

## 第 8 章

# Laplace-Poisson 方程式とそれに関連する話題

### 8.1 はじめに

拡散方程式や波動方程式は場が定常 ( $\partial/\partial t = 0$ ) である時には,

$$\nabla^2 V = 0, \quad (8.1)$$

の形の方程式に帰着することができる. (8.1) の方程式は, Laplace 方程式と呼ばれ, 場がこの方程式を満たす物理現象, 地球惑星科学現象は数多くある. 例えば, 静電場  $\mathbf{E}$  に対して Maxwell の方程式の一つ,  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , から  $\mathbf{E} = -\nabla V$  を満たす静電ポテンシャル  $V$  が導入でき, 電荷がない空間ではさらに Maxwell の方程式の一つ,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , から  $V$  は (8.1) を満たす. さらに, 非圧縮性流体の渦なし流<sup>\*1</sup>でも, 速度場  $\mathbf{v}$  と  $\mathbf{v} = \nabla V$  の関係にある速度ポテンシャル  $V$  を導入でき, 速度ポテンシャルは (8.1) を満たす.

一方, (8.1) の右辺がゼロでなく, ある与えられた関数である場合, 即ち,

$$\nabla^2 V = f(\mathbf{r}), \quad (8.2)$$

の式も, 数多くの物理現象, 地球惑星科学現象を記述する方程式として有名である. (8.2) は Poisson 方程式と呼ばれる. 電荷の存在する空間中での静電ポテンシャル, 2次元非圧縮性流体の渦あり流の流れ関数は (8.2) を満足する.\*2 この場合, 電荷分布や渦度が (8.2) の右辺の  $f(\mathbf{r})$  に相当する.

<sup>\*1</sup> 非圧縮性流体とは, 運動中で体積 (もしくは密度) が変化しない流体である. 質量の保存則を具体的に数式で書き表した連続の式は非圧縮流体の時には,  $D\rho/Dt = 0$  を満たし, 速度場は非発散  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  となる. また渦度  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$  がゼロである流れは渦なし流,  $\boldsymbol{\omega} \neq 0$  となる流れを渦ありの流れと呼ばれる. 渦なしの流れから速度ポテンシャル  $\mathbf{v} = \nabla\phi$  を導入でき, さらに非圧縮条件にこの式を代入することにより速度ポテンシャルは Laplace 方程式を満たす.

<sup>\*2</sup> 2次元非圧縮性流体では, 速度の  $x, y$  成分を  $u, v$  とすると, 連続の式  $\partial_x u + \partial_y v = 0$  を満たすので, 速

微分方程式の斉次型, 非斉次型という観点で眺めれば, (8.1) と (8.2) は同じ方程式で, 前者が斉次方程式, 後者が非斉次方程式とみなせる. このような観点から (8.1) と (8.2) は総称して, Laplace-Poisson 方程式ともしばしば呼ばれる.

Laplace-Poisson 方程式は, 波動方程式や拡散方程式のように変数分離法を用いてそれらと同様に解くことができる. そこで, ここでは Laplace-Poisson 方程式の解法については改めて繰り返さない. 本節では, Laplace-Poisson 方程式を具体的な問題に対して解くのではなく, それに関連した話題として, 特殊関数と Green 関数を紹介する. 特殊関数は, 曲線座標系における Laplace 方程式を満たす関数として導入でき, その曲線座標系における直交関数系<sup>\*3</sup>を与える, という意味でも重要な概念である. 以下ではまず曲線座標系における Laplacian を導出し, Laplace 方程式に変数分離法を適用することにより特殊関数が導入できることをみる.

## 8.2 曲線座標系での Laplacian

ここでは幾つかの代表的な曲線座標系における Laplacian  $\nabla^2$  を導出する. 曲線座標系の Laplacian はデカルト座標系の Laplacian から座標変換を利用して導出すればよいのであるが, 計算が複雑である. ここでは幾何学を利用した直観的な方法による曲線座標系における Laplacian の導出を紹介する.

