# 第 8 章

# 波動方程式

偏微分方程式の代表例として, 拡散方程式の他に波動方程式がある. 真空中の Maxwell 方程式, たわみなく張られた弦の微小振幅振動, 浅い水の自由表面変位変動, 圧縮性流体の断熱運動など, 波動方程式として書かれる現象は非常にたくさんある. ここでは, 有限の領域内での波動方程式の解法について紹介する. 前章では無限領域での拡散方程式の解法の解法を示したが, 有限領域での拡散方程式は, ここで紹介する方法で解くことができる. 逆に無限領域内での波動方程式は, 前章で紹介した方法で解くことができる. 本章で必要な知識は, 方程式の線形性, 定数係数の線形常微分方程式の解法, 解の重ね合わせ, Fourier 級数である. 即ち, 本講義で扱った知識のほとんどが必要となる.

## 8.1 d'Alembert 解

波動方程式,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (c > 0) \tag{8.1}$$

を解く前に先ず, 波動方程式を満たす解の一般的性質について議論する. (8.1) は, 2 つの独立変数 $x$, $t$ を含むが, 次のような新しい 2 つの独立変数を導入してみよう:

$$\xi \equiv x + ct, \tag{8.2}$$

$$\eta \equiv x - ct. \tag{8.3}$$

このとき, $t$ 及び $x$ の偏微分は

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta} = c\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right), \tag{8.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \tag{8.5}$$

となる．これらを波動方程式に代入すると, (8.1) は

$$4c^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} u = 0 \tag{8.6}$$

となる．この方程式を $\xi$ について積分すると,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} u = G(\eta) \tag{8.7}$$

となり, さらに $\eta$ について積分すると,

$$u = f(\xi) + \int^{\eta} G(\eta')\,\mathrm{d}\eta' = f(\xi) + g(\eta). \tag{8.8}$$

ここで, $f$, $G$ はそれぞれ $\xi$, $\eta$ の任意関数である．また $g(\eta) \equiv \int^{\eta} G(\eta')\,\mathrm{d}\eta'$ も $\eta$ の任意関数である．(8.8) の最後の表現が波動方程式 (8.1) の一般解で, **d'Alembert 解**と呼ばれている．常微分方程式では一般解は任意定数を含んだが, 偏微分方程式の場合には一般解は任意関数の形で与えられる．初期条件と境界条件を考慮することにより, 任意関数の形が決まる．

$f(\xi)$ の意味は, 次のとおりである．$\xi$ が時刻 $t_0$ にある値 ($\phi_0$) をとる場所が時間と共にどのように移動するかを眺めてみる．$\Delta t (> 0)$ ののちに $\xi = \phi_0$ となる場所を $x_1$ とすると, それは $\phi_0 = x_1 + c(t_0 + \Delta t) = x_0 + ct_0$．したがって,

$$x_1 - x_0 = -c\,\Delta t (< 0) \tag{8.9}$$

つまり, $x_1$ は $x_0$ よりも $x$ の小さな方向に移動していることになる．つまり, $x$ の正の方向を右にとると, $\phi_0$ となる点は時間が経つにつれて左に移動することになる．その速さは, $\Delta t$ の間に $|x_1 - x_0|$ だけ移動するので, $|x_1 - x_0|/\Delta t = c$．つまり, 速さは $c$ である．従って, $f(\xi)$ は $x$ の負の方向に進行していく解を表現している．同様な考察により $\eta = \phi_0$ の点は時間と共に $x$ の正の方向に速さ $c$ で進行していく．そこで, $g(\eta)$ は $x$ の正の方向に進行していく解を表現している．このように (8.1) は $x$ の正の方向に速さ $c$ で進行していく解と, $x$ の負の方向に速さ $c$ で進行していく解の重ねあわせになっている．なお, $\xi$, $\eta$ は位相と呼ばれ, $c$ は位相が進行していく速さなので位相速度と呼ばれる．

## 8.2　波動方程式の解法の例

$0 \le x \le L$ の領域内で, 1 次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (c > 0) \tag{8.10}$$

を，境界条件

$$u(0,\, t) = u(L,\, t) = 0 \tag{8.11}$$

と初期条件

$$u(x,0) = f(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x) \tag{8.12}$$

のもとで解くことを考える.[*1] ここでは非自明な解（$u$ が恒等的にゼロでない解）でなおかつ $t \to \infty$ で $u$ が発散しない解にのみ注目する．(8.10) が $0 < x < L$ の間に張られた弦の振動の方程式を記述する場合, $u$ は弦の振幅であり, (8.11) は弦の両端が固定されている場合に相当する．また (8.12) の初期条件は, 拡散方程式の場合と異なり, 2 つあることを注意しておく.(拡散方程式では初期条件は 1 つであった.) 波動方程式は時間に関して 2 階の微分を含むので, この方程式を解いて完全に解を決定するためには, ある時間における $u$ の値に関する条件を 2 つ必要とするからである.

