惑星学基礎III 演習(3)

2016年4月22日配布

講義では扱えなかった話題

1　定数係数の2階線形連立常微分方程式

図1のようにバネ定数 $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ を持った3つの線形バネにつながれた2つの質点の運動方程式は,

$$\begin{cases} m_1 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x_1 = -\kappa_1 x_1 + \kappa_3 (x_2 - x_1), \\ m_2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x_2 = -\kappa_2 x_2 - \kappa_3 (x_2 - x_1), \end{cases} \tag{1}$$

の形の定数係数2階線形**連立**常微分方程式で書ける. このような方程式を解いてみよう.

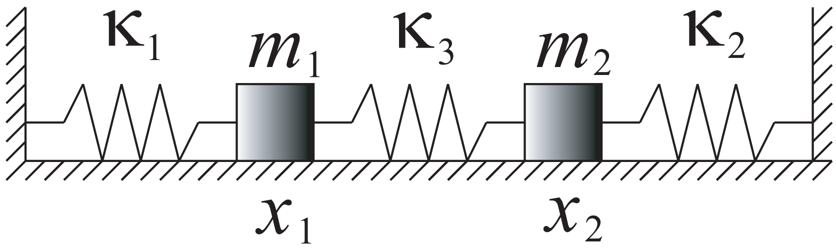

図1: 線形バネにつながれた質点. x_1, x_2 は平衡の位置からの変位とする.

簡単のために 質点の質量とバネ定数は全て等しいとする. 即ち, $m \equiv m_1 = m_2$, $\kappa \equiv \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3$.

解法1: 変数変換を行うことにより, 独立な2つの微分方程式に書き直す. $X \equiv x_1 + x_2$, $Y = x_1 - x_2$ として, X, Y に関する方程式に書き直す. X, Y に関する方程式はそれぞれ X, Y のみを含む定数係数2

階線形常微分方程式になるので, それを “推定法” を使って解く. (X は 2 つ質点の重心の位置を表し, Y は相対位置を表す.)

解法 2: (1) は今の状況設定のもとでは, 次のように行列を用いて書き下すことが出来る:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -2\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 . \end{pmatrix} \tag{2}$$

ここで, $\omega^2 \equiv \frac{\kappa}{m}$ である. これを “推定法” と行列の知識を使って解いてみる.

先ず, この方程式の解を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

と推定し, (2) に代入する. ここで c_1, c_2 は定数とする. このとき, (2) は

$$\begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -2\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 . \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

となる. これは, λ^2 を固有値とする行列

$$\mathsf{M} = \begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -2\omega^2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

の固有値問題になっている. (5) の固有値は, $\lambda^2 = -3\omega^2$, $-\omega^2$ と求められる. さらに, 固有値 $\lambda^2 = -3\omega^2$ に属する固有ベクトルは, $c_1 = -c_2$, 固有値 $\lambda^2 = -\omega^2$ に属する固有ベクトルは, $c_1 = c_2$ である. そこで, 微分方程式の解はこれら求められたものを重ね合わせて,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t} + D_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\sqrt{3}\omega t} + D_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\sqrt{3}\omega t} \tag{6}$$

となる. ここで, C_1, C_2, D_1, D_2 は任意定数である.

1.1 演習問題

i) $m_1 = m_2$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3$ のとき, (1) を上で説明した解法 1 の方法で説き, 解が (6) であることを確かめなさい.

ii) $m_1 = m_2$, $\kappa_1 = \kappa_2$ のとき, (1) を上で説明した解法 2 の方法で説きなさい.

2　Sturm–Liouville 型の微分方程式

2.1　はじめに

地球惑星科学で登場する微分方程式は，次のような形式のものが多い：

$$\left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(p(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right) + q(x) \right\} y(x) = \lambda r(x) y(x). \tag{7}$$

ここで，λ は未定の定数で，$p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ は既知の x の関数である．方程式 (7) は Sturm–Liouville 型の微分方程式と呼ばれ，p, q, r を適当に選ぶと著名な種々の微分方程式が得られる．

例１：　三角関数や双曲線関数が解となる

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y = \lambda y \tag{8}$$

は (7) において，$p = 1$, $q = 0$, $r = 1$ の場合である．$\lambda < 0$ のとき三角関数が，$\lambda > 0$ のとき双曲線関数が解となる．

例２：Hermite の微分方程式，

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y - 2x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y + 2ny = 0, \tag{9}$$

は (7) において $p = \exp(-x^2)$, $q = 0$, $r = \exp(-x^2)$, $\lambda = -2n$ の場合である．ここで，n は 0 または正の整数である．この方程式の解は多項式で与えられ， Hermite 多項式と呼ばれ，通常 $H_n(x)$ と表される．地球の大気・海洋中には様々な種類の波動が存在し，赤道付近に捕捉された波動（赤道波と呼ばれる）の従う方程式は (9) の形に変形することができる．(量子力学を習うと，調和振動子の Schrödinger 方程式を解く際にこの特殊関数が登場する．)

