

# 惑星学基礎III 演習(7)

2016年5月27日配布

## 1 Fourier変換に関する問題

関数  $f(x)$  の Fourier 変換, 逆変換をそれぞれ  $\hat{f}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$ ,  $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(k)\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} dk$ , と定義する.

- i) a) 次の関数の Fourier 変換を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (1)$$

- b)  $a = 3$  として,  $f(x)$  とその Fourier 変換を図示しなさい.

- ii) a) 前問の結果を用いて,  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ka \cos kx}{k} dk$  の値を見積もりなさい.

- b)  $\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$  の値を求めなさい.

- iii) a)  $f(x)$  が偶関数の時, Fourier 変換の公式は以下のように与えられることを示しなさい.

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos kx dx, \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}(k) \cos kx dk. \quad (3)$$

ヒント:  $\hat{f}(k)$  が (2) で与えられるとき,  $\hat{f}(k)$  は偶関数か奇関数か.

- b)  $f(x) = e^{-m|x|}$ ,  $m > 0$  の Fourier 変換を求めなさい.

- c) 前設問の結果を用いて,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2 + m^2} dk = \frac{\pi}{2m} e^{-mx}, \quad (m > 0, x > 0)$$

を示しなさい.

- iv) Fourier 変換に関する以下の性質を証明しなさい.  $\alpha, \beta, \gamma$  は定数で有限の値を持つとする.

a)  $\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(x)\} + \beta \mathcal{F}\{g(x)\}$

$$b) \mathcal{F}\{f(x - \alpha)\} = e^{-ik\alpha}\mathcal{F}\{f(x)\}$$

$$c) \mathcal{F}\{e^{-\alpha x}f(x)\} = \hat{f}(k - i\alpha)$$

$$d) \mathcal{F}\{f(\gamma x)\} = \frac{1}{|\gamma|}\hat{f}\left(\frac{k}{\gamma}\right), \quad (\gamma \neq 0)$$

$$e) f(x) \text{ が微分可能で, } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \text{ のとき, } \mathcal{F}\left\{\frac{df(x)}{dx}\right\} = ik\mathcal{F}\{f(x)\}$$

## 2 Delta関数の問題

i) a) 次の関数の Fourier 変換を求めなさい.<sup>1</sup>

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases} \quad (4)$$

b)  $a \rightarrow 0$  の極限では  $f(x)$  およびその Fourier 変換はどのような関数になるか述べてなさい.

## 3 畳み込みに関する問題

$f(x)$  と  $g(x)$  の畳み込みを  $f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u) du$  で定義する. このとき以下の設問に答えなさい.

i)  $f * g = g * f$  を証明しなさい.

ii)  $f * (g * h) = (f * g) * h$  を証明しなさい.

iii)  $f * (g + h) = f * g + f * h$  を証明しなさい.

iv) 畳み込みの定理  $\mathcal{F}\{f * g\} = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\}$  を証明しなさい.

<sup>1</sup>不連続点  $x = \pm a$  における  $f(x)$  の値は,  $\{f(x+0) + f(x-0)\}/2$  とする.