### 8.2.1　波動方程式の線形性

方程式 (8.10) は線形の微分方程式である．(8.10) の独立な解を $u_1, u_2$, 任意定数を $c_1, c_2$ とする．このとき， $u = c_1u_1 + c_2u_2$ が (8.10) の解であることが確かめられるので，(8.10) は線形の微分方程式である.

### 8.2.2　波動方程式の解法

(8.10) を変数分離法を用いて解く．(8.10) の解を

$$u(x,\, t) = X(x)T(t) \tag{8.13}$$

と表現し, $T(t)$, $X(x)$ がそれぞれ満たす微分方程式を求める．(8.13) を (8.10) に代入し，両辺を $c^2XT(\neq 0)$ で割ると

$$\frac{1}{c^2\,T}\,\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{X}\,\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} \tag{8.14}$$

を得る．上式の左辺は $t$ のみの関数，右辺は $x$ のみの関数なので等式が成立するには，両辺が $x, t$ に依存しない定数である必要がある．そこで，その定数（変数分離定数と呼ば

---

[*1] この問題のように境界において関数がある与えられた値を持つという条件の問題は, Dirichlet 問題と呼ばれ, いっぽう関数の微分の値が境界において指定された問題は, Neuman 問題と呼ばれる.

れる）を $\lambda$ と置く．したがって，$T$, $X$ の満たす微分方程式はそれぞれ

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2} = c^2\lambda T, \tag{8.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = \lambda X. \tag{8.16}$$

上で導かれた $T$ に関する微分方程式 (8.15) の一般解を推定法で求める．$T = e^{\alpha t}$ と解を推定し，これを (8.15) に代入し，整理すると特性方程式 $\alpha^2 = c^2\lambda$ が得られる．$T$ の従う微分方程式は線形の微分方程式なので，$\hat{T}_1, \hat{T}_2$ を任意定数として，一般解は $T = \hat{T}_1 e^{c\sqrt{\lambda}t} + \hat{T}_2 e^{-c\sqrt{\lambda}t}$ である．ここで，$\lambda > 0$ ならば, $t \to \infty$ のとき $T$ は発散し，したがって $u$ も発散する．設問にあるようにこのような発散解には興味がなく, 有限に留まる解を調べる．そこで $t \to \infty$ で $T$ が有限値に留まるために，変数分離定数を $\lambda = -k^2 (\leq 0)$ とする．変数分離定数をこのようにおくと，一般解は $k \neq 0$ のとき

$$T(t) = \hat{T}_1 e^{ickt} + \hat{T}_2 e^{-ickt} \tag{8.17}$$

と表現できる．なお, あとの便利のために (8.17) を Euler の関係式を用いて

$$T(t) = T_1 \cos ckt + T_2 \sin ckt \tag{8.18}$$

と書き直しておく．ここで, $T_1$, $T_2$ も任意定数で, $T_1 = \hat{T}_1 + \hat{T}_2$, $T_2 = i(\hat{T}_1 - \hat{T}_2)$ である．一方, $k = 0$ のとき, $T(t) = T_3 t + T_4$ である．$T_3$, $T_4$ は任意定数である．

上で導かれた $X$ に関する微分方程式の一般解を求める．$X$ に関する微分方程式 (8.16) の解として，$X = e^{\beta x}$ と推定する．この解を (8.16) に代入し整理すると，特性方程式 $\beta^2 = \lambda = -k^2$ を得る．この解は $\beta = \pm ik$ である．$X$ の従う微分方程式は線形なので, 重ね合わせの原理より一般解は

$$X(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}, \quad (k \neq 0) \tag{8.19}$$

と表現できる．ここで, $C_1$, $C_2$ は任意定数である．一方, $k = 0$ のとき, $X(x) = C_3 x + C_4$ である．$C_4$, $C_4$ も任意定数である．

次に境界条件を考慮する. 先ず, 境界条件 (8.11) は $u(x,t)$ に関する条件になっている．これを $X(x)$ に関する条件に書き換える．$x = 0$ における境界条件を $u(x,\,t) = X(x)T(t)$ に代入すると，$X(0)T(t) = 0$ となる．もし，$T(t) = 0$ であれば，$u(x,t) = 0$ となり自明な解になってしまうので，$T(t) \neq 0$ であり，したがって，$X(0) = 0$ が得られる．$x = L$ についても同様の議論を行い，$X(L) = 0$ を得る．まとめると,

$$X(0) = X(L) = 0. \tag{8.20}$$

(8.20) で導かれた条件を満足する $X(x)$ を求める．$x = 0$ を一般解 (8.19) に代入し，境界条件を考慮すると，$C_1 + C_2 = 0$ を得る．これより, $C_2 = -C_1$ である．さらに $x = L$

