第 5 章

Fourier 級数（Fourier 変換）の幾何学的意味～直交関数展開～

第 2 章では，周期関数の Foureir 級数を天下り的に導入し，それを出発点として複素 Fourier 級数展開, Fourier 積分，Fourier 変換と拡張を行ってきた．本節では，再び Fourier 級数に戻って，ベクトルという立場から, その意味 (ココロ) を説明することにする．ここに登場する考え方や概念は, ベクトルと三角関数と三角関数の積分だけ, 即ち高校の数学で習ったものだけである.

5.1　ベクトルの復習

まず, 高校生のときに習ったベクトルの復習をしておく．なお，高校生のときにはベクトル量は $\vec{A}$ などと上付きの矢印を付してスカラー量と区別した．しかし，理由は知らないが大学の講義や大学で使う教科書，研究論文ではベクトル量は $\boldsymbol{A}$ など太字であらわすことが多い．ここでもベクトル量は太字で表すことにする．[*1]

3 次元空間内の任意のベクトルを $\boldsymbol{u}$ とする．デカルト座標系では $\boldsymbol{u}$ は次のように表現される：

$$\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j} + u_z\boldsymbol{k}. \tag{5.1}$$

ここで, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルであり u_x, u_y, u_z はそれぞれ x, y, z 方向の $\boldsymbol{u}$ の成分である．[*2]

[*1] 私は大学入学当初，ベクトル量を太字で書くことを習ったときには，一生懸命アルファベットの太字がうまく書けるように練習した．ベクトルを $\boldsymbol{A}$ と表記すると高校数学を超えたもっと高級なもの，程度の高いものをやっているような錯覚を覚えたからである．皆さんもそんな経験はありませんか？

[*2] ベクトル $\boldsymbol{u}$ を高校数学では $\vec{u} = (u_x,\, u_y,\, u_z)$ と書いていたが，大学では $\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j} + u_z\boldsymbol{k}$ と単

ベクトルでは「内積」という演算が定義でき，単位ベクトルは内積に対して次のような性質を持つベクトルである：

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0,\quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0, \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=|\boldsymbol{i}|^2=1,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=|\boldsymbol{j}|^2=1,\quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=|\boldsymbol{k}|^2=1. \tag{5.3}$$

(5.2) 式の性質は,

- 異なる単位ベクトルは互いに直交する

という性質を表しており, (5.3) 式の性質は,

- 単位ベクトルの大きさは 1 である

ことを表している．成分 u_x, u_y, u_z は単位ベクトルのこのような性質を用いて，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ との内積をそれぞれ計算することにより求められる．例えば $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{i}$ の内積は,

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{i}=u_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+u_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+u_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=u_x|\boldsymbol{i}|^2.$$

従って,

$$u_x=\frac{1}{|\boldsymbol{i}|^2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{i}. \tag{5.4}$$

同様にして u_y, u_z は,

$$u_y=\frac{1}{|\boldsymbol{j}|^2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{j},\quad u_z=\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{k}. \tag{5.5}$$

と求められる．ここでは, あるデカルト座標系でベクトル $\boldsymbol{u}$ を表現したが, いま考えた座標系を例えば z 軸を回転軸にして任意の角度回転させたような座標系 (単位ベクトルが $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}$, これも直交座標系である) を考えることができる．つまり空間の中にはいろいろな直交座標系を張ることができる．そして各座標系で同じようにベクトル $\boldsymbol{u}$ を表現できる (展開できる)．このとき, 各座標系における $\boldsymbol{u}$ の成分の値は異なる (表現は異なる) が, $\boldsymbol{u}$ はあくまでも $\boldsymbol{u}$ である．<u>どういう座標系を用いて $\boldsymbol{u}$ を表現するればよいか? それは問題が最も簡単に取り扱えるような座標系を選べばよいのである.</u>