### 8.2.1 3次元極座標における Laplacian の直感的導出

3次元極座標は, 図 8.1 で示されている様に定義される.  $r, \theta, \varphi$  方向の単位ベクトルをそれぞれ  $e_r, e_\theta, e_\varphi$  とする. 勾配演算子は, ある方向の単位ベクトルとその方向へ微小距離隔たった場所と元の場所におけるスカラー関数の差から構成されている. 各方向への微小距離は, 図 8.1 からわかるように, それぞれ,  $\delta r, r\delta\theta, r\sin\theta\delta\varphi$  であるので, したがって勾配演算子  $\nabla$  は

$$\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + e_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (8.3)$$

と表される. あるスカラー関数  $V(r, \theta, \varphi)$  に (8.3) を作用させれば, 3次元極座標系におけるスカラー関数の勾配の表現が得られる:

$$\nabla V = e_r \frac{\partial V}{\partial r} + e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + e_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}. \quad (8.4)$$

度と  $u = -\partial_y \psi, v = \partial_x \psi$  を満たす流れ関数  $\psi$  が導入できる. 渦度は  $\omega = \partial_x v - \partial_y u$  なので, 渦度と流れ関数との関係は  $\partial_x^2 \psi + \partial_y^2 \psi = \omega$  となる.

\*3 5章を参照.

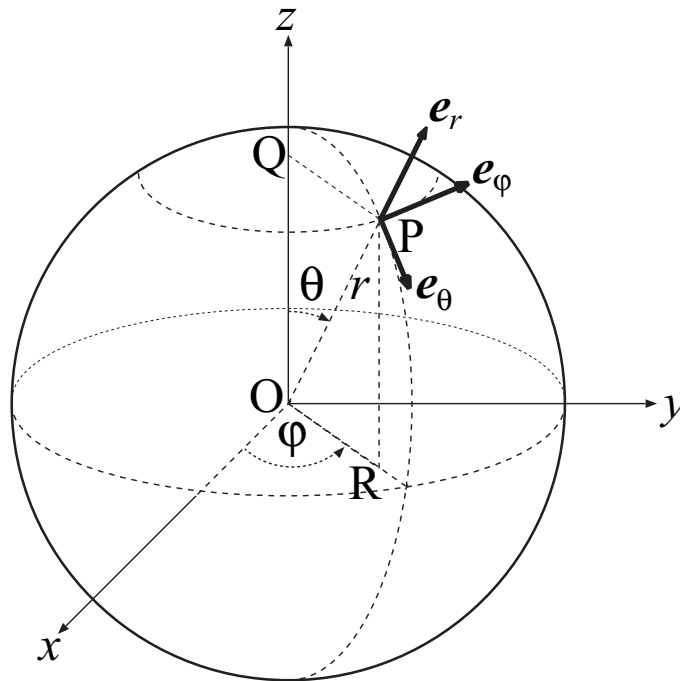


図 8.1 極座標系の定義.

次に, 3次元極座標における発散の表式を求める. あるベクトル  $\mathbf{A}$  の3次元極座標系の表現を

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_r A_r + \mathbf{e}_\theta A_\theta + \mathbf{e}_\varphi A_\varphi \quad (8.5)$$

と書くことにする. これに, (8.3) を作用させる. この時, 単位ベクトル  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$  が場所ごとに向きが異なるので, 単位ベクトルの微分が存在することに注意する. これは, デカルト座標系では現れない曲線座標系の大きな特徴である. デカルト座標系に比べて曲線座標系の発散, Laplacian などの演算子の複雑さはこの曲線座標系の単位ベクトルが場所に依存することに因っている. 微分の chain rule を適用すると,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left( \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot (\mathbf{e}_r A_r + \mathbf{e}_\theta A_\theta + \mathbf{e}_\varphi A_\varphi) \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\ &\quad + A_r \left( \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} \right) \\ &\quad + A_\theta \left( \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ &\quad + A_\varphi \left( \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \quad (8.6)$$

となる.

単位ベクトルの空間微分を図を利用して幾何学的に見積もる.

