和の規約を用いて証明しなさい.
 xii) $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ を和の規約を使って証明しなさい.
 xiii) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ を和の規約を使って証明しなさい.
 xiv) 物理数学で現れる Laplace 演算子 $\Delta \equiv \nabla^2$ はスカラー関数に作用する演算子である. しかしながら, デカルト座標系において $\nabla^2 v_i$ を成分に持つベクトルをしばしば $\nabla^2 \mathbf{v}$ と書くことがある. 即ち,

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla^2 v_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \nabla^2 v_i \quad (9.18)$$

である. 上の関係はデカルト座標系に対してのみ成り立つ. 一般の直交直線座標系 (極座標や円筒座標) では座標系の単位ベクトルが位置に依存するので (9.18) のように書くことはできない. その場合には,

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (9.19)$$

の公式により, $\nabla^2 \mathbf{v}$ を書き直しておく必要がある. (9.19) を和の規約を用いて証明しなさい.

第 10 章

複素解析

拡散方程式の解法の際に使用した複素関数の積分に関連して、複素関数に関する基本的な事項と複素積分について解説しておく。^{*1} なお、複素関数の知識は、実関数の積分だけでなく、特殊関数の議論や流体力学における非粘性流体中におかれた物体の周りの流れ場を計算するとき^{*2}など、非常に広範囲に利用される。講義では十分に紹介する時間がないので、ガイダンス時に紹介したテキストを各自勉強してさらに知識を深めてほしい。

10.1 複素数の復習

最初に複素数の復習から始める。実数を x, y とする時、複素数 z が次式で定義される：

$$z = x + iy. \quad (10.1)$$

ここで、 i は $i^2 = -1$ を満たす虚数である。複素共役は

$$z^* = x - iy \quad (10.2)$$

で与えられる。^{*3} この時、絶対値 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ に対し、 $|z|^2 = zz^*$ が成立する。

複素数を表示する座標平面を複素平面などという (図 10.1)。この時、横軸は実軸、縦軸は虚軸になる。

z と実軸の成す角度を θ とすると、上図より $\cos \theta = x/|z|$, $\sin \theta = y/|z|$ となる。この

^{*1} 山崎和仁 のノートを改編。

^{*2} 等角写像と呼ばれる手法。

^{*3} 複素共役は上付き線で表すこともあるが、以前の章における記述と整合性を保つために、アスタリスクを使うことにする。

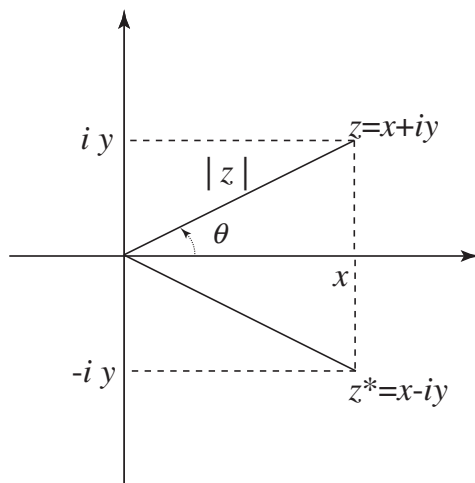


図 10.1 複素平面.

時, 式 (10.1) は次のように書き換えられる :

$$\begin{aligned} z &= x + iy = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r e^{i\theta}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

ここで, $|z| = r$ と置き, Euler の公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を使った. この, $z = r e^{i\theta}$ なる形を複素数の極形式と呼ぶ.

10.2 正則関数

10.2.1 “正則” とは

複素数 $z = x + iy$ を変数とする複素関数 $f(z)$ を考える. $f(z)$ が点 z_0 の近傍の全ての点で微分可能であるとき, $f(z)$ は点 z_0 で正則であるという. ここで, “近傍の全ての点で微分可能” とは, どちらの方向から点 z_0 に近づいても, 微分の結果が同じであることを意味する. 複素関数の z_0 における微分は以下のように定義する:

$$f'(z_0) = \frac{df(z_0)}{dz} \equiv \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

具体例を以下に記す.

例 1: $f(z) = z = x + iy$ は正則である.

$f(z)$ を z で微分する :

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z + \Delta z - z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta z} = 1. \quad (10.4)$$

微分結果が経路に依存しないので、あらゆる z において正則である。

例 2: $f(z) = z^* = x - iy$ は正則でない。

$f(z)$ を z で微分する：

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^* - z^*}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z^*}{\Delta z} \quad (10.5)$$

ここで、 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ から、

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \quad (10.6)$$

ここで、以下の二つの経路で微分点に近づく。

(経路 1) 実数軸から近づく。すなわち、 $\Delta y = 0$ として $\Delta x \rightarrow 0$ 。

(経路 2) 虚数軸から近づく。すなわち、 $\Delta x = 0$ として $\Delta y \rightarrow 0$ 。

経路 1 の結果は

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \quad (10.7)$$

経路 2 の結果は

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1 \quad (10.8)$$

つまり、経路によって微分値が異なるので、 $f(z) = z^*$ はあらゆる z において正則でないことが分かる。

正則性に関する重要な事実として、

$$f(z) = 1/z \text{ は、} z = 0 \text{ の点を除いて正則である。}$$

というものがある。

10.2.2 Cauchy-Riemann の関係式

ある関数が与えられた時に、そのたびごとに前小節のようなやり方で関数の正則性を調べるのは手間がかかる。より簡単に関数の正則性を調べる方法をここで導入する。

複素 $z = x + iy$ を変数とする関数 $f(z)$ (複素関数) の実部と虚部をそれぞれ u, v とする. u, v は実数 x, y に依存する実関数である:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (10.9)$$

$f(z)$ を z_0 において, z に関して微分する:

$$\begin{aligned} \frac{df(z_0)}{dz} &= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)\} - \{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\}}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right)}{\Delta x + i\Delta y}. \end{aligned} \quad (10.10)$$

ここで, 偏微分は $z_0 = x_0 + iy_0$ の点で見積もるものとする.

再び, 以下の二つの経路で微分点に近づく.

(経路 1) 実数軸から近づく. すなわち, $\Delta y = 0$ として $\Delta x \rightarrow 0$.

(経路 2) 虚数軸から近づく. すなわち, $\Delta x = 0$ として $\Delta y \rightarrow 0$.

