第 1 章

常微分方程式の解法の復習

1.1　はじめに

物理学や惑星学においては, 以下のような形をした方程式が頻繁に登場する：

$$A\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+B\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+Cx=0. \tag{1.1}$$

ここで, t は独立変数, x は t の未知関数で従属変数, A, B, C は定数である.

例 1：　放射性同位元素（例えば炭素 ^{14}C）は一定の比率（単位時間当たり α の比率）で崩壊して安定な原子になる．時刻 t における放射性同位元素の原子の数 N は次の方程式に従う:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-\alpha N. \tag{1.2}$$

例 2：　質量 m の質点がバネ定数 k の線形バネ[*1]につながれている場合, 質点の平衡位置からの変位 x が従う運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+kx=0 \tag{1.3}$$

である.

例 3：　一様な重力場中で長さ l の伸びない紐の端に 質量 m のおもりがつるされているとする．この振り子（おもり）の平衡点からの振れ角 θ が従う運動方程式は

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+mg\sin\theta=0 \tag{1.4}$$

である．ここで, g は重力加速度である．なお, 振れ角 θ が小さい場合には (1.4) は

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+mg\theta=0 \tag{1.5}$$

[*1] バネの復元力が, バネの伸びに比例するバネのこと.

と近似される.

例 4：　例 2 の系で速度に比例する抵抗が質点に働いている場合には, 質点の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+m\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0 \tag{1.6}$$

となる. ここで, $\gamma>0$ である.

このように,（紹介したのはほんの数例であるが様々な状況で (1.1) の形で書ける微分方程式に従う系がある.

1.2　言葉の定義（その１）

(1.1) のように微分を含んだ方程式を**微分方程式**という. 独立変数が 1 個の場合は特に**常微分方程式**と呼ばれる.

微分方程式に含まれる微分の最高階数をもってその微分方程式の**階数**という. (1.1) は $A=0$ のとき, 1 階の常微分方程式である. $A\neq 0$ の場合は (1.1) は 2 階の常微分方程式である.

定数を $c_1, c_2, \ldots, c_n$ で表し, これらは任意の値を取るものとする. このような定数を**任意定数**と呼ぶ. 微分方程式を満たす解が任意定数を含む形で表現されるとき, そのような解を**一般解**という. 一般解に含まれる定数に特定の値を代入して得られる解を**特殊解**という. 微分方程式の一般解や特殊解を求めることを**微分方程式を解く**という.

1.3　変数分離法による 1 階の常微分方程式の解法

(1.1) で $A=0$ とした場合を含む次のような 1 階の常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,t) \tag{1.7}$$

を考える. $f(x,t)$ は x, t の既知の関数である. 特に, $f(x,t)$ が

$$f(x,t)=F(x)G(t) \tag{1.8}$$

と x のみの関数 $F(x)$ と t のみの関数 $G(t)$ の積としてかける場合, すなわち

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(x)G(t) \tag{1.9}$$

と書ける場合を考える. このとき (1.9) は次のように変形できる:

$$\frac{\mathrm{d}x}{F(x)}=G(t)\mathrm{d}t. \tag{1.10}$$

(1.10) の両辺を不定積分することにより微分方程式 (1.9) の一般解を得ることができる:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{F(x)} = \int G(t)\mathrm{d}t. \tag{1.11}$$

■**補足**　一般に, 1 階の微分方程式は形式的に 1 回不定積分すれば一般解が求まるので, 1 階の微分方程式の一般解には不定積分に伴う任意定数が一つ含まれる. (1.11) では左辺の積分で 1 個, 右辺の積分で 1 個出てくるが, これをひとまとめにして一つの任意定数にできる.

1.4　言葉の定義（その 2）

一般に, 未知関数と未知関数の全ての微分について 0 次もしくは 1 次の微分方程式は**線形微分方程式**といわれる. (1.1) における未知関数及びその全ての微分は, x, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ であり, 全て 1 次である. そこで, (1.1) は**線形常微分方程式**である.

線形という言葉についてもう少し説明しておく.

1.4.1　線形関数

ある関数 $f(t)$ が以下の様な性質を満足する場合, $f(t)$ を**線形関数**と呼ぶ:

$$f(t_1 + t_2) = f(t_1) + f(t_2), \tag{1.12}$$
$$f(at) = af(t). \tag{1.13}$$

ここで, a は定数である. もし $f(t)$ が上記の性質を満足しないならば, $f(t)$ は**非線形関数**であるという.

1.4.2　線形演算子

上記の線形・非線形という概念は, 関数のみならず, **微分演算子**についても定義できる. 独立変数を t とする微分演算子を $\mathcal{D}_t$ と表す. $\mathcal{D}_t$ は $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ の多項式や関数である.[*2] $\mathcal{D}_t$ が

[*2] 例えば,

$$\mathcal{D}_t = \sum_{m=1}^{N} a_m \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^m$$

や

$$\mathcal{D}_t = e^{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$$

など.

以下の性質を満足するならば, $\mathcal{D}_t$ を**線形微分演算子**とよぶ:

$$\mathcal{D}_t\,[f_1+f_2]=\mathcal{D}_t[f_1]+\mathcal{D}_t[f_2], \tag{1.14}$$
$$\mathcal{D}_t\,[af]=a\mathcal{D}_t[f]. \tag{1.15}$$

ここで, f_1, f_2 は共に t の関数である. 線形演算子を以下では $\mathcal{L}_t$ で表すことにする.