位ベクトルを使って書く．このような表記もぜひ採用してほしい．ベクトルの微分を考えるときに, この表記は便利である．デカルト座標系では単位ベクトルの空間微分は 0 なので，デカルト座標で成分表示されたベクトルの空間微分では，それは単に各成分を微分すればよかった．しかしながら，円柱座標系や極座標系では単位ベクトルの方向が場所によって異なるために，ベクトルをこれらの座標系で表示したときの空間微分は，ベクトルの成分の微分のほかに単位ベクトルの微分も残ってくる．高校数学のようにベクトルの成分表示を (u_x, u_y, u_z) と書いていると，このようなことに気づかずに大きな過ちを犯すことがあるので, 単位ベクトルまで含めた記法を使うことを強く薦める.

5.2　Fourier 級数展開のココロ

ここでは Fourier 級数展開 (4.1) 式とは関数 $f(x)$ を (5.1) 式の右辺の様にベクトルとその成分を使って表現したものでことを説明する．関数 $f(x)$ がベクトル $\boldsymbol{u}$ に，可算無限個[*3]の三角関数 $\cos(k_n x), (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$, $\sin(k_n x), (n = 1, 2, \ldots, \infty)$ が単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, に，可算無限個の Fourier 係数 $a_n, (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$, $b_n, (n = 1, 2, \ldots, \infty)$ が成分 u_x, u_y, u_z に対応する．関数を可算無限次元のベクトルと見做すことがミソである．

ベクトル - 関数 対応表		
$\boldsymbol{u}$	$\Longleftrightarrow$	$f(x)$
$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$	$\Longleftrightarrow$	$\cos(k_n x)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$
		$\sin(k_n x)$, $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$
u_x, u_y, u_z	$\Longleftrightarrow$	a_n, $(n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$
		b_n, $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$

関数 $f(t)$ が (5.1) 式の様な形に展開できるということは, 単位ベクトルに相当する三角関数が, (5.2) 式に相当する性質を持っていなければならない．そこで, まず「関数の内積」を定義する．関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との内積を (f, g) で表し,

$$(g, f) \equiv \int_{-L}^{L} g^*(x) f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{5.6}$$

と定義する．ここで, $*$ は複素共役を表す．即ち, $f(x)$ の複素共役と $g(x)$ の積を関数の定義域で積分する．今の場合は実関数を考えているので, “複素共役”を定義に持ち込まなくてもよいが, Fourier 変換のように複素数値をとる関数を取り扱うときに必要となる．(5.6) 式の定義のもと, 三角関数の内積を計算する．

$$\Big(\sin(k_m x), \cos(k_n x)\Big) = \int_{-L}^{L} \sin(k_m x)\cos(k_n x)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{5.7}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, \infty,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots, \infty).$$

$$\Big(\sin(k_m x), \sin(k_n x)\Big) = \int_{-L}^{L} \sin(k_m x)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{5.8}$$

[*3] 1, 2, 3, ... と勘定できる無限大のこと．例えば自然数全体の集合の要素の個数がこれに相当する．これに対し, 数えられない無限大（非可算無限）とは実数全体の集合の要素の個数のようなもの．

$$(m, n = 1, 2, \ldots, \infty. \text{ 但し}, m \neq n).$$

$$\Big(\cos(k_m x), \cos(k_n x)\Big) = \int_{-L}^{L} \cos(k_m x) \cos(k_n x)\, \mathrm{d}x = 0, \tag{5.9}$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \ldots, \infty. \text{ 但し}, m \neq n).$$

$$\Big(\sin(k_n x), \sin(k_n x)\Big) = \int_{-L}^{L} \sin^2(k_n x)\, \mathrm{d}x = L, \tag{5.10}$$

$$(n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

$$\Big(\cos(k_n x), \cos(k_n x)\Big) = \int_{-L}^{L} \cos^2(k_n x)\, \mathrm{d}x = L, \tag{5.11}$$

$$(n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

但し, $\cos(k_0 x)$ は恒等的に 1 であるから (5.11) 式において $n = 0$ は別に考える必要がある.

