惑星学基礎III 演習 (8)

2016 年 6 月 3 日配布

1　拡散方程式の問題

i) 1 次元拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (\kappa > 0) \tag{1}$$

を，境界条件

$$\frac{\partial u(0,\,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L,\,t)}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

と初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \tag{3}$$

のもとで解くことを考える．以下の設問に答えなさい．

a) (1) を変数分離法を用いて解くために

$$u(x,\,t) = X(x)T(t) \tag{4}$$

とおく．このとき，$X(x)$, $T(t)$ がそれぞれ満たす方程式を求めなさい．

b) 前設問で導かれた方程式の一般解を求めなさい．（注意：変数分離を行った後の分離定数についての議論も詳しく行いなさい．変数分離定数をある符号にとると，解が $t \to \infty$ で発散する．このような発散を伴うような解は物理学の問題では通常は扱わない．特に断りがなくても物理学で扱う問題は有界の解を求めることを要求している.）

c) 境界条件 (2) を $X(x)$ に関する条件に書き換えなさい．

d) ic) で導かれた条件を満足する $X(x)$ を求めなさい．

e) 重ね合わせの原理により $u(x,\,t)$ を求めなさい．

f) 初期条件を満足する $u(x,\,t)$ を求めなさい．

ii) 長さ L の棒の両端は常に温度 0 に保たれている．すなわち，$u(0,\,t) = u(L,\,t) = 0$. 初期の温度分布が以下のように与えられるとき，熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (\kappa > 0) \tag{5}$$

の解を求めなさい．

ヒント: 任意の初期条件 $u(x,\,0)=f(x)$ に対して, この解は

$$
\begin{aligned}
u(x,\,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\kappa(\frac{n\pi}{L})^2 t}\sin\frac{n\pi x}{L},\\
D_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

である.[1]

a) $a,\,b,\,c$ を定数として

$$u(x,\,0)=a\sin\frac{4\pi x}{L}+b\sin\frac{8\pi x}{L}+c\sin\frac{12\pi x}{L}. \tag{6}$$

b)

$$u(x,\,0)=ax(L-x). \tag{7}$$

iii) 無限に長い棒において，熱の初期分布 $u(x,\,0)$ が次のように与えられているとする．このとき，$t>0$ での熱の伝わり方を調べなさい．ここで, $a,\,b$ は定数とする. (注：テキストで求めた解を利用してよい.)

a) $u(x,\,0)=a$

b) $u(x,\,0)=a\delta(x)$

c) $u(x,\,0)=a\cos bx$ (次の Gauss 積分の i)-d) の問題を先に解く.)

2 Gauss 積分の問題

i) $I_n(\alpha)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}x^{2n}e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x$. ここで α は正の実数, $n\geq 0$ となる整数, とする．

a) $I_0(\alpha)$ を求めなさい.

b) $I_{n+1}(\alpha)=-\frac{\partial I_n(\alpha)}{\partial\alpha}$ を証明しなさい.

c) $I_1(\alpha)$ を求めなさい.

d) $\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\beta x)\,e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x$ を求めなさい. ただし, $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha(x+i\gamma)^2}\,\mathrm{d}x=I_0(\alpha)$ を用いてよい. ここで, γ は実数である. (ヒント: Euler の関係式を用いる.)

3 Gamma 関数の問題

Gamma 関数 $\Gamma(x)$ とは

$$\Gamma(n)\equiv\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

で定義される関数である. ここで, $n>0$ である.

[1] 本当はこの解を, i) と全く同様の方法を用いて自分できちんと導出して欲しいのだけれど. そうすると, 変数分離法による偏微分方程式の解法がよく理解できるようになる.

i) $\Gamma(1)$ を求めさない.

ii) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ を証明しなさい.

iii) n を自然数とするとき, $\Gamma(n+1) = n!$ を証明しなさい.

iv) $\Gamma(\frac{1}{2})$ を求めなさい. (ヒント: Gauss 積分を利用する.)