例えば, (1.1) の左辺第一項, および第二項に現れた微分演算子 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$ や $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ はともに上記 (1.14), (1.15) の性質を満足する.

一般に一変数の微分方程式は演算子 $\mathcal{D}_t$ を使って,

$$\mathcal{D}_t\,[x]=X(t) \tag{1.16}$$

の形に表現できる. ここで $X(t)$ は t の既知関数である. 例えば, (1.1) は

$$\mathcal{D}_t= A\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+C\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}t^0}, \tag{1.17}$$
$$X(t)= 0 \tag{1.18}$$

となる (1.16) である. ここで, (1.17) は線形演算子であり, (1.16) は $\mathcal{L}_t[x]=0$ と書ける.

1.4.3　線形微分方程式

演算子 $\mathcal{L}_t$ を使って,

$$\mathcal{L}_t[x]=0$$

と表される微分方程式は次のような 2 つの性質を満足することがわかる :

i) 微分方程式の独立な 2 つの解 x_1, x_2[*3]があったとき, x_1+x_2 も元の微分方程式の解になっている. 実際に

$$\mathcal{L}_t[x_1+x_2]=\mathcal{L}_t[x_1]+\mathcal{L}_t[x_2]=0+0=0.$$

ii) 微分方程式の解 x を任意定数倍したもの, 即ち ax, も元の微分方程式の解になっている. ここで a は任意定数である. 実際に

$$\mathcal{L}_t[ax]=a\mathcal{L}_t[x]=a\times 0=0.$$

上記の 2 つの性質 i), ii), を満足する微分方程式を**線形微分方程式**と呼ぶ. もしくは, 上記の i), ii) の性質をひとつにまとめて,

[*3] つまり $x_1\neq x_2$ となる x_1, x_2 が $\mathcal{L}_t[x_1]=0$, $\mathcal{L}_t[x_2]=0$ を満たす.

> “微分方程式 $\mathcal{D}_t[x]=0$ の独立な 2 つの解 x_1, x_2 があったとき, 任意定数を c_1, c_2 として $c_1x_1+c_2x_2$ も元の微分方程式の解となっているとき, その微分方程式は**線形微分方程式**と呼ばれる”

と言える.

1.4.4 重ね合わせの原理

一般に, 微分方程式の独立な解が複数個 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が見つかったとき, それらをおのおの定数倍して足し合わせる操作

$$c_1x_1+c_2x_2+\ldots c_nx_n \tag{1.19}$$

を解を**重ね合わせる**という.[*4] 重ね合わせた解も元の微分方程式を満足するとき, **重ね合わせの原理**が成り立つという. したがって, 線形微分方程式は重ね合わせの原理が成り立つ微分方程式である.

以下で見るように線形常微分方程式のこの性質は**一般解**を構成するときに必要な知識である.

1.5 定数係数の 2 階線形常微分方程式の解法 (1)

ここでは, (1.1) の解法として, 代表的なものを紹介する. 特に, “**推定法**”と呼ばれるもの取り上げることにする. [*5]

[*4] 線形結合ともいう.

[*5] 2000 年度から本講義を担当してきたが, 2007 年度の前期にある人からの指摘を受けて, “推定法”という言い方は一般的ではないことに気づいた. 私は大学 1 年生の物理数学の講義でここで紹介する“推定法”という方法を呼び名も含めて習った. 講義を担当していた先生は, 原子核物理学の理論を専門とする先生で, 講義のうまさには定評があった. その先生がいい加減なことを教えていたとは思えない. しかしながら, 指摘されて改めて調べてみると, 本講義で紹介する方法を“推定法”と呼んでいる物理数学の本が見当たらないのである. ためしに Google でネット検索してみても, ““推定法”, 微分方程式”のキーワード検索で上位にかかるものは別の推定法である. (因みに, 私の講義ノートが結構上位でヒットする.) ただし, ネット検索していて気づいたのであるが, (2007 年の時点で) 東海大学理学部物理学科 (私の出身大学) のシラバスには微分方程式の解法として, “推定法”の名前が挙げられていた. 私が東海大学で物理数学を習ったのは 20 年以上前であり, それを教えていた先生は今は既に退職している. しかしながら, “推定法”の名前はいまだに東海大学に残っているのである. 以上の様なわけで, “推定法”という呼び名は, 注意して使って欲しい. ただし, 以下に解説するようにこの言葉はよく手法を反映していることは理解してくれるだろう.

(1.1) を $A \neq 0$ で割り, (1.1) を改めて

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + A\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + Bx = 0. \tag{1.20}$$

と書く. (1.20) の解を

$$x = e^{\lambda t}, \tag{1.21}$$

と推定する. (1.21) を (1.20) に代入して整理すると,

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0 \tag{1.22}$$

という λ に関する代数方程式が得られる.*6 (1.22) は (1.20) の**特性方程式**と呼ばれる. (1.21) のように微分方程式の解を推定すると, 微分方程式は代数方程式に帰着される.

特性方程式 (1.22) の解は一般に 2 個ある. なぜならば, 2 次方程式の解は一般に 2 個であるからである.*7 その解を λ_1, $\lambda_2, (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ とする:

$$\lambda_1 = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2}. \tag{1.23}$$

そこで, (1.23) の結果と (1.21) を考慮すると, 微分方程式の解は

$$x_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = e^{\lambda_2 t} \tag{1.24}$$

の二つとなる. しかしながら, 前節で述べたように, x_1, x_2 がともに線形微分方程式の独立な解であるので, 重ね合わせの原理により

$$\begin{aligned} x &= c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \tag{1.25}$$

も微分方程式の解となる. (1.23) を持つ (1.25) が (1.20) の一般解である.

