第 3 章

Fourier 級数の複素表現 (複素 Fourier 級数)

3.1 実 Fourier 級数からの導出

Euler の関係式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{3.1}$$

を使うと, 前章で議論した周期 $2L$ の実関数 $f(x)$ の Fourier 級数[*1]はもっと簡潔に書き下すことができる．ここでは, $f(x)$ は $-L < x < L$ の区間で定義されているとする．$c < x < c + 2L$ で定義される場合にも以下の議論は全く同様に行える．

(3.1) より

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \tag{3.2a}$$

である．(2.1) の cos, sin を Euler の関係式を用いて表せば,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \frac{e^{in\pi x/L} + e^{-in\pi x/L}}{2} + b_n \frac{e^{in\pi x/L} - e^{-in\pi x/L}}{2i} \right\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n - ib_n}{2}\, e^{in\pi x/L} + \frac{a_n + ib_n}{2}\, e^{-in\pi x/L} \right\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

ここで,

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \qquad (n = 1,\, 2,\, \ldots) \tag{3.4}$$

[*1] 前章で議論した Fourier 級数をこの章では実 Fourier 級数，Fourier 係数を実 Fourier 係数と呼ぶことにする．

と定義する．(2.2a), (2.2b) を用いると c_n は

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x - \frac{i}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x, \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{L} - i\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x, \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi/L}\mathrm{d}x, \quad (n=1,\,2,\,\ldots) \end{aligned} \tag{3.5}$$

と表現できる．また (2.2a) を用いると

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x$$

と書けるので，(3.5) を $n=0$ まで適用して

$$\frac{a_0}{2} = c_0 \tag{3.6}$$

と表現できる．さらに (3.4) の複素共役は

$$c_n^* = \frac{a_n + ib_n}{2}, \qquad (n=1,2,\ldots)$$

であるが，上式の右辺の実 Fourier 係数に (2.2a), (2.2b) を代入し，$(e^{i\theta})^* = e^{-i\theta}$ と $f(x)$ が実関数であることに注意すれば

$$c_n^* = c_{-n} \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{3.7}$$

と表現できる．(3.4), (3.6), (3.7) を用いると (3.3) は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \tag{3.8}$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}\mathrm{d}x, \qquad (n=\ldots,-2,\,-1,\,0,\,1,\,2,\ldots) \tag{3.9}$$

と書ける．(3.8) の右辺を $f(x)$ の複素 Fourier 級数もしくは Fourier 級数の複素表示と呼び，c_n は複素 Fourier 係数と呼ばれる．なお, (3.7) は $f(x)$ は実関数であるという条件とも解釈できる．[*2]

[*2] この定理は次節で証明する．
(余談)：i は純虚数 $i=\sqrt{-1}$ である．これは万国共通の記号と思っていたが, 工学系の単科大学に在籍していたときに，電気工学の分野では純虚数は j で表す，ということを知った．電気工学では i は交流電流に用いられる記号（直流電流は I）で, それと混同しないように j を用いるらしい．ちょっとショックだった...

3.2　いくつかの注意

3.2.1　複素 Fourier 級数の利点

周期関数 $f(x)$ が連続で，しかも $f'(x)$ も連続であって, さらに $f''(x)$ が区分的に連続であれば, $f'(x)$ の Foureir 級数は $f(x)$ の Foureir 級数を項別に微分して得ることができる.[*3] したがって, このように Foureir 級数を Euler の関係式を用いて複素表示しておくと, Fourier 級数展開した $f(x)$ の微分や積分が容易に行うことができるようになる．(cos や sin の微分・積分よりも指数関数の微分・積分のほうがはるかに楽であることを思い起こせばよい．)

3.2.2　Parseval の恒等式

複素 Fourier 係数 c_n を用いると, Parseval の恒等式 (2.18) は,

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)^2 \mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{3.10}$$

と表せる.

