

# 惑星学基礎III 演習(9)

2016年6月24日配布

## 1 波動方程式の問題

$0 \leq x \leq L$  の領域内で, 1次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (c > 0) \quad (1)$$

を, 境界条件

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

と初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x) \quad (3)$$

のもとで解きなさい. ここでは非自明な解 ( $u$  が恒等的にゼロでない解) でなおかつ  $t \rightarrow \infty$  で  $u$  が発散しない解にのみ注目する.

- 演習の時間には, 問題を小分けにして, 何名かで模範解答を示してください.

## 2 線形移流方程式の問題

流体力学では, Lagrange 微分と呼ばれる時間微分が定義できる. 3次元空間内のある場の量  $A(\mathbf{r}, t)$  に対して,  $A$  の Lagrange 微分は

$$\begin{aligned} \frac{DA}{Dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla A \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} + v \frac{\partial A}{\partial y} + w \frac{\partial A}{\partial z} \end{aligned} \quad (4)$$

と書ける. ここで,  $u, v, w$  は流速  $\mathbf{v}$  の  $x, y, z$  成分である. (4) の第一の表現の右辺第2項もしくは, 第二の表現の第2~4項は移流項と呼ばれる. 物理量  $A$  はスカラー量でもベクトル量でもよく, もし  $A$  が速度  $\mathbf{v}$  自身である場合や,  $A$  が  $\mathbf{v}$  に依存する場合には, 移流項は速度に関する2次以上の項となり非線型項になる. 次のような方程式は移流方程式と呼ばれている<sup>1</sup>

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla A = 0. \quad (6)$$

<sup>1</sup>移流と拡散を含む方程式

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla A = \nu \nabla^2 A. \quad (5)$$

は移流拡散方程式と呼ばれている.

i) 空間 1 次元で,  $A$  は速度とは無関係な線形移流方程式

$$\frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

を考える. 波動方程式の d'Alembert 解を導出したのと同様な手法により, この方程式の解  $A$  の性質について議論しなさい.