■補足 1　2 階の微分方程式は, 形式的には 2 回の不定積分を実行することにより解が求まる. 1 回不定積分を実行すると積分定数である任意定数が一つ現れる. そこで, 2 階の微分方程式の一般解には, 形式的な 2 回の不定積分により, 積分定数である任意定数が 2 個現れることになる. (1.25) は任意定数 c_1, c_2 を含んでいるので, (1.25) が微分方程式 (1.20) の一般解として充分であることが理解されるであろう.

---

*6 (1.21) を (1.20) に代入すると $(\lambda^2 + A\lambda + B)e^{\lambda t} = 0$ が得られる. ただし, $e^{\lambda t} = 0$ となる解は $x = 0$ という自明な解である. 非自明な解は (1.22) を満たすが, そのような解には興味がないのでここでは非自明な解 $x \neq 0$ を求める.

*7 特性方程式が重解を持つ場合については次節で扱う.

■**補足 2**　任意定数を決定して特殊解を導出するには, ある特定の t の値における, x や $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ の値が必要である. 時間発展問題では, このような条件はいわゆる初期条件, $t=0$ における x や $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ の値, として与えられる.

1.6　定数係数の 2 階線形常微分方程式の解法 (2)

前節で $x=Ce^{\lambda t}$ と与えられた微分方程式の解を推定し, それを微分方程式に代入して微分方程式の特性方程式を作り, それを解くことによって λ を求め, 解きたいの微分方程式の一般解を構成する方法を説明した.*8 しかし, 前節の方法が適用できない場合もある. 特性方程式の解が重解になる場合 (特性方程式の解が一つ（それを λ_1 とする）しか求まらない場合) がそのような場合である. このときには解の推定 $x=Ce^{\lambda t}$ が（一部）誤りであると判断し, 改めて解を $x=C(t)e^{\lambda_1 t}$ と推定する. つまり, C を定数ではなく, t に依存した関数と考えるのである. このような方法は**係数変化法**と呼ばれる. このようにすると, C に関する微分方程式が得られるので, 改めてこれを解いて推定した解の形 $x=C(t)e^{\lambda_1 t}$ に代入すればよい. なお, 係数変化法を用いる場合でも, 解が $e^{\lambda t}$ に比例するという先に紹介した“推定法”が基本になっていることに注意してほしい.

例:　微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+4x=0 \tag{1.26}$$

を解く. この微分方程式の解を $x=Ce^{\lambda t}$ と推定する. ここで, C は任意定数である. (1.26) の特性方程式は,

$$\lambda^2+4\lambda+4=0 \tag{1.27}$$

となり, この解は $\lambda=-2$ の重解となる. そこで,

$$x=C(t)e^{-2t} \tag{1.28}$$

と改めて推定し, (1.26) に代入する. その結果,

$$\frac{\mathrm{d}^2C}{\mathrm{d}t^2}=0 \tag{1.29}$$

が得られる. (1.29) の一般解は $C=c_1t+c_2$ である. ここで, c_1, c_2 は任意定数である. したがって, 微分方程式 (1.26) の一般解は

$$x=(c_1t+c_2)\,e^{-2t} \tag{1.30}$$

*8 前節では $x=e^{\lambda t}$ という形の推定をしたが, これを任意定数 C 倍したものもまったく同じ特性方程式を満足する. したがって, 前節の解の推定は一般には, $x=Ce^{\lambda t}$ としたものとも解釈できる.

となる．（注 : (1.30) には任意定数が 2 個含まれている．つまり, 2 階の微分方程式の一般解として充分である．）

1.7　非斉次型の微分方程式の解法

物理学・惑星学においては, (1.20) の右辺に既知の関数（いわゆる外力項）を含むような形の微分方程式も頻繁に登場する：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + A\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + Bx = f(t). \tag{1.31}$$

ここで, A, B は定数である．

例 1 :　質量 m の質点がバネ定数 k の線形バネにつながれており, さらに速度に比例する抵抗と周期的な外力 $A\sin\omega_0 t$ が質点に働いている場合, 質点の平衡位置からのずれ x が従う運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + m\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = A\sin\omega t, \tag{1.32}$$

となる．ここで, $\gamma > 0$ である．

例 2 :　インダクタンス L のコイル, 抵抗値 R の 抵抗, 容量 C を持ったコンデンサを直列に接続した回路に起電力 $E(t)$ を加える．この回路の方程式は次のような微分方程式に従う：

$$L\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = E(t). \tag{1.33}$$

ここで, Q はコンデンサに蓄積される電荷であり, 回路を流れる電流 I とは $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ の関係がある．

一般に (1.16) のような微分方程式で, 右辺の $X(t)$ がゼロであるような方程式, すなわち前節までに扱ってきたものを**斉次**[*9]微分方程式と呼び, 右辺が 0 でない場合を**非斉次**微分方程式とよぶ. 斉次微分方程式が線形であれば, 非斉次微分方程式の解は, 以下のように簡単に構成できる.