**単位ベクトルの  $r$  微分**  $r$  方向に微小距離  $\delta r$  だけずれた点における単位ベクトルは, 元の場所における単位ベクトルと方向は変わらないので, 単位ベクトルは  $r$  には依存せず,  $r$  による偏微分はゼロである:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} = 0.$$

**単位ベクトルの  $\theta$  微分** 図 8.2 の P 点における単位ベクトルとそこから  $\theta$  方向に  $r\delta\theta$  だけずれた点における単位ベクトルを考える (図 8.1, 8.2 参照).  $\mathbf{e}_\varphi$  は, P 点とずれた点でその方向を変えないので,  $\mathbf{e}_\varphi$  の  $\theta$  微分はゼロである:  $\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0$ .  $\mathbf{e}_r$  の  $\theta$  微分は, 次のようになる:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} &= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{e}_r(\theta + \delta\theta, \varphi) - \mathbf{e}_r(\theta, \varphi)}{\delta\theta} \\ &= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\delta\theta \mathbf{e}_\varphi}{\delta\theta} = \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (8.7)$$

ここで, 第 1 行目の単位ベクトルの差は, 図 8.2 より,  $\mathbf{e}_\theta$  向きであり, その大きさは, 単位ベクトルの大きさ (大きさは 1) と 2 つの単位ベクトル間の角度 ( $\delta\theta$ ) の積 (即ち, 弧の長さ) に等しいと見積もっている. 同様に,  $\mathbf{e}_\varphi$  の  $\theta$  微分も,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} &= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{e}_\varphi(\theta + \delta\theta) - \mathbf{e}_\varphi(\theta)}{\delta\theta} \\ &= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\delta\theta (-\mathbf{e}_r)}{\delta\theta} = -\mathbf{e}_r. \end{aligned} \quad (8.8)$$

**単位ベクトルの  $\varphi$  微分** 図 8.3 の P 点における単位ベクトルと, そこから  $\varphi$  方向に  $r \sin \theta \delta\varphi$  だけずれた点における単位ベクトルを考える (図 8.1, 8.3 参照). 単位ベクトルの  $\theta$  微分と同様の方法により  $\mathbf{e}_r$  の  $\varphi$  微分を見積もる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} &= \lim_{\delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\mathbf{e}_r(\theta, \varphi + \delta\varphi) - \mathbf{e}_r(\theta, \varphi)}{\delta\varphi} \\ &= \lim_{\delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \theta \delta\varphi \mathbf{e}_\varphi}{\delta\varphi} = \sin \theta \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (8.9)$$

第 1 行目から 2 行目への変形では  $\mathbf{e}_r$  の緯度円面 (PQ を含み極軸と垂直な平面) への射影が,  $\sin \theta$  であることに注意する. 同様にして,

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos \theta \mathbf{e}_\varphi. \quad (8.10)$$

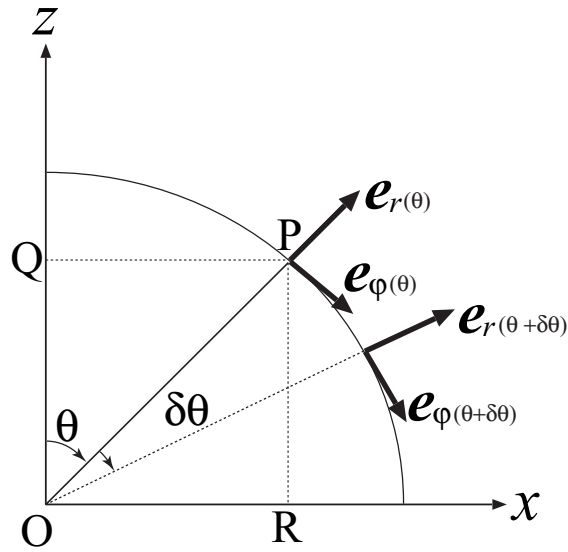


図 8.2 図 8.1 の極軸を通る (子午面) 断面. 余緯度  $\theta$  に依存して, 単位ベクトル  $e_r, e_\varphi$  の方向が変わることに注意.  $e_\theta$  は紙面の手前から奥に向かう向きで  $\theta$  に依存しない. 単位ベクトルは  $r$  には依存せず, さらに今は同じ  $\varphi$  における単位ベクトルを見ているので, 単位ベクトルの  $\theta$  依存性だけを明確に記している.

また,  $e_\varphi$  の  $\varphi$  微分は,

$$\frac{\partial e_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin \theta e_r - \cos \theta e_\theta. \tag{8.11}$$

ここで, 緯度円上で P から Q へ向く単位ベクトルを図 8.2 を参考にして  $e_r$  と  $e_\theta$  で表現すると,  $-\sin \theta e_r - \cos \theta e_\theta$  となることを用いている.

