

第 9 章

和の規約

例えば, $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N$ は総和の記号を使うと, 短い表記で $\sum_{i=1}^N a_i x_i$ と書くことができることは高校数学で習った (ハズである). ここではさらに短い表記 “和の規約” と呼ばれるものについて紹介する. この表記を用いると, 複雑なベクトルの演算が非常に簡単にできる (ときがある). またスカラーでもベクトルでもない, テンソルと呼ばれる量の表現にもこの表記がしばしば用いられる.*¹ 和の規約は相対性理論で有名な Einstein が始めた表記法らしく, Einstein の縮約規約とか Einstein の規約とも呼ばれる.

9.1 表記

位置ベクトルを \boldsymbol{x} で表す. 慣例によると \boldsymbol{x} をデカルト座標系におけるその成分 x, y, z を用いて表すと,

$$\boldsymbol{x} = x \boldsymbol{i} + y \boldsymbol{j} + z \boldsymbol{k} \quad (9.1)$$

となる. ここで, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ, x, y, z 方向の単位ベクトルである.

なお, 単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を, 添え字付きの文字を用いて, それぞれ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ で表し, 成分 x, y, z を x_1, x_2, x_3 と表すこともある. 即ち添え字 1 が x 成分, 添え字 2 が y 成分, 添え字 3 が z 成分を表す. この章ではこの表記を採用する.

この表記よると (9.1) は

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + x_3 \boldsymbol{e}_3 \quad (9.2)$$

である. また任意のベクトル \boldsymbol{A} は

$$\boldsymbol{A} = A_1 \boldsymbol{e}_1 + A_2 \boldsymbol{e}_2 + A_3 \boldsymbol{e}_3 \quad (9.3)$$

*¹ テンソルは, 2 回生前期に開講される「地球惑星物理学基礎 I」において紹介されるだろう. 相対性理論でもテンソルは登場する.

と表記する.

偏微分記号, $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ は簡単化のために, $\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z$ と記す場合がある. これも先に採用した表記を用いると $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ となるがさらにコンパクトに, $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ と書く. このような表記では微分演算子 ∇ は

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (9.4)$$

$$= \mathbf{i} \partial_x + \mathbf{j} \partial_y + \mathbf{k} \partial_z \quad (9.5)$$

$$= \mathbf{e}_1 \partial_1 + \mathbf{e}_2 \partial_2 + \mathbf{e}_3 \partial_3 \quad (9.6)$$

となる.

| | |
|-----------------------------|----------------|
| x 方向の単位ベクトル | \mathbf{e}_1 |
| y 方向の単位ベクトル | \mathbf{e}_2 |
| z 方向の単位ベクトル | \mathbf{e}_3 |
| ある物理量 \mathbf{A} の x 成分 | A_1 |
| ある物理量 \mathbf{A} の y 成分 | A_2 |
| ある物理量 \mathbf{A} の z 成分 | A_3 |
| x による偏微分 | ∂_1 |
| y による偏微分 | ∂_2 |
| z による偏微分 | ∂_3 |

表 9.1 表記法のまとめ

9.2 和の規約

和の規約とは

一つの項の中に同じアルファベット*2の添字が2回用いられているとき, その添字について1から3までの和をとる

ことである. すなわち,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i \\ &= x_i \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (9.7)$$

最後の最も簡単な表式が和の規約を用いて書かれたものである。和の規約とは (9.7) の 2 番目の表式において \sum を省略することとも言える。

注意 1: 和の規約において、添字はどんな記号を用いてもよい。とにかく添え字が 2 回繰り返して出てきたらその添え字について和をとればよい。つまり $x_i \mathbf{e}_i = x_j \mathbf{e}_j = x_k \mathbf{e}_k$ である。このような理由から繰り返す添字は無効添字 (dummy index) と呼ばれる。このことは、 \sum を使った表記に戻って考えれば納得できるであろう:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^3 x_j \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^3 x_k \mathbf{e}_k.$$

注意 2: 2 次元空間であれば、和は 1 ~ 2 にわたってとる。N 次元であれば、和は 1 ~ N にわたってとる。^{*3}

例: 和の規約を用いて表現した例。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_i \mathbf{e}_i. \\ \nabla &= \mathbf{e}_i \partial_i. \\ \nabla \psi &= \mathbf{e}_i \partial_i \psi. \end{aligned}$$

9.3 Kronecker のデルタ

2 つの添え字を持ち、以下のような性質を持つ量を Kronecker のデルタという:

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0, & (i, j \text{ が異なる値を持つとき}). \\ 1, & (i, j \text{ が同じ値を持つとき}). \end{cases} \quad (9.8)$$

Kronecker のデルタの別の定義は

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (9.9)$$

である。または、

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \partial_j x_i = \delta_{ij}, \quad (9.10)$$

とも定義できる。

^{*3} 相対性理論では、0 ~ 3 もしくは 1 ~ 4 にわたって和をとる。添字 0 もしくは 4 は時間座標 ict である。ここで、 i は純虚数、 c は光速である。

例： 和の規約と Kronecker のデルタを用いると $\nabla \cdot \mathbf{A}$ は以下のようにかける：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= (\mathbf{e}_i \partial_i) \cdot (A_j \mathbf{e}_j) \\ &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \partial_i A_j + A_j \mathbf{e}_i \cdot \partial_i \mathbf{e}_j \\ &= \delta_{ij} \partial_i A_j \\ &= \partial_j A_j.\end{aligned}\tag{9.11}$$

(注意：デカルト座標系では $\partial_j \mathbf{e}_i = 0$ である.)