非斉次微分方程式 (1.31) の解は, 斉次微分方程式 (1.20) の一般解 x_g と, (1.31) を満足する解のうちの**一つ** (これは**特殊解**と呼ばれている) x_p の和として表現できる．即ち,

[*9] 「せいじ」と読む．「さいじ」ではないので注意．もしくは同次ともいう．英語では homogeneous という語である．

$x = x_{\rm g} + x_{\rm p}$ である．実際に斉次微分方程式の線形性から $x_{\rm g}$, $x_{\rm p}$ がそれぞれ

$$\mathcal{L}_t[x_{\rm g}] = 0.$$
$$\mathcal{L}_t[x_{\rm p}] = X(t)$$

であれば, $x = x_{\rm g} + x_{\rm p}$ は

$$\mathcal{L}_t[x_{\rm g} + x_{\rm p}] = \mathcal{L}_t[x_{\rm g}] + \mathcal{L}_t[x_{\rm p}] = 0 + X(t) = X(t).$$

すなわち, 非斉次微分方程式の解になっている．

■補足　特殊解が複数個見つかったときでも, そのうちの任意の 1 個のみを一般解 $x_{\rm g}$ に加えておけば (1.31) の解としては充分である．どの特殊解を選択するか, という自由度は一般解 $x_{\rm g}$ に含まれている任意定数で調整されるからである．初期条件を考慮すればどの特殊解を選んでも最終的な解は唯一に決まる．特殊解を求める方法は, 非斉次項 $X(t)$ がある特定の形を持つ場合, 常套手段が知られている．例えば, $X(t)$ が n 次の多項式の場合に特殊解を n 次の多項式で推定する: $x_{\rm p} = \sum_{m=1}^{n} a_m t^m$．$X(t)$ が e^{pt} の場合には $x_{\rm p} = Ce^{pt}$ と, $X(t) = \cos pt$ または $X(t) = \sin pt$ といった場合には, 解を $x_{\rm p} = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt$ と推定して代入することにより, a_m, C, C_1, C_2 を決める．また例 5 で説明する微分方程式では係数変化法によって $x_{\rm p}$ を求める．

例 3　以下の様な微分方程式を考える：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = A \sin \omega t. \tag{1.34}$$

これは, 例 1 において質点に抵抗が働かない場合の方程式である．なお, $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ とし, $\omega_0 \neq \omega$ とする．

微分方程式 (1.34) の斉次方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1.35}$$

の一般解は, $x_{\rm g} = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t$ である[*10]．特殊解は, 解を $x_{\rm p} = f \sin \omega t$ と推定し, これをもとの方程式 (1.34) に代入して係数 f を定めればよい．実際に代入すると

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_{\rm p}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x_{\rm p} = -\omega^2 f \sin \omega t + \omega_0^2 f \sin \omega t = A \sin \omega t.$$

従って $f = A/(\omega_0^2 - \omega^2)$ を得る．よって, (1.34) の一般解は

$$x = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t \tag{1.36}$$

[*10] $x = c_1 \exp[i\omega_0 t] + c_2 \exp[-i\omega_0 t]$ と表現してもよい．

である. [*11]

例 4　次に例 1 で与えられた微分方程式を考える:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\gamma_0\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=A\sin\omega t. \tag{1.37}$$

ここで, $\gamma_0\equiv\gamma/m$, $\omega_0\equiv\sqrt{k/m}$ とし, $\omega_0\neq\omega$ とする.

微分方程式 (1.37) の斉次方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x_\mathrm{g}}{\mathrm{d}t^2}+\gamma_0\frac{\mathrm{d}x_\mathrm{g}}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x_\mathrm{g}=0 \tag{1.38}$$

の一般解は, $x_\mathrm{g}=c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t}$ である. ここで λ_1, λ_2 は特性方程式 $\lambda^2+\gamma_0\lambda+\omega_0^2=0$ の 2 つの解である. ここでは改めてこの特性方程式は解かない. 特殊解の求め方だけを解説する. 特殊解は, 解を $x_\mathrm{p}=f_1\sin\omega t+f_2\cos\omega t$ と推定し, これをもとの方程式 (1.37) に代入して係数 f_1, f_2 を定める. 推定した特殊解を元の微分方程式に代入すると

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2x_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t^2}+\gamma_0\frac{\mathrm{d}x_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x_\mathrm{p}\\
&=-\omega^2f_1\sin\omega t-\omega^2f_2\cos\omega t\\
&\quad+\gamma_0(\omega f_1\cos\omega t-\omega f_2\sin\omega t)\\
&\qquad+\omega_0^2(f_1\sin\omega t+f_2\cos\omega t)\\
&=(-\omega^2f_1-\omega\gamma_0f_2+\omega_0^2f_1)\sin\omega t+(-\omega^2f_2+\omega\gamma_0f_1+\omega_0^2f_2)\cos\omega t\\
&=A\sin\omega t.
\end{aligned}$$

従って f_1, f_2 は

$$\begin{pmatrix}\omega_0^2-\omega^2 & -\omega\gamma_0\\ \omega\gamma_0 & \omega_0^2-\omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\\ 0\end{pmatrix} \tag{1.39}$$

を満足する. (1.39) の解は,

$$\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}=\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma_0^2}\begin{pmatrix}(\omega_0^2-\omega^2)A\\ -\omega\gamma_0A\end{pmatrix}$$

なので, (1.37) の一般解は

$$x=c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t}+\frac{A}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma_0^2}\left\{(\omega_0^2-\omega^2)\sin\omega t-\omega\gamma_0\cos\omega t\right\} \tag{1.40}$$

である. ここで c_1, c_2 は任意定数である.