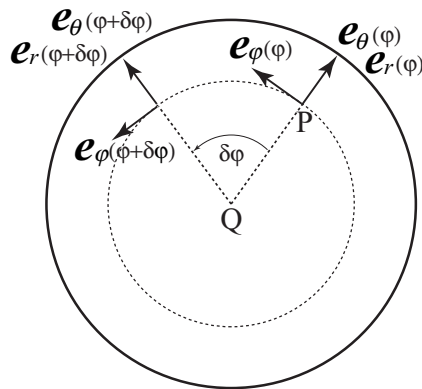


図 8.3 図 8.3 を極軸 OQ から眺めた図. 単位ベクトル  $e_r, e_\theta$  の緯度円上への射影が, 共に QP 方向で, それぞれ大きさ  $\sin \theta, \cos \theta$  であることに注意しなさい.

(8.7)–(8.11) を (8.6) に代入し, 単位ベクトルの直交性を考慮すると最終的に,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} A_r + \frac{\cot \theta}{r} A_\theta \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\end{aligned}\quad (8.12)$$

を得る.

スカラー関数  $V(r, \theta, \varphi)$  の Laplacian は, (8.4) と (8.12) を利用すると得られる:<sup>\*4</sup>

$$\begin{aligned}\nabla^2 V &= \nabla \cdot (\nabla V) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}\quad (8.14)$$

コメント 曲線座標系におけるベクトルの微分は, 単位ベクトルの微分を含むため複雑である. 公式を覚える必要はなく, 公式集なり教科書が手元にあるときにはそれを参照すればいい. 手元にそのようなものがないときには上記の考察で簡単に導くことができる. ここでは, 3次元極座標の場合のやり方を紹介したが, 3次元球座標系<sup>\*5</sup>, 3次元円柱座標系, 2次元極座標系でも同様の手法が使える (図 8.4 参照). 一生に一度はこの方法で上記座標系における勾配演算子, ベクトルの発散, スカラー関数の Laplacian を導出してみることを薦める. 上の方法で導いた曲線座標系における勾配演算子に関する公式が正しいことを公式集や教科書と比較して確認しておいてほしい. 上記のやり方の正当性が確認できる.

### 8.2.2 3次元球座標系, 3次元円柱座標系における勾配演算子に関する公式

■3次元球座標系の場合 3次元球座標系の場合の勾配演算子, 単位ベクトルの微分, ベクトルの発散, Laplacian は以下のとおりである. ここに書かれていない単位ベクトルの微

<sup>\*4</sup> (8.12) で

$$A_r = \frac{\partial V}{\partial r}, A_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, A_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad (8.13)$$

と見みなす.

<sup>\*5</sup> 3次元極座標系は極軸からの角度 (余緯度) を座標変数にしたが, 3次元球座標は赤道面からの角度 (緯度) を座標変数にした座標系である.