$$\Big(\cos(k_0 x), \cos(k_0 x)\Big) = (1, 1) = \int_{-L}^{L} \mathrm{d}x = 2L. \tag{5.12}$$

三角関数の内積で考えられるものは, 上にすべて列挙した. (5.7) 式〜(5.9) 式は三角関数は互いに直交している (単位ベクトルは互いに直交することに対応 : (5.2) 式参照) ことを表している. 一方 (5.10) 式〜(5.12) 式は三角関数の大きさの二乗を表している. 上で見たように三角関数は内積の大きさが 1 になっていない. 即ち単位 (ベクトル) ではないことが特徴である.*4

三角関数の上に挙げた性質を利用して，関数 $f(x)$ の (4.1) 式の表現と三角関数との内積を計算する. これは, ベクトルを (5.1) 式のように展開したときの係数を求めるときの操作と全く同様である.

*4 内積は掛け算の順番を逆にしても結果は変わらないが, 上で定義される関数の内積もこの性質を満足していることに注意.

例えば, $f(x)$ と $\sin k_n x$ との内積により $\sin k_n x$ の係数（ベクトル $f(x)$ の $\sin k_n x$ 方向の成分) b_n を取り出せる：

$$\begin{aligned}
\Big(\sin(k_n x), f(x)\Big) &= \Big(\sin(k_x x), \frac{a_0}{2}\Big) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \Big(\sin(k_n x), \cos(k_m x)\Big) + b_m \Big(\sin(k_n x), \sin(k_m x)\Big), \\
&= b_m \Big(\sin(k_m x), \sin(k_m x)\Big), \\
b_n &= \frac{\Big(\sin(k_n x), f(x)\Big)}{\Big(\sin(k_n x), \sin(k_n x)\Big)} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x. \qquad (5.13)
\end{aligned}$$

$$(n = 1, 2, \ldots, \infty.)$$

同様に $f(x)$ と $\cos k_n x$ との内積により $\cos k_n x$ の係数（ベクトル $f(x)$ の $\cos k_n x$ 方向の成分である) a_n を取り出せる (ただし, $n \neq 0$)：

$$\begin{aligned}
\Big(\cos(k_n x), f(x)\Big) &= \Big(\cos(k_x x), \frac{a_0}{2}\Big) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \Big(\cos(k_n x), \cos(k_m x)\Big) + b_m \Big(\cos(k_n x), \sin(k_m x)\Big), \\
&= a_n \Big(\cos(k_n x), \cos(k_n x)\Big), \\
a_n &= \frac{\Big(\cos(k_n x), f(x)\Big)}{\Big(\cos(k_n x), \cos(k_n x)\Big)} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(k_n x)\,\mathrm{d}x. \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

$$(n = 1, 2, \ldots, \infty.)$$

$n = 0$ の時は,

$$\begin{aligned}
\Big(\cos(k_0 x), f(x)\Big) = (1, f) &= \Big(1, \frac{a_0}{2}\Big) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \Big(1, \cos(k_m x)\Big) + b_n \Big(1, \sin(k_m x)\Big), \\
&= \frac{a_0}{2}(1, 1), \\
a_0 &= \frac{(1, f(x))}{(1, 1)/2} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (5.15)
\end{aligned}$$

である. (5.15) 式は (5.14) 式において, $n = 0$ としたものと一緒なので, (5.14) 式の定義に含めてよい. このようにして, Fourier 級数展開における Fourier 係数の公式が得られた. ((4.2) 式, (4.3) 式参照.)