[*11] 特殊解を $x_\mathrm{p}=f_1\sin\omega t+f_2\cos\omega t$ と推定してもよいが, 経験をつむとこれは冗長な解の推定であることがわかる.

例 5:　最後に共鳴を起こす型の微分方程式を取り扱う．これは, (1.34) で, 外力の振動数 ω と, バネの固有振動数 ω_0 が等しい場合である．(1.34) の一般解で, $\omega = \omega_0$ とおくと x_{p} は発散する．そこで, 先の特殊解 x_{p} の推定は破綻している．物理的にはこのような場合には, 振動の振幅が時間ともに増大していく（つまり共鳴が起きている）．そこで, x_{p} として, ω_0 で振動し振幅が時間に比例する

$$x_{\mathrm{p}} = f_1 t \sin\omega_0 t + f_2 t \cos\omega_0 t \tag{1.41}$$

と推定してみよう．これを (1.34) の式に代入すると,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 x_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x_{\mathrm{p}} &= 2\omega_0(f_1\cos\omega_0 t - f_2 \sin\omega_0 t) - \omega_0^2(f_1 t\sin\omega_0 t + f_2 t\cos\omega_0 t)\\ &\quad + \omega_0^2(f_1 t\sin\omega_0 t + f_2 t\cos\omega_0 t)\\ &= A\sin\omega_0 t.\end{aligned}$$

したがって, $f_1 = 0$, $f_2 = -A/(2\omega_0)$. つまり特殊解は

$$x_{\mathrm{p}} = -\frac{At}{2\omega_0}\cos\omega_0 t \tag{1.42}$$

となる．したがって, (1.34) で $\omega = \omega_0$ の場合の一般解は

$$x = c_1\sin\omega_0 t + c_2\cos\omega_0 t - \frac{At}{2\omega_0}\cos\omega_0 t \tag{1.43}$$

となる．ここで, c_1, c_2 は任意定数である．

■補足　: (1.41) では振幅を時間 t に比例すると推定して特殊解を求めた．いわゆる係数変化法を用いて特殊解を推定したときには, どのような計算になるのかここで示しておく．特殊解は 1 個見つければいいという指針を積極的に使うことになる．特殊解を

$$x_{\mathrm{p}} = f(t)\sin\omega_0 t + g(t)\cos\omega_0 t \tag{1.44}$$

と推定する．これを元の微分方程式に代入する:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 x_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0 x_{\mathrm{p}} &= \left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} - 2\omega_0\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right)\sin\omega_0 t + \left(\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} + 2\omega_0\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)\cos\omega_0 t\\ &= A\sin\omega_0 t.\end{aligned} \tag{1.45}$$

したがって

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} - 2\omega_0\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = A, \tag{1.46a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} + 2\omega_0\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{1.46b}$$

が得られる．(1.46b) を (1.46a) に代入して f を消去すると,

$$\frac{\mathrm{d}^3 g}{\mathrm{d}t^3} + 4\omega_0^2 \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = -2\omega_0 A \tag{1.47}$$

となる．上式を t で積分すると

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} + 4\omega_0^2 g = -2\omega_0 At + C \tag{1.48}$$

を得る．ここで C は任意定数である．この任意定数は $C = 0$ と選んでよい．なぜなら, 特殊解としては与式を満たすものを一つ見つければよいからである．したがって, (1.48) は

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} + 4\omega_0^2 g = -2\omega_0 At \tag{1.49}$$

となる．g の満たす方程式が再び非斉次微分方程式となった．この方程式の解は非斉次項が t の多項式なので,

$$g = at + b \tag{1.50}$$

と推定する．この時,

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} + 4\omega_0^2 g = 4\omega_0^2 at + 4\omega_0^2 b = -2\omega_0 At, \\
\therefore \quad &4\omega_0^2 a = -2\omega_0 A, && (1.51) \\
&4\omega_0^2 b = 0, && (1.52)
\end{aligned}$$

となる．以上より,

$$a = -\frac{A}{2\omega_0},\ b = 0$$

が得られ, 最終的に求めるべき係数 g は

$$g = -\frac{A}{2\omega_0} t \tag{1.53}$$

である．(1.53) を (1.46b) に代入すると $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t = 0$ となり, $f = D$, ここで D は任意定数であるがこれは再び 0 としてよい．以上より特殊解として

$$x_\mathrm{p} = -\frac{A}{2\omega_0} t \cos\omega_0 t \tag{1.54}$$

が再び得られた．

ひとりごと　：初等的な物理数学の有名な教科書に, 非斉次型の微分方程式の解をロンスキー行列というものを使って表現する公式が書かれている. この公式を使って非斉次型の微分方程式を解くことよりも, 上で解説した“推定法”による解法を強く勧める. その理由は,

i) この公式を使った解法は膨大な計算が必要となる. 特に積分を複数回実行しなければいけない. それに比べれば, “推定法”による解法は計算量が格段に少なく, 積分の必要はなく微分だけで解が求まるため容易である. 積分よりも微分のほうが圧倒的に計算は簡単である！

ii) この公式が成り立つにはある条件が必要である. 公式の適用範囲を与えられた微分方程式が満足しているかをきちんと吟味しなければいけない. 公式の適用範囲と共に公式を記憶しておくことは, この公式が複雑な形をしているため（記憶力の落ちた私にとっては）難しい.

iii) 私が今までお目にかかった非斉次型の微分方程式で, “推定法”で解けなかったものはない. 逆にロンスキー行列を使った公式にお世話になったことはない！

それでも貴方はロンスキー行列を使って非斉次型の微分方程式を解きますか？

1.8　最後に...

