惑星学基礎 III 演習 (2)

2016 年 4 月 8 日配布

1　定数係数を持った 2 階の線形常微分方程式の問題

以下の微分方程式の一般解を求めなさい．

i)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$

ii)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - 4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 5x = 0$$

iii)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 5x = 0$$

iv)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 10\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 25x = 0$$

v)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 4x = 0$$

vi)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - 4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 5x = t^2 + 2e^{3t}$$

vii)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 10\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 25x = 20\cos 2t$$

viii)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = f_0 \cos \omega t$$

ここで，ω, f_0 は実数の定数であるとする．

2　1階の微分方程式の問題

講義で扱った2階の微分方程式のほかにも物理学の研究・勉強で頻繁に現れる微分方程式として1階の微分方程式がある．1階の微分方程式でも定数係数を持つ場合には, 講義で扱ったのと同様の方法（“推定法”）で解くことが出来る．その他の場合には変数分離法で解ける場合が多い.（むしろ1階の微分方程式は変数分離法で解くことが常套手段のようである.）

変数分離法による1階の常微分方程式の解法：　次のような1階の常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \tag{1}$$

において, $f(x,y)$ が

$$f(x,y) = F(x)G(y) \tag{2}$$

と x のみの関数 $F(x)$ と y のみの関数 $G(y)$ の積としてかける場合, すなわち

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x)G(y) \tag{3}$$

と書ける場合を考える．(3) は次のように変形できる:

$$\frac{\mathrm{d}y}{G(y)} = F(x)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

(4) の両辺を積分する

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{G(y)} = \int F(x)\mathrm{d}x \tag{5}$$

ことにより微分方程式 (3) を解くことが出来る（一般解を得ることが出来る）. (3) は1階の微分方程式なのでその一般解は1個の任意定数を含むことに注意しなさい.[1]

i)　次の微分方程式を，以下の2つの方法で解きなさい.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \omega y = 0. \tag{6}$$

ここで，ω は実数の定数であるとする.

a) 定数係数を持った2階の線形常微分方程式と同様に推定法を用いて解きなさい.

b) 変数分離法を用いて解きなさい.

ii) 次の1階の微分方程式を解きなさい.

a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$

[1] (5) は不定積分なので, 積分に伴って任意定数であるところの積分定数が出てくる．左辺の積分で1個, 右辺の積分で1個出てくるが, これを一まとめにして一つの任意定数に出来る.

b) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy$

c) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{2x + xy^2}{2y + x^2y}$

iii) 次の微分方程式を，前設問 i) の解を参考にして，係数変化法を用いて解きなさい.（解は $f(x)$ の積分を含む形で与えられる．$f(x)$ が陽に与えられていないので，その積分は実行できない．したがってここで得られる解は形式解である.）

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \omega y = f(x).$$

ここで，ω は実数の定数, $f(x)$ は x の既知関数とする.

3 発展問題

i) 次の連立微分方程式は, 大気の下層や海洋の表層の流れを記述する方程式で Ekman 方程式と呼ばれるものである.

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2} - v = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2} + u = U_\infty.$$

ここで, U_∞ は定数である.

a) 上記の連立微分方程式の一般解を求めなさい. (u もしくは v のみの 4 階の微分方程式に書き直して, 推定法で解く．もしくは, 第 1 式と, 第 2 式に純虚数 i を掛けたものとを足し, $\hat{u} \equiv u + iv$ に関する 2 階の微分方程式に書き直して推定法で解く. 演習問題 (1) で証明した $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$ を用いなさい.)

b) $z \to \infty$ で $u \to U_\infty$, $v \to 0$, $z = 0$ で $u = 0, v = 0$ という境界条件を満足する解を求めなさい. (各 z に対して u, v をプロットすると螺旋を描く．この螺旋は Ekman 螺旋と呼ばれる.)