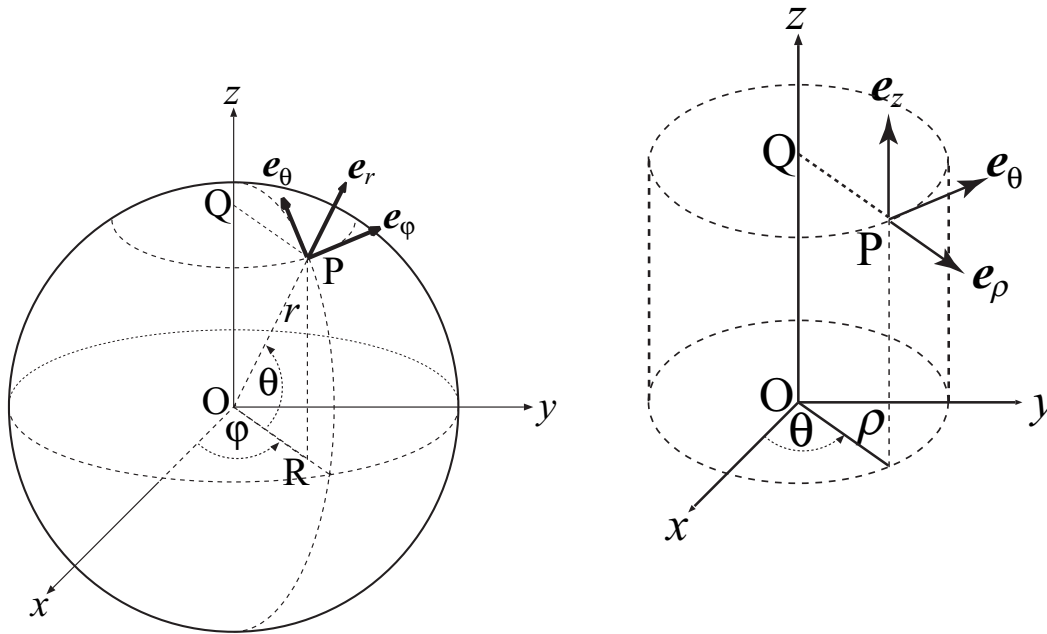


図 8.4 球座標系の定義 (左図) と円柱座標系の定義 (右図) .

分はゼロである.

$$\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + e_\varphi \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (8.15)$$

$$\frac{\partial e_r}{\partial \theta} = e_\theta, \quad \frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} = -e_r, \quad (8.16)$$

$$\frac{\partial e_r}{\partial \varphi} = \cos \theta e_\varphi, \quad \frac{\partial e_\theta}{\partial \varphi} = -\sin \theta e_\varphi, \quad \frac{\partial e_\varphi}{\partial \varphi} = -\cos \theta e_r + \sin \theta e_\theta, \quad (8.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta A_\theta) + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (8.18)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \cos \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}. \quad (8.19)$$

気象学は緯度, 経度である球座標系を使用するが, 地球電磁気学では余緯度, 経度の極座標系を用いるのが慣例のようである.

■3次元円柱座標系の場合 3次元円柱座標系の場合の勾配演算子, 単位ベクトルの微分, ベクトルの発散, Laplacian は以下のとおりである. ここに書かれていない単位ベクトル

の微分はゼロである.

$$\nabla = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (8.20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_\rho, \quad (8.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (8.22)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \quad (8.23)$$

### 8.3 Laplace 方程式と特殊関数

Laplace 方程式を 3 次元極座標系  $(r, \theta, \varphi)$  で書き下し, 変数分離法で解くと, 場の  $\theta, \varphi$  依存性は, 球面調和関数と呼ばれる特殊関数で記述される. また, 3 次元円柱座標系では, 場の動径 ( $\rho$ ) 方向依存性は, Bessel 関数と呼ばれる特殊関数で記述される. ここではこれら 2 つの座標系における Laplace 方程式を変数分離法で解く過程で現れる特殊関数について述べる.

#### 8.3.1 3 次元極座標系

3 次元極座標系における Laplace 方程式

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (8.24)$$

を変数分離法で解く. 先ず,  $V(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$  とおき, (8.24) に代入し,  $r^2 V^{-1}$  をかけると,

$$\frac{1}{Y \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right), \quad (8.25)$$

を得る. 左辺は  $\theta, \varphi$  の関数で, 右辺は  $r$  だけの関数なので両辺が等しくなるためには, 両辺は定数に等しくなければいけない. そこで, 変数分離定数を  $-\alpha$  とおくと,

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = -\alpha Y, \quad (8.26)$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \alpha R, \quad (8.27)$$

を得る.  $R \propto r^l$  と推定すると, (8.27) より  $\alpha = l(l+1)$  でなければならない.  $\alpha = l(l+1)$  を (8.26) に代入し, さらにまた変数分離法を適用する:  $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$  を仮定し,



変数分離定数  $\beta$  を導入する. このとき, (8.26) は 2 つの方程式に分離できる:

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + l(l+1) \sin^2 \theta = \beta, \quad (8.28)$$

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \beta. \quad (8.29)$$

(8.29) は,  $\varphi$  に関する場の  $2\pi$  周期性 ( $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$ ) から変数分離定数は正でなければいけない. そこで変数分離定数を  $m^2$ , ( $m$  は整数), と表して, (8.29) の解は  $c_1, c_2$  を任意定数として

$$\Phi(\varphi) = c_1 e^{im\varphi} + c_2 e^{-im\varphi}, \quad (8.30a)$$

もしくは,

$$\Phi(\varphi) = c_1 \cos m\varphi + c_2 \sin m\varphi, \quad (8.30b)$$

となる. (8.28) を整理すると,

$$\frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left\{ l(l+1) \sin \theta - \frac{m^2}{\sin \theta} \right\} \Theta = 0 \quad (8.31)$$

$$(8.32)$$

を得る. さらに,  $x = \cos \theta$  と変数変換すると, (8.31) は

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \left\{ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right\} \Theta = 0, \quad (8.33)$$