経路 1 の結果は

$$\begin{aligned} \frac{df(z_0)}{dz} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + i \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (10.11)$$

経路 2 の結果は

$$\begin{aligned} \frac{df(z_0)}{dz} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + i \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y}{i\Delta y} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \quad (10.12)$$

関数が正則であるためには, 関数の微分が経路によらず同じ値にならなければならない. そこで, (10.11) と (10.12) を等しいとすると偏微分係数の間に次の関係式が成立する:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}}, \quad (10.13)$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}. \quad (10.14)$$

(10.13) と (10.14) を Cauchy-Riemann の関係式という. 上で述べた (10.13), (10.14) の導出は, Cauchy-Riemann の関係式が複素関数 $f(z)$ が正則であるための必要条件であることを述べている. 上の議論を逆にたどることにより, Cauchy-Riemann の関係式は $f(z)$ が正則であるための十分条件でもあることがわかる. そこで, 次の定理が導かれる:

複素平面内のある領域 D で定義された関数 $f(z)$ が正則 (holomorphic) である必要十分条件は, その実部 $u(x, y)$ と虚部 $v(x, y)$ が微分可能で, かつ Cauchy-Riemann の関係式 (10.13), (10.14) が D 内で成立することである.

例: e^z は全平面で正則である.

$e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$ より $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$ である. この時, u と v は微分可能である. また, $\partial_x u = e^x \cos y$, $\partial_y v = e^x \cos y$, $\partial_y u = -e^x \sin y$, $\partial_x v = e^x \sin y$ から Cauchy-Riemann の関係式を満たす. よって, e^z は任意の z について正則である. つまり, 全平面で正則である.

10.3 Cauchy の積分定理

Cauchy-Riemann の関係式 (10.13), (10.14) と Green の定理を組み合わせることにより, 複素関数論において最も重要な定理が以下のように与えられる (証明は後述):

複素変数 $z = x + iy$ の複素関数を $f(z)$ とする. このとき, 積分領域 D とその境界 C において, $f(z)$ が正則であれば, 次式が成立する:

$$\oint_C f(z) dz = 0. \quad (10.15)$$

つまり, 被積分関数 $f(z)$ が C および D 内で正則ならば, $f(z)$ の具体的な関数形によらず, さらに積分経路にも依存せず, 必ずゼロとなる. 複素解析における面白い結果のひとつは, この定理が起点となって導かれる.

証明は以下の通りである. 複素変数 $z = x + iy$ の複素関数を $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とすると,

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u + iv)(dx + idy) = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy) \quad (10.16)$$

線積分を面積分に直す Green の定理

$$\oint_C F dx = - \int_D \partial_y F dx dy \quad (10.17)$$

$$\oint_C F dy = \int_D \partial_x F dx dy \quad (10.18)$$

を使うと,*4 式 (10.16) の第一および第二項は

$$\oint_C (u dx - v dy) = - \int_D (\partial_y u + \partial_x v) dx dy \quad (10.19)$$

$$\oint_C (v dx + u dy) = \int_D (\partial_x u - \partial_y v) dx dy \quad (10.20)$$

この時, $f(z)$ が C 上 および D 内で正則ならば, Cauchy-Riemann の関係式 (10.13), (10.14) が成立するの, (10.19), (10.21) は共にゼロとなる.

例えば, 例 1 で見たように z は全平面で正則なので, その周回積分は必ずゼロとなる.

一方, $1/z$ は $z=0$ を除き正則である. この様に正則でない点が含まれている場合, 積分範囲に注意する必要がある. 例えば, 積分路 C が, $|z|=r(>0)$ すなわち原点を中心とする半径 r の円周であれば, 正則でない点 $z=0$ が含まれるのでゼロになるとは限らない. 一方, 積分路 C が $|z-1|=0.1$ すなわち点 $(1,0)$ を中心とする半径 0.1 の円周であれば, 正則でない点 $z=0$ を含まないので (つまり $1/z$ はこの積分範囲で正則なので) ゼロとなる.

上記の結果を, 極形式をつかって確かめてみる.

例: 1 反時計回りの積分路 C を $|z|=r(>0)$ とし, 以下の積分を考える:

$$\oint_C z dz. \quad (10.21)$$

このとき, 極形式 $z = re^{i\theta}$ を導入すると, 積分範囲は $0 \leq \theta \leq 2\pi$ になり, また $dz = ire^{i\theta} d\theta$ なので,

$$\oint_C z dz = \int_0^{2\pi} re^{i\theta} ire^{i\theta} d\theta = ir^2 \int_0^{2\pi} e^{i2\theta} d\theta = 0. \quad (10.22)$$

予想通り上式はゼロである. ここでのポイントは, $e^{in\theta}$ (n は整数) なる形の項が被積分関数に含まれている点である. このため, 一周積分をすると必ずゼロとなる. 言い換えると, この $e^{in\theta}$ なる形の項が消えた場合, ゼロとはならない.

*4 2次元平面内の Stokes の定理を用いてもよい. 2次元平面内の Stokes の定理は, $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ として

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C u dx + v dy \\ &= \int_D (\nabla \times \mathbf{v})_z dx dy \\ &= \int_D (\partial_x v - \partial_y u) dx dy \end{aligned}$$

である.

例 2: 次に、必ずしもゼロとはならないと予想される以下の積分を考える:

$$\oint_C \frac{1}{z} dz. \quad (10.23)$$

ここで積分路 C は同じく反時計回りで $|z| = r (> 0)$ である.
同じく極形式を導入すると,

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} r^{-1} e^{-i\theta} i r e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i, \quad (10.24)$$

つまり、積分はゼロとはならない. 式変形の途中で $e^{in\theta}$ なる形の項が消えたのがポイントである.

一般に、以下の事実が知られている. $C: |z| = r (> 0)$ とすると

(i) $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ の場合

$$\oint_C z^n dz = 0. \quad (10.25)$$

(ii) $n = -1$ の場合

$$\oint_C z^n dz = 2\pi i. \quad (10.26)$$

(iii) $n = -2, -3, -4, \dots$ の場合

$$\oint_C z^n dz = 0. \quad (10.27)$$

つまり、 $n = -1$ の場合を除き全てゼロになる. 証明の方針は以下の通りである.

まず、(i) の場合、 z^n はこの積分範囲で正則なので、Cauchy の積分定理よりゼロとなる.

(ii) の場合は既に式 (10.24) で見た.

(iii) の場合、 z^n は $1/z^2$ の様に $z = 0$ で正則ではないので、Cauchy の積分定理は使えない. しかしながら、 $z^n dz = i r^{1+n} e^{i(1+n)\theta} d\theta$ となり、 $e^{in\theta}$ となる形の項が必ず残るので、 θ に関する一周積分で必ずゼロとなる.