“推定法”が成功するためには, 与えられた微分方程式を眺めてどのような解が存在するのかをうまく推定してやらなければいけない. よい推定をしないと解は求まらない. それでは, よい推定をするにはどうしたらいいのであろうか？それはいたって簡単で,

> よい推定を行うには微分方程式を山ほど（もしくは星の数ほど）解いて**知識**と**経験**と**勘**を養うことである.

本稿で紹介した常微分方程式以外にも物理学・惑星学で頻繁に登場するタイプの微分方程式があり, これらについては各自で微分方程式や物理数学の教科書を参照して勉強してほしい. 1.10 節以降のそのようなもののいくつかを挙げておいた.

1.9　演習問題

1.9.1　Euler の関係式

Euler の関係式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta \tag{1.55}$$

は極めて便利な公式である．以下の演習問題でその便利さを体験しよう．

i) 以下の公式を Euler の関係式を用いて証明しなさい．
   a) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$
   b) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha$
   c) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
   d) $\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$ を証明しなさい．ここで, n は自然数とする．(de Moivre の公式)

ii) $\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ を証明しなさい．

iii) 以下の積分を計算しなさい．
   a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-z}\sin z\,\mathrm{d}z$
   b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-z}\cos z\,\mathrm{d}z$

1.9.2　微分方程式の性質について

i) 以下の微分方程式は線形の微分方程式かそれとも非線形の微分方程式か答えなさい．
   a) 質量 m の質点がバネ定数 k の線形バネにつながれている場合，質点の平衡位置からの変位 x が従う運動方程式:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0.$$

   b) 重力場中で長さ l の伸びない紐の端に 質量 m のおもりがつるされているとする．この振り子（重り）の平衡点からの振れ角 θ が従う運動方程式:

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + mg\sin\theta = 0. \tag{1.56}$$

   ここで，g は重力加速度である．

c) 方程式 (1.56) で振れ角 θ が小さい場合:

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + mg\theta = 0.$$

d) 同じバネ定数 κ を持った 3 つの線形バネにつながれた 2 つの質点の運動方程式（連成振動の方程式）:

$$\begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_1 = \kappa\left(x_2 - 2x_1\right), \\ m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_2 = \kappa\left(x_1 - 2x_2\right). \end{cases}$$

ここで, κ は正の定数である．x_1, x_2 は 2 つの質点の平衡位置からの変位である (図 1.1 参照).

e) 真空中の Maxwell 方程式:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \\ c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \end{cases}$$

ここで, c は光速である.

ii) 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

が

$$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

の解を持つことを示しなさい．ここで, A, B は任意定数である．またこの解が以下の形に書けることを示しなさい：

$$\begin{aligned} x &= C\cos(\omega t + \alpha), \\ &= D\sin(\omega t + \beta), \end{aligned}$$

さらに, C, D, α, β を A, B で表現しなさい.

補足：　C, D は振幅，α, β は位相と呼ばれる.

1.9.3　1 階の微分方程式の問題

次の 1 階の微分方程式を解きなさい.

i)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x.$$

ii)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy.$$

iii)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{2x + xy^2}{2y + x^2 y}.$$

1.9.4　定数係数を持った 2 階の線形常微分方程式の問題

以下の微分方程式の一般解を求めなさい.

i)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0.$$

ii)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - 4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 5x = 0.$$

iii)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 5x = 0.$$

iv)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 10\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 25x = 0.$$

v)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 4x = 0.$$

vi)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - 4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 5x = t^2 + 2e^{3t}.$$

vii)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 10\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 25x = 20\cos 2t.$$

viii)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = f_0 \cos\omega t.$$

ここで，ω, f_0 は実数の定数であるとする.

ix) 次の微分方程式を，以下の 2 つの方法で解きなさい:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega x = 0.$$

ここで，ω は実数の定数であるとする.

a) 定数係数を持った 2 階の線形常微分方程式と同様に “推定法” を用いて解きなさい.

b) 変数分離法を用いて解きなさい.

x) 次の微分方程式を，前設問の解を参考にして，係数変化法を用いて解きなさい:*12

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega x = f(t).$$

ここで，ω は実数の定数, $f(t)$ は t の既知関数とする.

1.9.5 発展問題

i) 次の連立微分方程式は, 大気の下層や海洋の表層の流れを記述する方程式で Ekman 方程式と呼ばれるものである:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} - v = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2} + u = U_\infty.$$

ここで, U_∞ は定数である.

a) 上記の連立微分方程式の一般解を求めなさい.

ヒント：u もしくは v のみの 4 階の微分方程式に書き直して, “推定法” で解

*12 解は $f(t)$ の積分を含む形で与えられる. $f(t)$ が陽に与えられていないので，その積分は実行できない. したがってここで得られる解は形式解である.

く．もしくは, 第 1 式と, 第 2 式に純虚数 i を掛けたものとを足し, $\hat{u} \equiv u + iv$ に関する 2 階の微分方程式に書き直して “推定法” で解く．なお, 1.9.1 節で証明した $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$ を用いなさい．

b) $z \to \infty$ で $u \to U_\infty$, $v \to 0$, $z = 0$ で $u = 0, v = 0$ という境界条件を満足する解を求めなさい．(各 z に対して u, v をプロットすると螺旋を描く．この螺旋は Ekman 螺旋と呼ばれる.)

