惑星学基礎III 演習 (1)

2016 年 4 月 8 日配布

1　惑星学基礎 I, II の復習

i) 次式で定義されるスカラー場 $\psi(x,y,z)$,

$$\psi(x,y,z) \equiv \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

とベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$,

$$\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{\nabla}\psi,$$

に関して, 以下の質問に答えなさい.

a) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の具体的表式を求めなさい.

b) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の発散 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$ を求めなさい. ただし, 原点 $\boldsymbol{r}=0$ は除く.

c) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ を求めなさい. ただし, 原点 $\boldsymbol{r}=0$ は除く.

d) スカラー場 ψ の特徴をとらえて xy 平面上で図示しなさい.

e) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の特徴をとらえて xy 平面上で図示しなさい.

2　Euler の関係式

Euler の関係式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta$ は極めて便利な公式である. 以下の演習問題でその便利さを体験してください！

i) 以下の公式を Euler の関係式を用いて証明しなさい.

a) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

b) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha$

c) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

d) $\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$ を証明しなさい. ここで, n は自然数とする. (de Moivre の公式)

ii) $\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ を証明しなさい.

iii) 以下の積分を計算しなさい.

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-z}\sin z\,\mathrm{d}z$

b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-z}\cos z\,\mathrm{d}z$

iv) 双曲線関数について:以下の演習で双曲線関数が三角関数の親戚（？）であることがわかると思います.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{1}$$

は $\sinh x = -i\sin(ix)$ であることを確かめなさい．同様に双曲線関数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{2}$$

は $\cosh x = \cos(ix)$ であることを確かめなさい．

v) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh x = \cosh x$ を前設問の結果を使って証明しなさい．同様に $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x = \sinh x$ を前設問の結果を使って証明しなさい．

3 微分方程式について

i) 以下の微分方程式は線形の微分方程式かそれとも非線形の微分方程式か答えなさい．

a) 質量 m の質点がバネ定数 k の線形バネにつながれている場合，質点の平衡位置からの変位 x が従う運動方程式，

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0. \tag{3}$$

b) 重力場中で長さ l の伸びない紐の端に 質量 m のおもりがつるされているとする．この振り子（重り）の平衡点からの振れ角 θ が従う運動方程式

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + mg\sin\theta = 0. \tag{4}$$

ここで，g は重力加速度である．

c) 方程式 (4) で振れ角 θ が小さい場合

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + mg\theta = 0 \tag{5}$$

d) 同じバネ定数 κ を持った 3 つの線形バネにつながれた 2 つの質点の運動方程式（連成振動の方程式）:

$$\begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_1 = \kappa\left(x_2 - 2x_1\right), \\ m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_2 = \kappa\left(x_1 - 2x_2\right). \end{cases} \tag{6}$$

ここで, κ は正の定数である.

e) 真空中の Maxwell 方程式

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \\ c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \end{cases} \tag{7}$$

ここで, c は光速である.

ii) 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

が

$$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

の解を持つことを示しなさい. ここで, A, B は任意定数である. またこの解が以下の形に書けることを示しなさい：

$$\begin{aligned} x &= C\cos(\omega t + \alpha), \\ &= D\sin(\omega t + \beta), \end{aligned}$$

さらに, C, D, α, β を A, B で表現しなさい.

補足：C, D は振幅，α, β は位相と呼ばれる.

iii) 定数係数の 2 階線形常微分方程式の性質を使って, 以下に従って Euler の関係式の証明を行ってみよう.

a) 以下の微分方程式,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -y \tag{8}$$

は, $\sin x$, $\cos x$, e^{ix} を解に持つことを示しなさい.

b) $\sin x$, $\cos x$ は線形独立であることを示しなさい. (ヒント: 線形独立とは, a, b を定数として $a\cos x + b\sin x = 0$ が任意の x に対して, $a = b = 0$ のときにのみ成り立つことである.)

c) 2 階の微分方程式の一般解は 2 個の独立な重ね合わせとして書くことができる. したがって, 上の問題で見つかった 3 つの解のうち, 2 つは独立で, それ以外のものは独立な 2 つの解の線形結合として表すことができる. そこで, a, b を定数として,

$$e^{ix} = a\cos x + b\sin x \tag{9}$$

と表現してみる. (9) を微分した式と, (9) から, a, b を決定しなさい.