注意: (i) と (iii) は同じゼロでも意味が違う点に注意しよう. (i) は関数の正則性からゼロであり、(iii) は関数の形からの帰結である. つまり、正則であればゼロであるが、ゼロであったとしても正則とは限らない. 言い換えれば、Cauchy の積分定理の逆が成り立つわけではない.

10.4 級数展開の復習

ここで、以下の節で必要となる級数展開の復習を行う.

普通の関数（無限回微分可能でかつ収束してくれる関数）は、級数展開できる。例えば、指数関数や三角関数は以下のように級数展開される：

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \quad (10.28)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots \quad (10.29)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots \quad (10.30)$$

各項の係数はどのようにして決めれば良いのだろうか。それを以下考える。まず、級数展開可能な関数 $f(x)$ を考える：

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \quad (10.31)$$

最初の係数 a_0 の求め方は簡単である。 $x = 0$ とすれば良い：

$$a_0 = f(0) \quad (10.32)$$

次に、 a_1 であるが、これを求めるために、まず関数を微分するのが級数展開一般に使われるテクニックである：

$$f(x)' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots \quad (10.33)$$

それから、 $x = 0$ とすれば良い：

$$a_1 = f(0)' \quad (10.34)$$

3 次以降の高次項の係数も同様にして求められる。結局、級数展開 (10.31) は

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \cdots \quad (10.35)$$

例： 指数関数 $f(x) = e^x$ を三次の項まで級数展開する。（解答例）

$$a_0 = f(0) = 1 \quad (10.36)$$

$$a_1 = f'(0) = 1 \quad (10.37)$$

$$a_2 = \frac{1}{2!}f''(0) = \frac{1}{2!} \quad (10.38)$$

$$a_3 = \frac{1}{3!}f'''(0) = \frac{1}{3!} \quad (10.39)$$

より、式 (10.28) の三次までの項が確かに得られる。

式 (10.31) の右辺で, x を $x - p$ に置き換える :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - p) + a_2(x - p)^2 + a_3(x - p)^3 + \cdots \quad (10.40)$$

式 (10.31) では $x = 0$ として係数 a_i を求め, 式 (10.35) を得た. これに対し, 式 (10.40) では $x = p$ とすることにより係数が求まる :

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + \frac{1}{2!}f''(p)(x - p)^2 + \frac{1}{3!}f'''(p)(x - p)^3 + \cdots \quad (10.41)$$

式 (10.41) は $f(x)$ を $x = p$ の周りで展開した, と言われ Taylor 展開という名前がついている. この時, 式 (10.35) は $x = 0$ の周りで展開した, と言われ Maclaurin 展開という名前がついている. つまり Taylor 展開で $p = 0$ とした特殊な場合が Maclaurin 展開である.

10.5 留数

例として, 以下のような複素関数 $f(z)$ の級数展開を考える :

$$f(z) = a_{-2}z^{-2} + a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1z^1 + a_2z^2. \quad (10.42)$$

これを反時計回りの積分経路 $C : |z| = 1$ で積分する :

$$\oint_C f(z)dz \quad (10.43)$$

式 (10.25), (10.26) および (10.27) から, 周回積分でゼロにならないのは, $1/z$ に関する項だけなので,

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1} \quad (10.44)$$

という重要な関係式が得られる.

この a_{-1} の様に, 積分で残る非積分関数の級数展開の係数を **留数**と呼ぶ. 上記の結果は, 複素関数の留数さえ求まれば, それに $2\pi i$ を掛けるだけで積分値が求まることを示す. この簡明な事実が, 複素積分が自然科学分野で広く使われている理由の一つである. そこで以下の節では, 留数の求め方に議論の中心をおく.

10.6 Laurent 展開に基づく留数の求め方

通常関数と同様に複素関数も級数展開できる. しかしながら, 前節で見たように, 積分で残るのは $1/z$ の項だけである. 従って, $-n$ 次の項すなわち正則ではない点 (これを特

異点と呼ぶ) も含めて級数展開した方が便利である. この級数展開を Laurent 級数展開と呼ぶ:

$$f(z) = \cdots + a_{-2}z^{-2} + a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1z^1 + a_2z^2 + \cdots. \quad (10.45)$$

平たく言うと, おなじみの Maclaurin 級数展開 $a_0 + a_1z^1 + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots$ に特異点の項を含めたのが Laurent 級数展開である. このとき, 係数 a_{-1} が留数となる.

式 (10.45) の Laurent 展開は $z = 0$ の周りで展開したものであるが, 一般には $z = s$ の周りで展開した方が応用が利く. この拡張は, Maclaurin 展開から Taylor 展開への移行と同様に, z を $z - s$ に置き換えれば良い:

$$f(z) = \cdots + a_{-2}(z-s)^{-2} + a_{-1}(z-s)^{-1} + a_0 + a_1(z-s)^1 + a_2(z-s)^2 + \cdots. \quad (10.46)$$

ここで, あらためて留数の正式な定義を書いておく:

$f(z)$ が特異点 $z = s$ で Laurent 展開

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-s)^n \quad (10.47)$$

可能なとき, $1/(z-s)$ の係数 a_{-1} を $z = s$ における留数と呼ぶ. 数学記号では,

$$a_{-1} = \text{Res}[f, s] \quad (10.48)$$

などを書く. Res は residue (留数) の略である. 本講義では, 誤解のないとき, Res, とだけ記す. 従って, 式 (10.44) は

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \text{Res} \quad (10.49)$$

となる.

*5

では, 留数 a_{-1} を求めてみよう. 例として

$$f(z) = a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1z^1 \quad (10.50)$$

を考える. 最初の項が (10.50) のように z^{-1} ではじまるものを 1 位の極を持つという. 正則でない点は $z = 0$ なので, これが特異点である. この係数, すなわち留数 a_{-1} を抜き取

*5 上記の特異点はいわゆる孤立特異点と呼ばれるものを指す.

式 (10.48) 以外にも様々な表現がある. 例えば, dz を書かないとか.

るにはどうすれば良いのだろうか. 実数の場合と同様に, $z = 0$ を代入しても, 発散してしまう. また, 微分して $z = 0$ を代入しても同様である. そこで, z を掛けるのが解析のポイントである:

$$zf(z) = a_{-1} + a_0z + a_1z^2. \quad (10.51)$$

次に z を特異点 0 に近づければ, 留数 a_{-1} が求まる:

$$\lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = a_{-1} = Res. \quad (10.52)$$

1 位の極を持つ場合, z を一回掛けているのがポイントである.