*余力があれば自習しておくといい話題

1.10　*定数係数の 2 階線形連立常微分方程式

図 1.1 のようにバネ定数 κ_1, κ_2, κ_3 を持った 3 つの線形バネにつながれた 2 つの質点の運動方程式は,

$$\begin{cases} m_1 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x_1 = -\kappa_1 x_1 + \kappa_3 \left(x_2 - x_1\right), \\ m_2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x_2 = -\kappa_2 x_2 - \kappa_3 \left(x_2 - x_1\right), \end{cases} \tag{1.57}$$

の形の定数係数 2 階線形**連立**常微分方程式で書ける．このような方程式を解いてみよう．

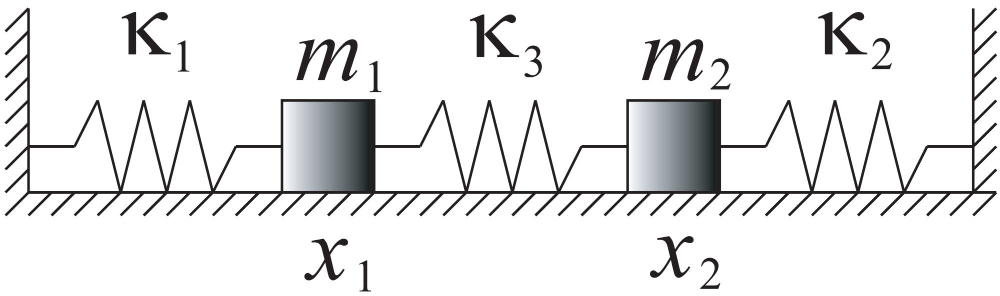

図 1.1　線形バネにつながれた質点．x_1, x_2 は平衡の位置からの変位とする．

簡単のために 質点の質量とバネ定数は全て等しいとする．即ち, $m \equiv m_1 = m_2$, $\kappa \equiv \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3$.

解法 1:　変数変換を行うことにより, 独立な 2 つの微分方程式に書き直す．$X \equiv x_1 + x_2$, $Y = x_1 - x_2$ として, X, Y に関する方程式に書き直す．X, Y に関する方程式はそれぞれ X, Y のみを含む定数係数 2 階線形常微分方程式になるので, それを "推定法" を使って解く．(X は 2 つ質点の重心の位置を表し, Y は相対位置を表す.)

解法 2: (1.57) は今の状況設定のもとでは, 次のように行列を用いて書き下すことができる:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -2\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2. \end{pmatrix} \tag{1.58}$$

ここで, $\omega^2 \equiv \frac{\kappa}{m}$ である. これを "推定法" と行列の知識を使って解いてみる.

先ず, この方程式の解を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{1.59}$$

と推定し, (1.58) に代入する. ここで c_1, c_2 は定数とする. このとき, (1.58) は

$$\begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -2\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2. \end{pmatrix} = \lambda^2\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{1.60}$$

となる. これは, λ^2 を固有値とする行列

$$\mathsf{M} = \begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -2\omega^2 \end{pmatrix} \tag{1.61}$$

の固有値問題になっている. (1.61) の固有値は, $\lambda^2 = -3\omega^2$, $-\omega^2$ と求められる. さらに, 固有値 $\lambda^2 = -3\omega^2$ に属する固有ベクトルは, $c_1 = -c_2$, 固有値 $\lambda^2 = -\omega^2$ に属する固有ベクトルは, $c_1 = c_2$ である. そこで, 微分方程式の解はこれら求められたものを重ね合わせて,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{i\omega t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-i\omega t} + D_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{i\sqrt{3}\omega t} + D_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-i\sqrt{3}\omega t} \tag{1.62}$$

となる. ここで, C_1, C_2, D_1, D_2 は任意定数である.

1.10.1 演習問題

i) $m_1 = m_2$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3$ のとき, (1.57) を上で説明した解法 1 の方法で説き, 解が (1.62) であることを確かめなさい.

ii) $m_1 = m_2$, $\kappa_1 = \kappa_2$ のとき, (1.57) を上で説明した解法 2 の方法で説きなさい.

1.11 *Sturm–Liouville 型の微分方程式

1.11.1 はじめに

物理学・惑星学で登場する微分方程式は，次のような形式のものが多い：

$$\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)+q(x)\right\}y(x)=\lambda r(x)y(x). \tag{1.63}$$

ここで，λ は未定の定数で，$p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ は既知の x の関数である．方程式 (1.63) は Sturm–Liouville 型の微分方程式と呼ばれ，p, q, r を適当に選ぶと著名な種々の微分方程式になる．

例１： 三角関数や双曲線関数[*13]が解となる

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y=\lambda y \tag{1.64}$$

は (1.63) において，$p=1$, $q=0$, $r=1$ の場合である．$\lambda<0$ のとき三角関数が，$\lambda>0$ のとき双曲線関数が解となる．

例２： Hermite の微分方程式，

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y-2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y+2ny=0, \tag{1.65}$$

は (1.63) において $p=\exp(-x^2)$, $q=0$, $r=\exp(-x^2)$, $\lambda=-2n$ の場合である．ここで，n は 0 または正の整数である．この方程式の解は多項式で与えられ，Hermite 多項式と呼ばれ，通常 $H_n(x)$ と表される．地球の大気・海洋中には様々な種類の波動が存在し，赤道付近に捕捉された波動（赤道波と呼ばれる）の従う方程式は (1.65) の形に変形することができる．(量子力学を習うと，調和振動子の Schrödinger 方程式を解く際に (1.65) が登場する．)