例３：Bessel の微分方程式，

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y + x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y + (x^2 - n^2) y = 0, \tag{10}$$

は (7) で $p = x$, $q = x$, $r = 1/x$, $\lambda = n^2$ の場合である．ここで，n は 0 または正の定数である．この方程式の解は Bessel 関数と呼ばれ，$J_n(x)$ と表される．Bessel 関数は円筒関数もしくは円柱関数と呼ばれ，円柱状の境界値問題ではこの関数が登場する．大気・海洋中には円形の渦が卓越するが，このような渦の安定性を吟味するときに Bessel の微分方程式や Bessel 関数が登場する．

例４：Laguerre の微分方程式，

$$x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y + (1-x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y + \alpha y = 0, \tag{11}$$

は (7) において $p = x\exp(-x)$, $q = 0$, $r = \exp(-x)$, $\lambda = -\alpha$ の場合である．この方程式の解は Laguerre の多項式と呼ばれ，通常 $L_n(x)$ で表される．

例５：Laguerre の多項式を k 階微分した多項式は Laguerre の陪多項式と呼ばれ，$L_n^k(x)$ で表される．この多項式は次の微分方程式の解となる:

$$x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y + (k+1-x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y + (\alpha-k)y = 0. \tag{12}$$

この微分方程式は Laguerre の陪微分方程式といい，これは (7) で $p = x^{k+1}\exp(-x)$, $q = 0$, $r = x^k\exp(-x)$, $\lambda = k-\alpha$ 場合である．

例６：Legendre の微分方程式，

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y + l(l+1)y = 0, \tag{13}$$

は (7) で $p = 1-x^2$, $q = 0$, $r = -1$, $\lambda = l(l+1)$ の場合である．ここで，n は正の整数である．この方程式の解は多項式で与えられ，Legendre の多項式と呼ばれ，通常 $P_l(x)$ と書かれる．

例７：Legendre の多項式 $P_l(x)$ を，m 階微分したものに $(1-x^2)^{m/2}$ を乗じたものは Legendre の陪関数と呼ばれ，$P_l^m \equiv (1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)$ と書かれる．この関数は次の微分方程式の解となる：

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y + \left\{l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right\}y = 0. \tag{14}$$

この微分方程式は Legendre の陪微分方程式と呼ばれ，これは (7) において $p = (1-x^2)$, $q = -m^2/(1-x^2)$, $r = 1$, $\lambda = -l(l+1)$ の場合である．ここで，m は 0 または正の整数（ただし，$l \geq m$）である．地球大気の運動は，球面上に張り付いた流体（気体や液体の総称）の運動と考えることができる．このような運動を考察する際に，Legendre の陪関数を用いると便利である．また，気象の数値実験（天気予報）を精度よく行う際にも，Legendre の陪関数が必要となる．

2.2 演習問題

i) (9)〜(14) が Sturm–Liouville 型の微分方程式であることを確かめなさい.（各微分方程式の名前も調べなさい.）

ii) Sturm–Liouville 型の微分方程式は線形微分方程式であることを確かめなさい.

補足： (7) は

$$p\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y + p'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y + (q - \lambda r)\,y = 0, \tag{15}$$

と書き直せる．ここで，$p' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ である．Sturm–Liouville 型の微分方程式は定数係数ではないが 2 階の線形常微分方程式である．

3 微分方程式の級数解法

3.1 はじめに

前の節で挙げた例 2 〜 7 の多項式や関数は特殊関数と呼ばれる．それらの従う微分方程式をといて解を得ようとするとき，$y = e^{\alpha x}$ と置く推定法では解くことができない．このような方程式を解くには，級数展開法と呼ばれるものを使う．

この解法のエッセンスは，解を

$$\begin{aligned} y &= \frac{a_{-m}}{x^m} + \frac{a_{-m+1}}{x^{m-1}} + \ldots\ldots + a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n + \ldots\ldots \\ &= \sum_{i=-m}^{\infty} a_i x^i \end{aligned} \tag{16}$$

と級数で表現する．これをもとの微分方程式に代入して係数 a_n を決める．通常は a_n の漸化関係式が得られる．

どの項から展開を始めるか，即ち m の値をいくつにとるか，また (16) の展開が収束するための条件を考慮する必要があるなど，他に説明するべきことはあるが，ここではそのような問題は伏せておいて，解のよく知られた微分方程式を級数展開法で解いて，級数展開法に触れて見よう．

3.2 演習問題

i) 指数関数 $y = e^{\lambda x}$ を $x = 0$ を中心に Taylor 展開しなさい．

ii) 定数係数を持った 1 階の線形微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y = \lambda y \tag{17}$$

を級数展開法で解きなさい．ここで，λ は定数であり，解は

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n + \ldots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \end{aligned} \tag{18}$$

と展開できると仮定する．(18) を (17) に代入することにより係数 a_i の従う漸化関係式を導きなさい．

iii) 前設問で導いた級数が指数関数であることを確かめなさい．