となる. (8.33) を満たす  $\Theta$  は  $l, m$  に依存するのでしばしば  $P_l^m(x)$  の形で書かれる. (8.33) は Legendre の陪微分方程式といい, その解は Legendre の陪関数と呼ばれる特殊関数である.\*6

上で求めた  $\Phi$  と  $\Theta$  を掛け合わせた解  $Y_l^m(\theta, \varphi) \equiv P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$  は (8.26) において,  $\alpha = l(l+1)$  とした方程式,

$$\underbrace{\left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}}_{\nabla^2} Y_l^m = -l(l+1) Y_l^m \quad (8.34)$$

の解であり, (8.34) の左辺の演算子は半径 1 の球面上の Laplace 演算子と解釈することもできる. したがって, (8.34) は半径 1 の球面上の Laplacian に関する固有値問題で,

\*6 (8.33) には第 1 種 Legendre 陪関数  $P_l^m$  と第 2 種 Legendre 陪関数  $Q_l^m$  がある. 関数が  $0 < \theta < \pi$ , もしくは  $|x| < 1$  で有界であるのは,  $P_l^m$  であり,  $l$  は整数で,  $l \geq m$  であることが要請される.  $l, m$  はそれぞれ次数 (degree), 位数 (order) と呼ばれる.  $Q_l^m$  は  $|x| > 1$  で有界な関数である.

$l(l+1)$  が固有値と解釈できる. 異なる固有値に属する固有関数が直交する:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta Y_l^{m*} Y_{l'}^{m'} \propto \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (8.35)$$

という性質を持つので\*7, 球面上の場の分布  $f(\theta, \varphi)$  は球面調和関数の重ね合わせによって表現できる:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (8.36)$$

これは, Fourier 級数展開の球面版に対応する. (5章も参照のこと.)  $A_{lm}$  が Fourier 係数に対応する.  $A_{lm}$  はもし  $Y_l^m$  が規格化されていれば, Fourier 係数を求める時と同じ手順で,

$$A_{lm} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta f(\theta, \varphi) Y_l^{m*}(\theta, \varphi) \quad (8.37)$$

で与えられる.

### 8.3.2 3次元球座標系

3次元極座標系と同様に変数分離法により, この座標系における Laplace 方程式を解くと, 場の  $\theta, \varphi$  依存性は球面調和関数として書くことができる.  $x = \sin\theta$  とおくことにより  $\theta$  に依存する関数が満たす方程式は, (8.33) の形への変換ができる.

### 8.3.3 3次元円柱座標系

3次元円柱座標系における Laplace 方程式,

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (8.38)$$

を変数分離法で解く. 先ず,  $V = R(\rho)\Theta(\theta)Z(z)$  とおき, (8.38) に代入する.  $\theta$  方向は  $2\pi$  周期であること,  $z \rightarrow \pm\infty$  で場が発散しないことを要請すると,

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -n^2\Theta, \quad (8.39)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = -\alpha^2Z, \quad (8.40)$$

$$\rho^2 \frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} - (\alpha^2\rho^2 + n^2)R = 0, \quad (8.41)$$

\*7 このノートの表記では球面調和関数は大きさが1に規格化されていない.

を得る. (8.41) は  $i\alpha\rho = x$  の変換により

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - n^2)R = 0, \quad (8.42)$$

に帰着できる. (8.42) は Bessel の微分方程式と呼ばれ, その解  $R$  は  $n$  に依存し,  $J_n(x)$  と書かれる.  $J_n(x)$  は Bessel 関数と呼ばれる特殊関数で,

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}, \quad (8.43)$$

で与えられる.