次に,

$$f(z) = a_{-2}z^{-2} + a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1z^1 \quad (10.53)$$

を考える. (10.53) は z^{-2} ではじまっているので, 2 位の極を持つという. 上記と同様に z を掛けて特異点 0 に z を近づけると, $a_{-2}z^{-1}$ の項が発散する. では, z^2 を掛けると

$$z^2f(z) = a_{-2} + a_{-1}z + a_0z^2 + a_1z^3 \quad (10.54)$$

となり, 特異点 0 に z を近づけると, 肝心の留数項 $a_{-1}z$ が消える. そこで, 実数の場と同様に, これを微分するのがポイントである:

$$\frac{d}{dz}[z^2f(z)] = a_{-1} + 2a_0z + 3a_1z^2 \quad (10.55)$$

そして, あらためて z を特異点 0 に近づければ留数 a_{-1} が求まる:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz}[z^2f(z)] = a_{-1} = Res \quad (10.56)$$

2 位の極を持つ場合, z を二回掛けている点に注意しよう.

繰り返すが, 最初の項が (10.50) のように z^{-1} ではじまるものを 1 位の極を持つという. 同様に, (10.53) は z^{-2} ではじまっているので, 2 位の極を持つ場合である. 従って, n 位の極を持つ複素関数の留数は

$$\frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[z^n f(z)] = Res \quad (10.57)$$

で与えられる. 特異点が $z = 0$ ではなく $z = s$ の場合

$$\frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow s} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-s)^n f(z)] = Res \quad (10.58)$$

である.

注意: 複素関数の具体的な形が複雑で, 極の位数が不明な時などは, 上記の公式 (10.57), (10.58) ではなく, 地道に Laurent 級数展開して留数 Res を求めた方が確実であることが多い (経験則).

例: $C: |z| = 1$ において

$$\oint_C \frac{\cos z}{z^2} dz \quad (10.59)$$

を求める.*6

$\cos z/z^2$ を特異点 $z = 0$ を中心に Laurent 級数展開すると

$$\frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{0}{z} - \frac{1}{2} + \cdots \quad (10.60)$$

から, 留数 a_{-1} はゼロである. 従って積分値もゼロとなる.

$\cos z/z^2$ の特異点 $z = 0$ が 2 位の極であることが分かれば, 公式 (10.57) から

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[z^2 \frac{\cos z}{z^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} (-\sin z) = 0 \quad (10.61)$$

より留数がゼロなので, 積分値もゼロである.

10.7 留数定理

前節では, 留数は一つだけ存在する場合だけを考えた. では, 複数ある場合はどうすれば良いのだろうか. これについては, 以下の留数定理が知られている.

複素関数 $f(z)$ が閉曲線 C の内部に, 特異点 s_1, \dots, s_N を持つ時, その周回積分は, 式 (10.49) を拡張して

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}[f, s_j] \quad (10.62)$$

となる.

つまり, 留数を全て求め, それを足し合わせ, 最後に $2\pi i$ を掛ければ良い.

例: $C: |z| = 5$ において

$$\oint_C \frac{1}{z^2 + 3z + 2} dz \quad (10.63)$$

を求める.

*6 繰り返すが, まず特異点が積分範囲にあることを確認し, 次に留数 Res を求める. そして式 (10.49) から, 留数 Res に $2\pi i$ を掛ければ OK である.

$z^2 + 3z + 2 = (z+1)(z+2)$ から特異点は, $z = -1, z = -2$ で共に 1 位の極を持つ. これらの特異点は積分範囲に含まれている. 留数 Res は, 公式 (10.58) から, それぞれ $\lim_{z \rightarrow -1} (z+1)/\{(z+1)(z+2)\} = 1$ および $\lim_{z \rightarrow -2} (z+2)/\{(z+1)(z+2)\} = -1$ である. したがって, 留数定理から, 積分値は $2\pi i(1-1) = 0$.

例 2: $C : |z| = 1.5$ において

$$\oint_C \frac{1}{z^2 + 3z + 2} dz \quad (10.64)$$

を求める.

点 $z = -1$ は積分範囲に含まれるが, $z = -2$ は含まれない. 従って, 考える特異点は $z = -1$ のみである. つまり, 積分値は $2\pi i$ である.

10.8 複素関数積分に基づく実数関数積分

今まで見てきたように, 複素関数の積分は非常に簡明である. そこで, 計算が難しい実数関数の積分を, 複素平面で考えて解くことが多い. 具体例を以下に見ていこう.

例として, 実数関数 $x^2 + 1$ の実数積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx \quad (10.65)$$

を考える. 変数 x は複素数ではなく実数であるので間違えないように. この実数積分を実行するために, 複素関数 $z^2 + 1$ の複素積分

$$\oint_C \frac{1}{z^2 + 1} dz \quad (10.66)$$

を考える. 特異点 $z = i, -i$ を複素平面に落とすと

積分経路は図 10.2 のような半円の周を考え, $z = i$ の特異点だけを含むようにする. 積分方向は反時計周りである (補足説明その 2 参照). この経路を分割して $C = C_1 + C_2$ とするのが, 解析のポイントである:

$$\oint_C \frac{1}{z^2 + 1} dz = \int_{C_1} \frac{1}{z^2 + 1} dz + \int_{C_2} \frac{1}{z^2 + 1} dz. \quad (10.67)$$

ここで, 経路 C_1 上の積分は実数軸上の積分なので, 右辺第一項は実数積分に置き換えられて

$$\oint_C \frac{1}{z^2 + 1} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{x^2 + 1} dx + \int_{C_2} \frac{1}{z^2 + 1} dz. \quad (10.68)$$

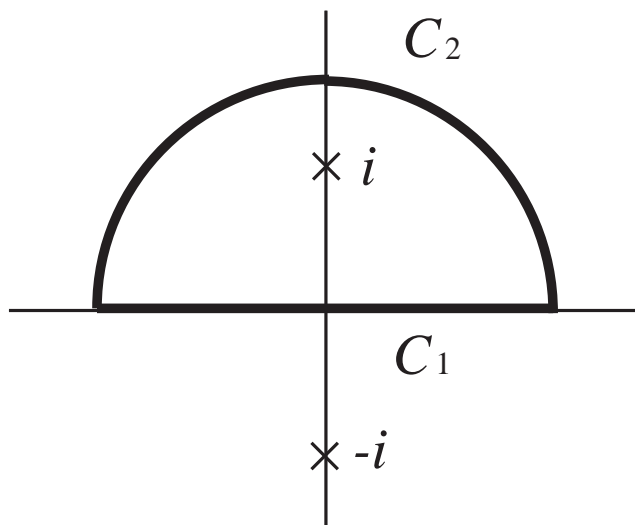


図 10.2 積分経路 C

つまり, $R \rightarrow \infty$ とすれば, 右辺第一項が求めたい積分 (10.65) に対応する. 言い換えれば,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \oint_C \frac{1}{z^2+1} dz - \int_{C_2} \frac{1}{z^2+1} dz \quad (10.69)$$

における右辺を求めれば良い. ここで, 第二項は $R \rightarrow \infty$ でゼロに収束する (注: 分母の次数が分子の次数より 2 以上大きければ OK である. 下記の補足参照その 1 参照.). 従って, 結局,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \oint_C \frac{1}{z^2+1} dz \quad (10.70)$$

ここで, 右辺は, 留数が $1/(2i)$ なので, π である. 従って,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \pi \quad (10.71)$$

となる. 式 (10.70) の事実に慣れてくれば, (10.65) 型の実数積分は暗算的に求められる.