確認： $\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3 = \sum_{i=1}^3 \partial_i A_i$ なので、最後の表記で \sum を省略すれば確かに (9.11) と一致する。

補足： この章で用いている表記によると、添え字は座標系のある方向の成分を現している。そこで、Kronecker のデルタは2つの添え字を持つので、2つの方向に依存した量である。スカラーは方向に依存せず大きさだけを持つ量である。一方ベクトルはひとつの方向と大きさを持つ量である。2つの方向を持つような量は今までおそらく習ったことがないであろう。このような2つの方向に依存した量は2階のテンソルと呼ばれる量である。テンソルという観点から見ると、スカラーは0階のテンソル、ベクトルは1階のテンソルである。

9.4 Eddington のイプシロン

3つの添え字を持ち、以下のような性質を持つ量を Eddington のイプシロンという：

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1, & (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \text{ のとき.} \\ -1, & (i, j, k) = (3, 2, 1), (2, 1, 3), (1, 3, 2) \text{ のとき.} \\ 0, & \text{それ以外するとき.} \end{cases}\tag{9.12}$$

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}.\tag{9.13}$$

$\varepsilon_{ijk} = 1$ となる場合は $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ の偶置換、 $\varepsilon_{ijk} = -1$ となる場合は $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ の奇置換という。

例

行列

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

の行列式は, Eddington のイプシロンを用いると

$$\begin{aligned} \det \underline{\mathbf{A}} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \end{aligned} \quad (9.14)$$

と表せる. また二つのベクトル \mathbf{A} と \mathbf{B} とのベクトル積は

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i A_j B_k \end{aligned} \quad (9.15)$$

となる. 同様にして回転演算は

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j A_k \end{aligned} \quad (9.16)$$

と表現できる.

補足: Eddington のイプシロン ε_{ijk} は 3 階のテンソルである.

9.5 和の規約を使ったベクトル解析の公式の証明の例

例 1: ϕ をあるスカラー関数, \mathbf{A} をあるベクトル関数として, $\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \mathbf{A}$ を和の規約を使って証明する.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) &= \mathbf{e}_i \partial_i \cdot (\phi A_j \mathbf{e}_j) \\ &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j A_j (\partial_i \phi) + \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \phi (\partial_i A_j) \\ &= \delta_{ij} (A_j \partial_i \phi + \phi \partial_i A_j) \\ &= A_i \partial_i \phi + \phi \partial_j A_j = \mathbf{A} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \mathbf{A}. \end{aligned}$$

第 1 式から第 2 式への変形には chain rule と $\partial_i \mathbf{e}_j = 0$ を用いている. また, 第 2 式から第 3 式への変形には (9.9) を用いた.

例 2: ϕ をあるスカラー関数として, 恒等式 $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ を和の規約を使って証明する.

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \phi) &= \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j (\partial_k \phi) \\
&= \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_k (\partial_j \phi) \\
&= -\varepsilon_{ikj} \mathbf{e}_i \partial_k (\partial_j \phi) \\
&= -\varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j (\partial_k \phi)
\end{aligned}$$

第1式から第2式への変形は微分の順序の交換 $\partial_j \partial_k = \partial_k \partial_j$ を, 第2式から第3式への変形は $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$ を用いた. さらに第3式から第4式への変形は, 添え字の置き換え $j \rightarrow k, k \rightarrow j$ を行った. 第1式と第4式に注目すると,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j (\partial_k \phi) &= -\varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j (\partial_k \phi) \\
\Rightarrow \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j (\partial_k \phi) &= 0.
\end{aligned}$$

つまり, $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ である.

■最後に... 今まで研究室内で指導してきた学生・院生の中で, 数理物理的な能力に秀でていた人達でも和の規約を使いこなせる人はあまりいなかった. しかしながら, 決して難しいルールではないので, 頑張っただけ勉強をしてこれを使いこなせるようになって欲しい. 和の規約が使いこなせると, 少しは優越感に浸れる場面がある. (もちろんそれを勉強の動機にするのは褒められたことではないが.) 和の規約を使いこなせるようになるには, やはりひとえに鍛錬を積む(多数の演習問題を解く)以外に方法はない(であろう).