3.2.3　関数 $f(x)$ が実であることの性質

$c_n = c_{-n}^*$ は, 複素 Fourier 級数の導出の過程で得られたものであるが, 以下で見るように $f(x)$ が実であることの帰結である．(3.8) で両辺の複素共役を取ると,

$$\begin{aligned}
(\text{l.h.s.}) &= f(x)^* = f(x), \\
(\text{r.h.s.}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-in\pi x/L}.
\end{aligned}$$

n の符号を入れ替える ($n \to -n$) と,

$$(\text{r.h.s.}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}^* e^{in\pi x/L}.$$

[*3] この定理の証明は省略する.

したがって，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}^* e^{in\pi x/L}.
\end{aligned}
$$

つまり

$$c_n = c_{-n}^* \tag{3.11}$$

が導かれる．

3.2.4　複素数値をとる関数の Fourier 級数展開

今までは周期 $2L$ を持つ実関数の Fourier 級数展開を考えてきたが，周期 $2L$ を持つ 2 つの実関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$ から作られる複素数値をとる関数[*4]

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x) \tag{3.12}$$

も Fourier 級数展開や複素 Fourier 級数展開することができる．f_1，f_2 が以下のように Fourier 級数展開できるものとする：

$$f_1(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \beta_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right\}, \tag{3.13}$$

$$f_2(x) = \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \gamma_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \delta_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right\}. \tag{3.14}$$

ここで，

$$\alpha_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_1(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x, \qquad (n = 0,\, 1,\, 2, \ldots) \tag{3.15}$$

$$\beta_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_1(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x, \qquad (n = 1,\, 2, \ldots) \tag{3.16}$$

$$\gamma_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_2(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x, \qquad (n = 0,\, 1,\, 2, \ldots) \tag{3.17}$$

$$\delta_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_2(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x, \qquad (n = 1,\, 2, \ldots) \tag{3.18}$$

[*4] こういう言葉が一般的に広く使われているかどうか疑わしいが，(3.12) の定義から言い表している意味は理解できると思う．

である．(3.12) の定義から $f(x)$ の Fourier 級数表示は

$$f(x) = \frac{\alpha_0 + i\gamma_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\alpha_n + i\gamma_n)\cos\frac{n\pi x}{L} + (\beta_n + i\delta_n)\sin\frac{n\pi x}{L} \right\} \tag{3.19}$$

となるが，係数 $\alpha_n + i\gamma_n$, $\beta_n + i\delta_n$ を改めて a_n, b_n と記せば，

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right\} \tag{3.20}$$

と書ける．ここで，a_n, b_n は (3.15) ∼ (3.18) と (3.12) を使って

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x, \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots) \tag{3.21}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x, \qquad (n = 1,\ 2, \ldots) \tag{3.22}$$

と書ける．さらに Euler の関係式 (3.1) を用いれば (3.20) は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \tag{3.23}$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\pi x/L}\mathrm{d}x \qquad (n = \ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2, \ldots) \tag{3.24}$$

とも書くことができる．これらの議論は，実部，虚部が周期 $2L$ の実関数で作られる複素数値をもつ関数の場合でも，今まで議論してきた Fourier 級数や複素 Fourier 級数の表式がそのまま当てはまることを示している．

なお今の場合, Parseval の恒等式は

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right) \tag{3.25}$$

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{3.26}$$

である．したがって，(2.18) と (3.10) をそれぞれ (3.25) や (3.26) の左辺のように表現しておけば，その公式は $f(x)$ が複素数値をとる関数や実数関数の場合でも適用できる．

3.2.5　複素 Fourier 係数の導出

周期 $2L$ の実関数 $f(x)$ が (3.8) の右辺のように展開できると仮定すれば，実 Fourier 級数の実 Fourier 係数の公式を経なくても，複素 Fourier 係数の公式を導出することができる．導出の方法は，実 Fourier 係数を導いた方法と同様である．

(3.8) の両辺に $e^{im\pi x/L}$ を乗じて，x について $-L$ から L まで積分する．

$$(\text{l.h.s.}) = \int_{-L}^{L} f(x) e^{im\pi x/L}\, \mathrm{d}x.$$

$$(\text{r.h.s.}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-L}^{L} e^{i(m+n)\pi x/L}\, \mathrm{d}x.$$

ここで，

$$\int_{-L}^{L} e^{i(m+n)\pi x/L}\, \mathrm{d}x = 2L\delta_{m,-n} \tag{3.27}$$

を用いると，

$$(\text{l.h.s}) = 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{m,-n} = 2Lc_{-m}. \tag{3.28}$$