補足説明その 1: $z = Re^{i\theta}$ を導入して,

$$\int_{C_2} \frac{1}{z^2+1} dz = \int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+1} d\theta \quad (10.72)$$

これは 被積分関数の R 依存性に注目すると, 分母は R^2 , 分子は R に比例するので, $R \rightarrow \infty$ のとき, 被積分関数はゼロに収束する. 一般に, 分母の次数が分子の次数より 2 以上大きければ同様の結果となる.

補足説明その2: 上の特異点を囲う積分を考えてきたが, 下の特異点を囲う積分を採用した場合に結果がどのようになるのか, という疑問が自然に湧く. 以下で見るように, 下の特異点を囲う積分にしても結果は変わらない. 下の特異点 $-i$ を考えた場合, Res は $-\text{Res}$ となる. しかしながら, 下の特異点を考えると, $-R(=-\infty)$ から $R(=\infty)$ へといたる積分経路は, 今まで考えてきた反時計回りではなく時計回りなので, マイナスがつくから答えは変わらない.

10.9 演習問題

10.9.1 Cauchy-Riemann の関係式と正則性

以下の問題を, Cauchy-Riemann の関係式を使って解きなさい. ここで $z = x + iy$ とする.

- i) z は全平面で正則であることを示せ.
- ii) \bar{z} は全平面で正則でないことを示せ.
- iii) $1/z$ は $z = 0$ を除き正則であることを示せ.
- iv) z^2 は全平面で正則であることを示せ.

10.9.2 Cauchy の積分定理

- i) $C: |z| = 1$ とする*7. このとき, 以下の積分でゼロになるものをあげよ.

$$\oint_C z^2 dz \quad (10.73)$$

$$\oint_C \frac{1}{z - 0.1} dz \quad (10.74)$$

$$\oint_C \frac{1}{z - 100} dz \quad (10.75)$$

ヒント: 式 (10.74) は $z = 0.1$ で正則ではない. (10.75) は $z = 100$ で正則ではない.

10.9.3 Laurent 展開に基づく留数の求め方

- i) $C: |z - 1| = 1$ において

$$\oint_C \frac{\sin z}{z - 1} dz \quad (10.76)$$

*7 複素平面内における $z = a$ を中心とする半径 r の円を $C: |z - a| = r$ と書く.

を求めよ. (ヒント: 特異点 $z = 1$ は 1 位の極.)

ii) $C: |z - 1| = 1$ において

$$\oint_C \frac{\sin z}{(z - 1)^4} dz \quad (10.77)$$

を求めよ. (ヒント: 特異点 $z = 1$ は 4 位の極.)

10.9.4 留数定理

i) 以下の積分

$$\oint_C \frac{1}{z^2 - 1} dz \quad (10.78)$$

を $C: |z| = 2$ および $C: |z - 1| = 1$ の場合にそれぞれ求めよ. (ヒント: $z^2 - 1 = (z + 1)(z - 1)$ から, 特異点は $z = 1$ および $z = -1$ でともに 1 位の極.)

ii) 以下の積分

$$\oint_C \frac{1}{z^2 + 1} dz \quad (10.79)$$

を $C: |z| = 2$ および $C: |z - i| = 1$ の場合にそれぞれ求めよ. (ヒント: $z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$ から, 特異点は $z = i$ および $z = -i$ でともに 1 位の極.)

10.9.5 複素関数積分に基づく実数関数積分

以下の各式を証明せよ.

i)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{2} \quad (10.80)$$

ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 9} dx = \frac{\pi}{3} \quad (10.81)$$

付録 A

2 階の線形偏微分方程式の分類

これまでの 3 章で, 3 つの偏微分方程式, 拡散方程式, 波動方程式, Laplace–Poisson 方程式を議論してきた. 本章では, 一般的な形の 2 階線形偏微分方程式の型の分類を行い, これらの 3 つの方程式はその代表例であることを解説する.*¹

A.1 はじめに

以下の形で与えられる 2 階偏微分方程式を考察する:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Phi \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y \right). \quad (\text{A.1})$$

ここで, A, B, C は既知の x, y の関数であり, Φ は $u, u_x (\equiv \partial u / \partial x)$ 等の非線形関数であってもよい. このような微分方程式は, 基本的な 3 つの型に分類できることを本稿では述べる. そのためにまず特性曲線を導入し, 次に特性曲線に沿う座標変数で (A.1) を書き直すことにより基本的な 3 つの型への分類を行う.

A.2 特性曲線

x, y 平面内で曲線 Γ を考える. この曲線上で u が与えられており, 曲線の法線方向を \mathbf{n} としたときに, Γ 上で u の法線方向微分 u_n が与えられているとする. Γ に沿って u が知られているので u の曲線に沿う方向 \mathbf{s} の微分 u_s もわかっている. そこで, 曲線上 Γ で u_x, u_y もわかっていることになる. このような曲線 Γ 上で, 微分方程式 (A.1) が解ける条件を考える.

*¹ Sommerfeld(Partial Differential Equations in Physics, Academic Press,1949) を参考にこの章を作成した.

次のような記号を導入する:

$$p = u_x, \quad q = u_y, \quad r = u_{xx}, \quad s = u_{xy}, \quad t = u_{yy}.$$

r, s, t を用いると (A.1) は

$$Ar + 2Bs + Ct = \Phi, \quad (\text{A.2})$$

と書ける. また一般的に

$$dp = r dx + s dy, \quad (\text{A.3a})$$

$$dq = s dx + t dy, \quad (\text{A.3b})$$

が成り立ち, もちろん Γ 上でもこの関係式は成り立つ. Γ 上で Φ, p, q は知られているので, (A.2), (A.3) は,

$$\begin{pmatrix} A & 2B & C \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \\ dp \\ dq \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

と書けて, r, s, t を求める問題に帰着される. (A.4) は

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} A & 2B & C \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = A(dy)^2 + 2B(dx dy) + C(dx)^2,$$

がゼロでないときに r, s, t を決定できる.