を一般解 (8.19) に代入し, 境界条件を考慮すると，$C_1 e^{ikL} - C_1 e^{-ikL} = 2iC_1 \sin kL = 0$ を得る．$C_1 = 0$ は自明な解なので，$C_1 \neq 0$ とすると，上の式が成り立つためには $kL = n\pi$, ここで $n$ は $k \neq 0$ であることから, 0 をのぞく整数でなければいけない．なお, $k = 0$ の時には, $X(0) = 0$ から $C_4 = 0$, $X(L) = 0$ から $C_3 = 0$, つまり $X = 0$ となり自明な解になってしまう．したがって, 題意より変数分離定数が 0 の場合は以降は考えなくてよい．$2iC_1$ を改めて $C$ とおくと，境界条件を満足する $X$ は

$$X(x) = C \sin \frac{n\pi x}{L}, \qquad (n \text{ は 0 を除く整数}) \tag{8.21}$$

となる．

重ね合わせの原理により $u(x,\, t)$ を求める．上で求めた，$T$, $X$ より解 $u$ は

$$u(x,t) = X(x)T(t) = \left\{ T_1 C \cos\left(c\frac{n\pi}{L}t\right) + T_2 C \sin\left(c\frac{n\pi}{L}t\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{8.22}$$

となる．ここで，(8.22) はある整数 $n$ に対して与えられた境界条件を満足する (8.10) の解である．異なる $n$ に対しても (8.22) は (8.10) の解であり, それらは互いに独立である．(8.10) は線形の微分方程式なので，独立な解が得られたらそれらを重ね合わせたものも，もとの微分方程式の解である．そこで，重ね合わせの原理から

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=-\infty,(n\neq 0)}^{\infty} \left\{ \hat{D}_n \cos\omega_n t + \hat{E}_n \sin\omega_n t \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ D_n \cos\omega_n t + E_n \sin\omega_n t \} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned} \tag{8.23}$$

が境界条件を満足する (8.10) の一般解である．ここで，$T_1 C$ を $\hat{D}$, $T_2 C$ を $\hat{E}$ と表現し，さらにその値は $n$ の値によって異なってもよいので，そのことを明示するために $\hat{D}_n$, $\hat{E}_n$ とした．また, $D_n = \hat{D}_n - \hat{D}_{-n}$, $E_n = \hat{E}_n + \hat{E}_{-n}$ と表現している．さらに,

$$\omega_n = \frac{cn\pi}{L} \tag{8.24}$$

と表現した．

次に初期条件を満足する $u(x,\, t)$ を求める．前設問で得られた解に初期条件を考慮する．即ち

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x). \tag{8.25}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n E_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = g(x). \tag{8.26}$$

(8.25), (8.26) の式の真ん中と最後の表現に $\sin(m\pi x/L)$ をかけて $x$ について 0 から $L$ まで積分する．（Fourier 係数の公式を導出する際に用いた方法と同じ事を行う．安直に

Fourier 係数の公式に頼ってはダメである.）このとき $\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \frac{L}{2}\delta_{mn}$ なので,

$$D_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \tag{8.27}$$

$$E_n = \frac{2}{L\omega_n}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \tag{8.28}$$

を得る．この表現を，(8.23) に代入して最終的に与えられた初期条件，境界条件を満足する (8.10) の解

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left\{\frac{2}{L}\int_0^L f(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}\,\mathrm{d}x'\right\}\cos\omega_n t \right.\\ &\left. + \left\{\frac{2}{L\omega_n}\int_0^L g(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}\,\mathrm{d}x'\right\}\sin\omega_n t\right]\sin\frac{n\pi x}{L} \end{aligned} \tag{8.29}$$

を得る．

### 8.2.3 d’Alembert 解との関係

前節で導出した方程式と d’Alembert 解との関係を見てみる．

$$\begin{aligned} \cos\omega_n t\,\sin\frac{n\pi}{L}x = \cos\frac{cn\pi}{L}t\,\sin\frac{n\pi}{L}x &= \frac{1}{2}\left\{\sin\frac{n\pi}{L}(x+ct) + \sin\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\sin\frac{n\pi}{L}\xi + \sin\frac{n\pi}{L}\eta\right\}, \end{aligned} \tag{8.30}$$

$$\begin{aligned} \sin\omega_n t\,\sin\frac{n\pi}{L}x = \sin\frac{cn\pi}{L}t\,\sin\frac{n\pi}{L}x &= \frac{1}{2}\left\{\cos\frac{n\pi}{L}(x-ct) - \cos\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\cos\frac{n\pi}{L}\eta - \cos\frac{n\pi}{L}\xi\right\}, \end{aligned} \tag{8.31}$$

である．そこで (8.29) は

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left\{\frac{1}{L}\int_0^L f(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}\,\mathrm{d}x'\right\}\left\{\sin\frac{n\pi}{L}\xi + \sin\frac{n\pi}{L}\eta\right\}\right.\\ &\left. + \left\{\frac{1}{L\omega_n}\int_0^L g(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}\,\mathrm{d}x'\right\}\left\{\cos\frac{n\pi}{L}\eta - \cos\frac{n\pi}{L}\xi\right\}\right] \end{aligned} \tag{8.32}$$

と書き直せる．つまり, d’Alembert 解が示すように, (8.29) は $\xi$ と $\eta$ の関数の和になっている．