以上の結果を整理すると，複素 Fourier 係数の公式

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\pi x/L}\, \mathrm{d}x \tag{3.29}$$

が得られる．

3.3　複素 Fourier 級数の例

2.5 節の例 3 を複素 Fourier 級数で表現（計算）してみる．

$(-\pi < x < \pi)$ において $f(x) = x^2$ で与えられ, 周期 2π の周期関数の複素 Fourier 係数は,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, e^{-inx}\, \mathrm{d}x \\ &= \begin{cases} (-1)^n \frac{2}{n^2}, & (n \neq 0), \\ \frac{\pi^2}{3}, & n = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.30}$$

したがって,

$$x^2 = \cdots - \frac{2}{3^2} e^{-3ix} + \frac{2}{2^2} e^{-2ix} - \frac{2}{1^2} e^{-ix} + \frac{\pi^2}{3} - \frac{2}{1^2} e^{ix} + \frac{2}{2^2} e^{2ix} - \frac{2}{3^2} e^{3ix} + \cdots$$

3.4　Fourier 級数の応用：関数を近似する

$-L < x < L$ の範囲で与えられた周期 $2L$ の実関数 $f(x)$ は無限個の三角関数（$\exp\left[\frac{n\pi x}{L}\right]$, $n = -\infty, \ldots -1, 0, 1, \ldots \infty$）の重ねあわせで表現できるが，もし有限個の三角関数の重ねあわせで関数 $f(x)$ を表現しようとするときには，各三角関数の係数をどのように選ぶと誤差が少なくなるか, と言うことについて考えてみる.

有限個の三角関数で表現された関数を

$$g(x) = \sum_{n=-N}^{N} d_n e^{ik_n x}, \tag{3.31}$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \tag{3.32}$$

とする．$N \to \infty$ で $g(x) \to f(x)$ となる．一般に $f(x) \neq g(x)$ である．いま，$f(x)$ と $g(x)$ の間の自乗誤差を ϵ とする：

$$\epsilon = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} |f(x) - g(x)|^2 \, \mathrm{d}x. \tag{3.33}$$

どのように d_n を選ぶと ϵ を最小にできるであろうか．複素 Foureir 級数の知識を用い

ると，

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left|\sum_{n=-N}^{N}(c_n-d_n)e^{ik_nx}+\sum_{|n|>N}c_ne^{ik_nx}\right|^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-N}^{N}(c_n-d_n)(d_m-c_m)e^{i(k_n+k_m)x}\,\mathrm{d}x \\
&\quad +\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\sum_{n=-N}^{N}\sum_{|m|>N}(c_n-d_n)c_me^{i(k_n+k_m)x}\,\mathrm{d}x \\
&\qquad +\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\sum_{|n|>N}\sum_{|m|>N}c_nc_me^{i(k_n+k_m)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-N}^{N}(c_n-d_n)(d_m-c_m)\delta_{n,-m} \\
&\quad +2\sum_{n=-N}^{N}\sum_{|m|>N}(c_n-d_n)c_m\delta_{n,-m} \\
&\qquad +\sum_{|n|>N}\sum_{|m|>N}c_nc_m\delta_{n,-m} \\
&= \sum_{n=-N}^{N}|c_n-d_n|^2+\sum_{|n|>N}|c_n|^2.
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

ここで, d_n を変化させて ϵ を最小にするためには

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial d_n}=0 \tag{3.35}$$

でなければならない．(3.35) に (3.34) を代入し整理すると，

$$c_n=d_n \tag{3.36}$$

が得られる．c_n は実関数 $f(x)$ の複素 Fourier 係数なので，有限個の三角関数の重ねあわせで実関数 $f(x)$ を近似するときには，重ねあわせの係数 d_n として Fourier 係数 c_n を用いれば誤差は最小となることが上の解析からわかる．[*5]

[*5] ここで用いた関数をある既知の関数の重ねあわせとして表現しておいて，その係数の変分をとることにより関数の変分を計算するやり方は，Rayleigh-Ritz の変分法と呼ばれる．