

惑星学基礎III 演習(10)

2016年7月8日配布

注:問題を小分けにして手分けして解いてもよい

1 曲線座標系における Laplace 方程式の問題

- i) 3次元球座標系の場合の勾配演算子, 単位ベクトルの微分, ベクトルの発散, Laplacian は以下のようになることを導きなさい. 注:ここに書かれていない単位ベクトルの微分はゼロである.

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \cos \theta \mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} = -\sin \theta \mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta A_\theta) + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (4)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}. \quad (5)$$

- ii) 3次元円柱座標系の場合の勾配演算子, 単位ベクトルの微分, ベクトルの発散, Laplacian は以下の様になることを導きなさい. 注:ここに書かれていない単位ベクトルの微分はゼロである.

$$\nabla = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_\rho, \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (8)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \quad (9)$$

2 Laplace 方程式と特殊関数

- i) 3次元球座標系において, 変数分離を行うことにより場の θ 依存性は, Legendre の階微分方程式

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta = 0, \quad (10)$$

に従うことを示しなさい。

- ii) 2次元円柱座標系における Laplace 方程式を導き, Laplace 方程式の解の動径座標依存性に関する式が

$$r^2 \frac{dR}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - n^2 R = 0 \quad (11)$$

となることを導きなさい。ここで, n は整数である。

3 Green 関数

- i) 2次元 Laplace 方程式の Green 関数が, $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + c$ となることを示しなさい。ここで, c は任意定数であり, $r dG/dr|_{r=r'} = 0$ とする。

- ii) 次の1次元微分方程式

$$\frac{d^2 G(y; y')}{dy^2} - k^2 G(y; y') = \delta(y - y') \quad (12)$$

に従う Green 関数が,

$$\begin{aligned} G(y; y') &= \frac{\sinh k(y-1) \sinh ky'}{k \sinh k}, \quad (y > y') \\ &= \frac{\sinh k(y'-1) \sinh ky}{k \sinh k}, \quad (y < y') \end{aligned} \quad (13)$$

となることを示しなさい。ここで, $y - y' \rightarrow \pm\infty$ で $G(y; y') \rightarrow \infty$, $G(y'+0; y') = G(y'-0; y')$ とする。