惑星学基礎III 演習 (5)

2016 年 4 月 22 日配布

1 Fourier 級数の問題 (2)

i) a) 以下の関数に対応する Fourier 級数を求めなさい．

$$f(x) = \begin{cases} 0, & (-5 < x < 0) \\ 3, & (0 < x < 5) \end{cases}$$

周期は 10 とする．

b) 関数 $f(x)$ の不連続点 $x = -5,\ 0,\ 5$ において Fourier 級数はどのような値をとるか.

ii) $-\pi < x < \pi$ において $f(x) = x^2$ となる周期 2π の関数を Fourier 級数展開しなさい．

iii) 前設問の結果を用いて，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を証明しなさい.[1]

iv) $f(x)$ を $-L < x < L$ で指定された周期 $2L$ の偶関数とする．$f(x)$ の Fourier 級数展開には sin の項は現われない, 即ち,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \tag{1a}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1b}$$

となることを証明しなさい．(1) は Fourier 余弦級数と呼ばれる.

v) $f(x)$ を $-L < x < L$ で指定された周期 $2L$ の奇関数とする．$f(x)$ の Fourier 級数展開には cos の項は現われない, 即ち,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{2a}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x, \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2b}$$

となることを証明しなさい．(2) は Fourier 正弦級数と呼ばれる.

[1] $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は ζ 関数と呼ばれる.

vi) 以下の関数に対応する Fourier 係数を求めなさい．[2]

$$f(x) = \begin{cases} 3, & (0 < x < 5) \\ 0, & (5 < x < 10) \end{cases}$$

周期は 10 とする.

[2] この関数は, $-\infty < x < \infty$ の範囲で眺めると, i) で考察した関数と同じである．従って, Fourier 級数は a）で求めたものと同じになるはずである.

2 Parseval の恒等式の問題

i) 周期 $2L$ の関数 $f(x)$ が区間 $(-L, L)$ において $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right)$ に収束するとき, Parseval の恒等式

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \tag{3}$$

を証明しなさい.

ii) 次の関数を Fourier 級数展開しなさい:

a) $f(x) = \begin{cases} x, & (0 \leq x < 2) \\ -x, & (-2 < x < 0) \end{cases}$
周期 4.

b) 前設問の Fourier 級数に対応する Parseval の恒等式を書き下しなさい.

c) 前設問の結果をもちいて, 無限級数和

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots \frac{1}{n^4} + \cdots \tag{4}$$

を求めなさい.