

惑星学基礎III 演習(6)

2016年5月13日配布

1 複素 Fourier 級数に関する問題

i) $-L < x < L$ の範囲で定義される周期 $2L$ の周期関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \quad (1)$$

で与えられるとき, c_n が

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx \quad (2)$$

であることを証明しなさい. (実 Fourier 級数を経ずに, (1) を出発点とした議論を行う.)

ii) $-L < x < L$ の範囲で $f(x) = e^{kx}$ と与えられる周期 $2L$ の関数の複素 Fourier 級数表示は

$$f(x) = \frac{\sinh(kL)}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{k + i(n\pi/L)}{k^2 + (n\pi/L)^2} e^{in\pi x/L} \quad (3)$$

となることを証明しなさい. ここで k は $k > 0$ である.

iii) $0 < x < T$ において $f(x) = \frac{ax}{T}$ で与えられ, 周期 T の関数 (こぎり波) を図示し, さらに複素 Fourier 級数を求めなさい. ただし, a は正の実数とする.

iv) $0 < x < 1$ において $f(x) = A \sin \pi x$ で与えられ, 周期 1 で定義される関数の複素 Fourier 級数を求めなさい. ここで A はある定数とする.

v) $-\pi < x < \pi$ の範囲で, $f(x) = \cos \alpha x$ の関数について, 以下の問いに答えなさい. ここで, α は整数でないとする.

a) $f(x)$ の複素 Fourier 級数表示を求めなさい.

b)

$$\pi \cos \alpha x = 2 \sin \alpha \pi \left\{ \frac{1}{2\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha \cos n\pi x}{\alpha^2 - n^2} \right\} \quad (4)$$

を証明しなさい.

c) 前設問で $x = \pi$, $\alpha = z$ とおくことにより,

$$\pi \cot \pi z - \frac{1}{z} = 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}$$

となる. この式が,

$$\frac{d}{dz} \ln \left(\frac{\sin \pi z}{\pi z} \right) = \frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right) \quad (5)$$

となることを示しなさい. ここで $0 \leq z \leq 1$ とする.

d)

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right) \quad (6)$$

を証明しなさい.

vi) $-L < x < L$ の範囲で $f(x)$ で定義され, 周期 $2L$ の実関数 $f(x)$ の Parseval の等式

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (7)$$

を実 Fourier 級数の Parseval の恒等式を使って証明しなさい.

vii) $-L < x < L$ の範囲で $f(x)$ で定義され, 周期 $2L$ の関数 $f(x)$ の Parseval の等式

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (8)$$

を証明しなさい. (注意: ここで $f(x)$ は実関数ではない.)

viii) a を整数でない実数とする. 関数 $f(x) = e^{iax}$, ($-\pi < x < \pi$), (周期 2π) を複素 Fourier 級数に展開せよ. さらに Parseval の恒等式を用いて

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 a\pi}$$

を証明しなさい. 注意: この問題では $f(x)$ は複素関数なので, Parseval の恒等式は

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (9)$$

であることに注意しなさい.