しかしながら, 一般的に x, y 平面内のあらゆる点で $\Delta = 0$ となるような方向が 2 つ存在することが知られている. なぜなら, $\Delta = 0$ は dy/dx に関する 2 次方程式とみなすことができ, 一般にそれは 2 つの解を持つからである. dy/dx は曲線の傾きを与えるので, したがってこのことは $\Delta = 0$ を満足する 2 つの曲線の属が存在する. その曲線は Monge に従って, 特性曲線 (characteristics) と呼ばれている.

微分方程式 (A.1) の可解に関する必要条件は, Γ が至る所で特性曲線に接していない, である.

特性曲線,

$$A(dy)^2 + 2B(dx dy) + C(dx)^2 = 0, \quad (\text{A.5})$$

の議論をしよう. (A.5) を $(dx)^2 (\neq 0)$ でまとめ, 解を求めると,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad (\text{A.6})$$

を得る. (A.6) を積分することにより, x, y 平面内の曲線を得る. 一般に x, y 平面内の曲線は, $f(x, y) = \text{const.}$ のように表現することができるが, この定数が (A.6) の根号内の符

号によって実数になったり、複素数になったり、さらには特性曲線が一つしかない場合に分類される。

A, B, C が以下のような関係を満足する場合を考えよう:

- i) $B^2 - AC > 0$: この場合には、特性曲線は 2 つの異なった実の定数で表現される。このような A, B, C を持つ偏微分方程式は双曲型と呼ばれ、波動方程式がその代表例である。
- ii) $B^2 - AC = 0$: この場合には、特性曲線は 1 つの実の定数で表現される。このような A, B, C を持つ偏微分方程式は放物型と呼ばれ、拡散方程式がその代表例である。
- iii) $B^2 - AC < 0$: この場合には、特性曲線は 2 つの互いに共役な複素の定数で表現される。このような A, B, C を持つ偏微分方程式は楕円型と呼ばれ、Laplace 方程式がその代表例である。

A.3 座標変換

A.3.1 双曲型

今、 x, y 平面内で、

$$\varphi(x, y) = \text{const.}, \quad \psi(x, y) = \text{const.} \quad (\text{A.7})$$

となる曲線群を考えて、それに沿った新しい座標系、

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \quad (\text{A.8})$$

を考えて、この座標系で偏微分方程式 (A.1) を書き換えてみよう。ここで、定数は実数とする。 x, y による偏微分は、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \varphi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \psi_x \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (\text{A.9a})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \varphi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \psi_y \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (\text{A.9b})$$

と変換され、したがって 2 階微分は、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \varphi_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\varphi_x \psi_x \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \psi_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \varphi_{xx} \frac{\partial}{\partial \xi} + \psi_{xx} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (\text{A.10a})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \varphi_x \varphi_y \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \psi_y \psi_x \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \varphi_{xy} \frac{\partial}{\partial \xi} + \psi_{xy} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (\text{A.10b})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \varphi_y^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\varphi_y \psi_y \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \psi_y^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \varphi_{yy} \frac{\partial}{\partial \xi} + \psi_{yy} \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (\text{A.10c})$$

これらを用いて (A.1) を書き換えると,

$$\begin{aligned} & (A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\ & + 2 \{ A\varphi_x\psi_x + B(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + C\varphi_y\psi_y \} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \\ & + (A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Psi(u, u_\xi, u_\eta, \xi, \eta), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

を得る. ここで, Ψ は $u, u_\xi, u_\eta, \xi, \eta$ を含む関数である.

(A.7) から, 曲線に沿って,

$$\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0, \quad (\text{A.12})$$

が成り立つ. したがって, $dx \neq 0$ として,

$$\varphi_x = -\varphi_y \frac{dy}{dx}, \quad (\text{A.13})$$

を得る. これを (A.11) に代入すると, 左辺第一項の係数は,

$$A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = \left\{ A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B \frac{dy}{dx} + C \right\} \varphi_y^2,$$

となり, もし, $\varphi(x, y) = \text{const.}$ を特性曲線に選んでおけば, (A.11) の右辺第一項はゼロである. 同様に, $\psi(x, y) = \text{const.}$ を特性曲線に選べば (A.11) の右辺第三項はゼロである. したがって, (A.1) は (左辺第 2 項の係数で両辺を割って)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = X_h(u, u_\xi, u_\eta, \xi, \eta), \quad (\text{A.14})$$

となる.

1 次元波動方程式,*²

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (\text{A.15})$$

において, (A.8) を計算すると, $A = c^2, B = 0, C = -1$ であるから,

$$\frac{dy}{dx} = \pm c^{-1}, \quad (\text{A.16})$$

となる. 上の式は,

$$\varphi(x, y) = x + cy = \xi, \quad \psi(x, y) = x - cy = \eta, \quad (\text{A.17})$$

*² 時間の変数を標準的な表記の t でなく y と記している.

という2つの特性曲線を与える. $\varphi_x = 1$, $\varphi_y = c$, $\psi_x = 1$, $\psi_y = -c$ であるので,

$$\begin{aligned} A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 &= 0, \\ A\varphi_x\psi_x + B(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + C\varphi_y\psi_y &= 2c^2, \\ A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2 &= 0, \end{aligned}$$

となり, 確かに (A.14) と同様の,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

に変換される.

A.3.2 放物型

特性曲線が1つしか存在しない場合を考える. このとき, 例えば x は変換せず, 独立変数を x, ξ とする. このとき,

$$\xi = \varphi(x, y), \quad x = \eta = \psi(x, y), \quad (\text{A.18})$$

と変換する. 関数 ψ の微分は,

$$\psi_x = 1, \quad \psi_y = 0, \quad (\text{A.19})$$

である. (A.11) の右辺第1項の係数は, 双曲型と同様にゼロになる. さらに, (A.11) の右辺第2項の係数は, (A.19) を用いると,

$$A\varphi_x\psi_x + B(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + C\varphi_y\psi_y = A\varphi_x + B\varphi_y, \quad (\text{A.20})$$

である. 放物型の特性曲線は, $B^2 - AC = 0$ で特徴づけられることを用いて,

$$\begin{aligned} A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 &= A^{-1} \left[(A\varphi_x + B\varphi_y)^2 - (CA - B^2)\varphi^2 \right] \\ &= A^{-1} (A\varphi_x + B\varphi_y)^2 = 0. \end{aligned}$$

したがって, (A.11) の左辺第2項の係数もゼロとなる. よって, (A.1) は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X_p(u, u_x, u_\xi, x, \xi), \quad (\text{A.21})$$

となる.