これら (5.13) 式〜(5.15) 式が (5.4) 式〜(5.5) 式に相当していることは一目瞭然である. 従って, 3 次元空間内の任意のベクトルが, 互いに直交する単位ベクトルで (5.1) 式のように展開されるのと同様に, 関数を可算無限次元のベクトルと見做せば, Fourier 級数展開とは三角関数という可算無限個の規格化されていない互いに直交する関数で周期関数を展開

したものである, といえる．このような，互いに直交する関数の組を**直交関数系**と言う．もしそれらの大きさが 1 に規格化されていれば，**正規直交関数系**と呼ばれる．例えば，

$$\frac{1}{\sqrt{2L}}, \tag{5.16}$$

$$\frac{1}{\sqrt{L}}\cos k_n x, \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5.17}$$

$$\frac{1}{\sqrt{L}}\sin k_n x, \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5.18}$$

は正規直交関数系である．

さらに，(5.16)～(5.18) のうちどれか一つでもかけると，それらの重ね合わせでは周期 $2L$ の関数を表現できなくなる．3 次元空間のベクトルを表現するには単位ベクトルが，2 つ以下では不十分で 3 つ必要であったのと同様である．このように，関数を表現するのに充分な数の直交関数系は，**完全系**と呼ばれ (5.16)～(5.18) は**完全正規完全直交系**と呼ばれる．

上で見たように Fourier 係数, a_n, b_n に $1/L$ という因子が現れるのは, 関数を展開する時に用いた直交関数の大きさが 1 に規格化されていないために現れたものであり, また, Fourier 級数展開 (5.1) において a_0 に $1/2$ の因子が現れるのも $\Big(\cos(k_n x), \cos(k_n x)\Big), (n = 1, 2, \ldots, \infty)$ と $\Big(\cos(k_0 x), \cos(k_0 x)\Big)$ とで大きさが因子 2 だけ異なることに由来していることがわかる．((5.16), (5.17) との違いからも Fourier 級数展開 (5.1) における因子 1/2 の出現の理由がわかる．)

5.3 まとめ

このように Fourier 級数展開がベクトルの展開と対応していることは, 単なる偶然ではなく, 関数をベクトルと見做すことはきちんとした数学の概念である．従って, いま考えているような有限区間を定義域とする関数の展開だけでなく, 実数全体を定義域とする関数の展開も同じように考えることができる．実数全体を定義域とする関数を $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(ikx)$ という完全正規直交関数系で展開したものが Fourier 変換である.*5

三角関数以外にも直交関数系は存在し, その直交関数系を用いて関数を展開することができる．直交関数系の代表的なものとしては, **円筒関数**, **球面調和関数**と呼ばれるものがある.*6 前者は, 境界が円形をした領域内での関数の展開に最適な関数（例えば太鼓の膜の振動を表現する）で, 後者は球面上で定義された関数を展開するときに威力を発揮する．

*5 展開に用いた直交関数の個数が可算無限個か不可算無限個か, に応じて展開したときの表現が和で表されたり, 積分で表される．

*6 より詳しく知りたい人は Sturm-Liouville 型の微分方程式の解の性質（あまり数学的なものではなく, 異なる固有値に属する固有関数は直交するというような性質）を勉強して欲しい．

実際に, 大気大循環モデルと呼ばれる天気予報や地球温暖化などの気候研究に用いられている数値モデル（数値計算プログラム）では, 風速, 気温, 気圧等の物理量を（水平方向には）球調和関数で展開し, 展開係数の時間発展を計算し, それを再び重ね合わせて場の量に表現しなおす, という操作を行っている.[*7]

先に, 空間内にはさまざまな直交座標が存在し, その直交座標でベクトルを表現することができるが, どのような座標系を用いようがベクトル $\boldsymbol{u}$ の実体は変わることが無く, 単に表現の仕方が異なるだけである. どの座標系を用いるかは, 解く問題が一番簡単になる座標系を選べばよいことを注意した. これと全く同様に, 関数 $f(x)$ をどのような直交関数で展開しても $f(x)$ の実体は変わりなく, ただ表現が異なるだけであり, どのような直交関数で展開してもよいのであるが, 解く問題が一番簡単になる直交関数を選び展開するのが最も便利である. ではなぜ, Fourier 級数展開や Fourier 変換がよく用いられるのか? それは我々に最も馴み深い "波", $(\sin kx,\ \cos kx, \exp(ikx))$ の集合体という目で問題を理解・解釈できるからである.

[*7] これには, 計算の技術的な理由もあるのだが.