例３： Bessel の微分方程式，

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y+(x^2-n^2)y=0, \tag{1.66}$$

は (1.63) で $p=x$, $q=x$, $r=1/x$, $\lambda=n^2$ の場合である．ここで，n は 0 または正の定数である．この方程式の解は Bessel 関数と呼ばれ，$J_n(x)$ と表される．Bessel 関数は円筒関数もしくは円柱関数と呼ばれ，円柱状の境界値問題ではこの関数が登場する．大気・海洋中には円形の渦が卓越するが，このような渦の安定性を吟味するときに Bessel の微分方程式や Bessel 関数が登場する．

[*13] $\sinh x\equiv(e^x-e^{-x})/2$ や $\cosh x\equiv(e^x+e^{-x})/2$ のこと．

例４： Laguerre の微分方程式,

$$x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y+(1-x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y+\alpha y=0, \tag{1.67}$$

は (1.63) において $p=x\exp(-x)$, $q=0$, $r=\exp(-x)$, $\lambda=-\alpha$ の場合である．この方程式の解は Laguerre の多項式と呼ばれ，通常 $L_n(x)$ で表される．

例５： Laguerre の多項式を k 階微分した多項式は Laguerre の陪多項式と呼ばれ，$L_n^k(x)$ で表される．この多項式は次の微分方程式の解となる:

$$x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y+(k+1-x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y+(\alpha-k)y=0. \tag{1.68}$$

この微分方程式は Laguerre の陪微分方程式といい，これは (1.63) で $p=x^{k+1}\exp(-x)$, $q=0$, $r=x^k\exp(-x)$, $\lambda=k-\alpha$ 場合である．

例６： Legendre の微分方程式,

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y-2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y+l(l+1)y=0, \tag{1.69}$$

は (1.63) で $p=1-x^2$, $q=0$, $r=-1$, $\lambda=l(l+1)$ の場合である．ここで，n は正の整数である．この方程式の解は多項式で与えられ， Legendre の多項式と呼ばれ，通常 $P_l(x)$ と書かれる．

例７： Legendre の多項式 $P_l(x)$ を，m 階微分したものに $(1-x^2)^{m/2}$ を乗じたものは Legendre の陪関数と呼ばれ，$P_l^m\equiv(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)$ と書かれる．この関数は次の微分方程式の解となる：

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y-2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y+\left\{l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}y=0. \tag{1.70}$$

この微分方程式は Legendre の陪微分方程式と呼ばれ，これは (1.63) において $p=(1-x^2)$, $q=-m^2/(1-x^2)$, $r=1$, $\lambda=-l(l+1)$ の場合である．ここで，m は 0 または正の整数（ただし，$l\geq m$）である．地球大気の運動は，球面上に張り付いた流体（気体や液体の総称）の運動と考えることができる．このような運動を考察する際に，Legendre の陪関数を用いると便利である．また，気象の数値実験（天気予報）を精度よく行う際にも，Legendre の陪関数が必要となる．

1.11.2 演習問題

i) (1.65)〜(1.70) が Sturm–Liouville 型の微分方程式であることを確かめなさい．各微分方程式の名前も調べなさい．

ii) Sturm–Liouville 型の微分方程式は線形微分方程式であることを確かめなさい.

補足： (1.63) は

$$p\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y + p'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y + (q - \lambda r)\,y = 0, \tag{1.71}$$

と書き直せる．ここで，$p' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ である．Sturm–Liouville 型の微分方程式は定数係数ではないが 2 階の線形常微分方程式である.

1.12 *微分方程式の級数解法

1.12.1 はじめに

前の節で挙げた例 2 ～ 7 の多項式や関数は特殊関数と呼ばれる．それらの従う微分方程式をといて解を得ようとするとき，$y = e^{\alpha x}$ と置く "推定法" では解くことができない．このような方程式を解くには，級数解法と呼ばれるものを使う.

この解法のエッセンスは，解を

$$\begin{aligned} y &= \frac{a_{-m}}{x^m} + \frac{a_{-m+1}}{x^{m-1}} + \ldots\ldots + a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n + \ldots\ldots \\ &= \sum_{i=-m}^{\infty} a_ix^i \end{aligned} \tag{1.72}$$

と級数で表現する．これをもとの微分方程式に代入して係数 a_n を決める．通常は a_n の漸化関係式が得られる.

どの項から展開を始めるか，即ち m の値をいくつにとるか，また (1.72) の展開が収束するための条件を考慮する必要があるなど，他に説明するべきことはあるが，ここではそのような問題は伏せておいて，解のよく知られた微分方程式を級数解法で解いて，級数解法に触れて見よう.

1.12.2 演習問題

i) 指数関数 $y = e^{\lambda x}$ を $x = 0$ を中心に Taylor 展開しなさい.

ii) 定数係数を持った 1 階の線形微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y = \lambda y \tag{1.73}$$

を級数解法で解きなさい．ここで，λ は定数であり，解は

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n + \ldots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i \end{aligned} \tag{1.74}$$

と展開できると仮定する. (1.74) を (1.73) に代入することにより係数 a_i の従う漸化関係式を導きなさい.

iii) 前設問で導いた級数が指数関数であることを確かめなさい.