(空間)1次元拡散方程式,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \kappa^{-1} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (\text{A.22})$$

は明らかに, (A.21) と同じ型をしていることがわかる. (前と同様に時間の変数を y と表記している.)

A.3.3 楕円型

この場合には、双曲型と同じ議論になる。ただし、曲線を表す定数が共役な複素数となる。したがって、 ξ, η は複素数である。ここで、次のような新しい実の座標系 ξ', η' を導入する:

$$\xi' = \xi + \eta, \quad i\eta' = \xi - \eta, \quad (\text{A.23})$$

もしくは

$$\xi = \frac{1}{2}(\xi' + i\eta'), \quad \eta = \frac{1}{2}(\xi' - i\eta'). \quad (\text{A.24})$$

このとき、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi'} - i \frac{\partial}{\partial \eta'} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi'} + i \frac{\partial}{\partial \eta'} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

したがって、

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta'^2} \right). \quad (\text{A.26})$$

つまり、(A.1) は、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta'^2} = X_e(u, u_{\xi'}, u_{\eta'}, \xi', \eta'), \quad (\text{A.27})$$

と表せる。

2次元 Laplace-Poisson 方程式、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y), \quad (\text{A.28})$$

は明らかに、(A.21) と同じ型をしていることがわかる。

付録 B

Laplace 変換

B.1 定義

ある関数 $F(t)$ の Laplace 変換 (Laplace transform) は以下のように定義される:

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt. \quad (\text{B.1})$$

ここで, s は複素数である.

Fourier 変換との類似性 : ある関数 $F(t)$ の Fourier 変換は

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} F(t) dt \quad (\text{B.2})$$

と書かれる.*¹ 積分範囲の下限の違いをとりあえず無視すれば, Fourier 変換と Laplace 変換との違いは, 被積分関数に含まれる指数関数の指数の違いだけである. この指数が純虚数の場合が Fourier 変換で, それが複素数の場合が Laplace 変換になっているのがわかるであろう. Fourier 変換が Fourier 級数のナイーブな拡張であったが, Laplace 変換は Fourier 変換の拡張と考えることができる.

積分の下限, 及び応用 : Laplace 変換を, Fourier 変換と同様に,

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} F(t) dt. \quad (\text{B.3})$$

のように, 独立変数に関して $-\infty$ から ∞ の積分で定義している本もある. もし変換される関数 $F(t)$ が

$$F(t) = 0, (t < 0) \quad (\text{B.4})$$

*¹ 先に導入した Fourier 変換の公式 (4.10) は, 正変換, 逆変換が対称的な形になるように書いた. ここでは Laplace 変換と Fourier 変換の類似性を強調するために, あえて $1/\sqrt{2\pi}$ が現れない形に書いた.

を満足する時には、両者の定義は一致することがわかる。このとき、(B.1)のことを片側 Laplace 変換と呼ぶ。

Laplace 変換の定義を t の関数を用いて書いたのは、Laplace 変換が特に時間発展問題の微分方程式の解法に強力な武器となることを意識しているためである。時間発展の微分方程式では、一般解に含まれている任意定数は、初期条件によってその値を決定することができた。Laplace 変換を用いて微分方程式を解く場合には、Laplace 変換する際の積分の下限 $t = 0$ に初期条件の情報が含まれるようになっており、それによって任意定数の値が決定されるようになっている。^{*2}

s に関する制限 : Laplace 変換の積分が存在するためには、 s は任意の複素数ではなく、ある制限が設けられる。片側 Laplace 変換の場合には $t \rightarrow \infty$ で被積分関数が 0 に収束するように選ばれる。

逆 Laplace 変換 : Laplace 変換の定義式 (B.3) で、 $s = \sigma + i\omega$ (ここで、 σ, ω は実数) とおくと、(B.3) は

$$\begin{aligned} f(\sigma + i\omega) &= \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma+i\omega)t} F(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} F(t) e^{-\sigma t} dt \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

である。したがって、 $f(\sigma + i\omega)$ は $F(t)e^{-\sigma t}$ の Fourier 変換とみなすことができる。逆 Fourier 変換により、 $F(t)e^{-\sigma t}$ は

$$F(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(\sigma + i\omega) d\omega$$

と表現できる。すなわち、

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+i\omega)t} f(\sigma + i\omega) d\omega \quad (\text{B.6})$$

となる。もしくは、

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} f(s) ds \quad (\text{B.7})$$

となる。(B.7) は逆 Laplace 変換の公式である。

^{*2} Fourier 変換の公式では変換される関数の独立変数を x と書いた。これは空間変数の x を意識して、もしくは変換される関数が場の量であることを意識して、そのように書いた。変換される関数が空間変数を独立変数にもつ場合には Fourier 変換後の関数は波数の関数となる。時系列データ、従って時刻 t の関数、を変換することも可能であり、その場合には変換される関数は t の関数として書かれる事が慣例である。この場合は Fourier 変換後の関数は周波数の関数となる。(B.2) 参照。

表 B.1 Laplace 変換の代表例

$F(t)$	$\mathcal{L}\{F(t)\}$
a	$\frac{a}{s}, \quad \text{Re}[s] > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad \text{Re}[s] > a$
$\sin at$	$\frac{1}{s^2 + a^2}, \quad \text{Re}[s] > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \text{Re}[s] > 0$
$t^n, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \text{Re}[s] > 0$
$f'(t)$	$s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$
$f''(t)$	$s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$

逆 Laplace 変換の計算には複素積分の知識が必要で、かなり面倒である。代表的な関数の Laplace 変換、逆 Laplace 変換の例が数学公式集に載っているの、実際にはそれを利用する機会が多い。

B.2 Laplace 変換の幾つかの例

Laplace 変換の代表例を Table B.1 にあげておく。

その他の Laplace 変換、Laplace 逆変換は数学公式集を参照するとよい。

B.3 Laplace 変換を用いた微分方程式の解法 ～例題～

Laplace 変換を用いて微分方程式 $f''(t) + f(t) = t$ を初期条件 $f(0) = 0, f'(0) = 2$ のもとに解く。^{*3}

与えられた微分方程式の両辺を Laplace 変換する：

$$\mathcal{L}\{f''(t) + f(t)\} = \mathcal{L}\{t\}. \quad (\text{B.8})$$

前節で与えた公式を参考にすると、

$$s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) + \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2}. \quad (\text{B.9})$$

^{*3} この問題は振動数 $\omega = 1$ の単振動の微分方程式に、時間に比例する外力項が加わった、強制振動問題の微分方程式である。通常の方法で解いて見て、Laplace 変換による解法と答えが一致することを確かめておくことを勧める。

従って,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2s^2 + 1}{s^2(s^2 + 1)} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2 + 1}. \quad (\text{B.10})$$

上式を逆 Laplace 変換する:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2 + 1} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

やはり前節で与えた公式より逆変換は,

$$f(t) = t + \sin t, \quad (\text{B.12})$$

となる.