## 8.4 Green 関数

(8.2) を満たす場  $V$  は,  $f(\mathbf{r})$  という源により生成されると, Poisson 方程式 (8.2) は解積することができる. ところで任意の場の源は, 単位の源である delta 関数を用いて,

$$f(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (8.44)$$

と重ね合わせによって表現することができる. ここで  $\Omega$  は今考えている問題の全領域を表す. 単位の源によって生成される場を  $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$  とすると, これは

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (8.45)$$

を満たす.  $\nabla_{\mathbf{r}}^2$  は変数  $\mathbf{r}$  に関する Laplacian である. このような  $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$  は Green 関数と呼ばれる.\*<sup>8</sup> Green 関数を使って任意の源に対する場を表現してみる. (8.45) の両辺に  $f(\mathbf{r}')$  を掛けて,  $\mathbf{r}'$  に関して全領域にわたって積分する:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}}^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') d\mathbf{r}' &= \int_{\Omega} f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \\ \implies \nabla_{\mathbf{r}}^2 \int_{\Omega} f(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') d\mathbf{r}' &= f(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (8.46)$$

ここで,  $\mathbf{r}$  による微分と  $\mathbf{r}'$  に関する積分は可換であることを用いている. (8.2) と (8.46) を見比べると,

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (8.47)$$

と表せることがわかる. したがって, 任意の源の分布によって生成される場  $V$  は 単位の源によって生成される場である Green 関数の重ね合わせとして書けることがわかる.

\*<sup>8</sup> 通常〇〇関数というときには, 具体的な形を持ったものを指すが, この Green 関数は単位の源に対する応答に対して関数という名前が付されている点が通常関数と異なる.

このような Green 関数による重ね合わせの表現は, Poisson 方程式の斉次方程式である Laplace 方程式が線形微分方程式なので可能である.

このことを一般化すると Green 関数は Poisson 方程式だけでなく, 任意の線形演算子  $\mathcal{L}_r$  に対する非斉次型微分方程式

$$\mathcal{L}_r V(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \quad (8.48)$$

に対して定義することができる. 即ち,

$$\mathcal{L}_r G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (8.49)$$

を満たす Green 関数を用いて, (8.48) の  $V$  は (8.47) と書ける. Green 関数は演算子  $\mathcal{L}_r$  の形と境界条件に依存してその関数形が決まることになる.\*<sup>9</sup>

■Green 関数の例 3次元 Laplace 方程式の Green 関数を求める. Green 関数の満たす式は

$$\nabla_r^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (8.50)$$

である. 境界条件は  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$  で  $G \rightarrow 0$ ,  $(r^2 dG/dr)_{r'=0} = 0$  とする. 座標系の原点を  $\mathbf{r}'$  に移し, 場の源が球対称であることを考慮すると Green 関数は  $r \equiv |\mathbf{r}|$  のみの関数となる. そこで,  $r > 0$  において, Laplace 方程式

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dG}{dr} \right) = 0 \quad (8.51)$$

を解く. その結果,  $c_1, c_2$  任意定数として

$$G = -\frac{c_1}{r} + c_2, \quad (8.52)$$

を得る. 境界条件から,  $c_2 = 0$  が要請される. さらに,  $\mathbf{r}' = 0$  とした (8.50) を原点を中心とした半径  $\varepsilon$  の小球で積分すると,

$$4\pi \int_0^\varepsilon \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dG}{dr} \right) r^2 dr = 1,$$

$$4\pi \left[ r^2 \frac{dG}{dr} \right]_0^\varepsilon = \left( r^2 \frac{dG}{dr} \right)_{r=\varepsilon} = 4\pi c_1 = 1,$$

\*<sup>9</sup> ここでは空間微分を含んだ方程式に対して, その単位の生成源に対する応答として Green 関数を定義したが, 時間を含む微分方程式の初期値問題に対しても Green 関数の概念を拡張することができる. この場合には, 任意の初期条件は単位の初期条件の重ね合わせてして表現できるので, 微分方程式が線形であれば, 任意の初期条件に対する系の時間発展は単位の初期条件に対する応答としての Green 関数の重ね合わせとして書ける. 無限領域での 1次元拡散方程式の基本解は拡散問題に対する Green 関数と見做すことができる.

ここで, 境界条件と (8.52) を用いた. 以上より, Green 関数は

$$G = -\frac{1}{4\pi r}, \quad (8.53)$$

となる. 座標系の原点をもとに戻して最終的に

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (8.54)$$

を得る. これは電磁気学でよく知られた Coulomb ポテンシャルである. 実際に電磁気学では

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (8.55)$$

の方程式の解は,

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (8.56)$$

となることが知られているが, これはまさに (8.47) である.