Laplace 変換を用いて微分方程式を解く場合には, ここで述べた例のように公式集を参照して解くことが多い. また, 正変換に比べて逆変換は計算が複雑なので, 公式集を参照しない場合には, Laplace 変換された形の解 (上の例では (B.10)) で, 方程式がとけて解が与えられたと満足する場合が多い.

付録 C

熱力学の数学

熱力学は熱に関する現象を巨視的な少数個（基本的には 2 個）の物理量で記述するように構成した学問である。従って、考える対象の状態を表す物理量は 2 変数関数となり、その状態変化は偏微分で表現されることが多い。偏微分の計算には、常微分の計算のときとは違って少々注意が必要である。この章では

- i) 偏微分の計算における注意点
- ii) 偏微分の計算に便利な表記法とその使い方

について解説する。なお、この章の知識や方法は、熱力学のみならず流体力学（気象学）における座標変換の際にも極めて役に立つものである。^{*1}

C.1 状態方程式

温度 T 、圧力 p 、体積 V を結びつける関係式は状態方程式と呼ばれる。熱力学において最もよく知られた状態方程式は理想気体の状態方程式

$$pV = nRT \quad (\text{C.1})$$

である。ここで、 n はモル数、 R は気体定数である。理想気体は気体の密度が薄いときにはよい近似で成り立つといわれており、気象学でも大気を理想気体として扱う。理想気体以外にも van der Waals の状態方程式

$$(p + a)(V - b) = nRT \quad (\text{C.2})$$

^{*1} 気象学では、鉛直方向の座標系として、地面から計った幾何学的な高度を用いる以外に、気圧や温位（気圧の変化を考慮した温度であり、エントロピーと関係した量）を鉛直座標に用いることがしばしばある。このような座標系を用いるときには、幾何学的な座標から変数変換を行う。その際にこの章の知識が必要となる。

も知られている。これは実在の気体の状態をよく表す式として知られている。

より一般的には状態方程式は、その定義から、 p, V, T を変数とする任意関数 f が、以下のようにかけるとき、それを状態方程式と呼ぶ：

$$f(p, V, T) = 0. \quad (\text{C.3})$$

実際に (C.1), (C.2) は (C.3) の形にかける。

(C.3) は次の様な関係式を満足する：

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -1 \quad (\text{C.4})$$

(C.4) の証明 (C.3) の全微分は

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{V,T} dp + \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{T,p} dV + \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{p,V} dT = 0 \quad (\text{C.5})$$

である。ここで、 $dp = 0$ の状態を考える。このとき、(C.5) から dV/dT を作ると、これは $(\partial V/\partial T)_p$ と解釈できる。そこで、

$$\frac{dV}{dT} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{p,V}}{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{T,p}}$$

同様に、 $dV = 0$ の状態を考える。このとき、(C.5) から dT/dp を作ると、これは $(\partial T/\partial p)_V$ と解釈できる。また $dT = 0$ の状態を考える。このとき、(C.5) から dp/dV を作ると、これは $(\partial p/\partial V)_T$ と解釈できる。これらの量はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dp} &= \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{V,T}}{\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{p,V}}, \\ \frac{dp}{dV} &= \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{T,p}}{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{V,T}} \end{aligned}$$

以上より、(C.4) が証明できた。

(C.4) は合成関数の微分と対応付けると一見奇妙である。 g は x の関数とし、さらに x は t の関数であるとする。このとき g を t で微分するには

$$\frac{dg(x(t))}{dt} = \frac{dg(x)}{dx} \frac{dx(t)}{dt} \quad (\text{C.6})$$

となる。ここで、微分記号を分数のように扱うと、 dx があたかも約分され、右辺と左辺が等しいことは理にかなっているように見える。

しかしながら、 ∂^* を微分記号 d^* のように扱おうと、(C.4) の値は -1 でなく 1 になる。このことは、偏微分の場合には微分記号を分数のように扱ってはいけないことを表している。偏微分の計算をする場合には一定と置く変数に注意しなければいけない。この失敗は実は、一定に置く変数を無視して偏微分記号をあたかも分数のように扱ったために起こったのである。

C.2 Jacobian

この節では、偏微分の計算を容易にする表記について紹介する。 f, g を x, y を変数とする関数であるとする。このとき、Jacobian $J(f, g)$ を以下のように定義する：

$$J(f, g) \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_x - \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x. \quad (\text{C.7})$$

Jacobian $J(*, *)$ はしばしば $\partial(*, *)$ と書かれることもある。Jacobian の性質として重要なものは、skew symmetry と呼ばれるものである：

$$J(f, g) = -J(g, f). \quad (\text{C.8})$$

Jacobian $J(*, *)$ は分数のように取り扱えることが次の例からわかる。Jacobian を用いると、

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = \frac{J(p, T)}{J(V, T)} \quad (\text{C.9})$$

とかける。実際、 p は V, T の関数なので、

$$\begin{aligned} J(p, T) &= \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial T} \right)_V}_{=1} - \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_T}_{=0} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T, \\ J(V, T) &= \left(\frac{\partial V}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial T} \right)_V - \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_V \\ &= 1. \end{aligned}$$

同様に、

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_V = \frac{J(T, V)}{J(p, V)}, \quad (\text{C.10})$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{J(V, p)}{J(T, p)}. \quad (\text{C.11})$$

(C.9)~(C.11) と skew symmetry より

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p &= \frac{J(p, T)}{J(V, T)} \times \frac{J(T, V)}{J(p, V)} \times \frac{J(V, p)}{J(T, p)} \\
 &= (-1) \frac{J(p, T)}{J(T, V)} \times (-1) \frac{J(T, V)}{J(V, p)} \times (-1) \frac{J(V, p)}{J(p, T)} \\
 &= -1 \times \frac{J(p, T)}{J(T, V)} \times \frac{J(T, V)}{J(V, p)} \times \frac{J(V, p)}{J(p, T)}. \quad (\text{C.12})
 \end{aligned}$$

ここで, Jacobian $J(*, *)$ は約分されて, (C.4) に帰着される.