2012 年度 地球惑星科学基礎 III レポート課題

提出期限 2013 年 2 月 8 日

提出場所：自然科学総合研究棟 3 号館 502 号室

解答に際しては, 結果の導出の過程が採点者によくわかるように詳細に記述してください.

講義では, 定数係数の線形常微分方程式の解法, Fourier 級数, 偏微分方程式に関する話題を取り扱いました. 以下の問題 1, 2 は, 偏微分方程式を解く問題なので, 講義の内容の一部しか問われていないように思うかもしれません. しかしながら, 偏微分方程式の解法には常微分方程式の解法と Fourier 級数に関する知識が必要ですので, 偏微分方程式がキチンと解けるかどうかで, 講義全体の理解度をはかることができます. 即ち, 基礎 III の単位認定には以下の 2 つの代表的な偏微分方程式をキチンと解けることが必要であると考えています. 単位が認定されるように, **丁寧に, 心を込めて**解いてくださいぇ. 問題 3 は, 講義の内容が本当に理解できていれば, これぐらいは解けて欲しいなぁという問題です.

問題 1: $0 \le x \le L$ の領域内で, $u(x,t)$ が満たす偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (\nu > 0) \tag{1}$$

を境界条件

$$u(0,\, t) = u(L,\, t) = 0 \tag{2}$$

と初期条件

$$u(x,0) = \sin \frac{\pi x}{L}, \tag{3}$$

のもとで解くことを考える. なお, ここでは非自明（u が恒等的にゼロでない）で, なおかつ $t \to \infty$ において u が発散しない解にのみ注目する. 以下の設問に答えなさい.

(i) 方程式 (1) の名称を答えなさい.

(ii) 方程式 (1) の独立な 2 つの解を, u_1, u_2 とする．u_1 と u_2 を重ね合わせた $c_1 u_1 + c_2 u_2$ (ここで, c_1, c_2 は任意定数) も (1) の解になっていることを確かめなさい.

(iii) 上記のような微分方程式の性質は何と呼ばれるか.

(iv) (1) を変数分離法を用いて解く．(1) の未知変数を

$$u(x,\, t) = X(x)T(t) \tag{4}$$

とする．$T(t)$, $X(x)$ のそれぞれが満たす微分方程式を求めなさい.（ここではとりあえず変数分離定数は負とおいてよい.）

(v) 前設問で導かれた T に関する微分方程式の一般解を求めなさい.

(vi) 設問 (iv) で導かれた X に関する微分方程式の一般解を求めなさい.

(vii) 境界条件 (2) は $u(x, t)$ に関する条件になっている．これを $X(x)$ に関する条件に書き換えなさい.

(viii) (vii) で導かれた条件を満足する $X(x)$ を求めなさい.

(ix) 重ね合わせの原理により $u(x,\, t)$ を求めなさい.

(x) 初期条件を満足する $u(x,\, t)$ を求めなさい．必要ならば以下の公式を用いてもよい:

$$\begin{gathered}
\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \frac{L}{2}\delta_{m,n}. \\
\int_0^L \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \frac{L}{2}\delta_{m,n}. \\
\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = 0.
\end{gathered} \tag{5}$$

ここで, m, n は自然数である.

(xi) (iv) の変数分離定数を正の値とゼロをのぞいた理由をそれぞれ答えなさい.（ヒント: (iv) で得られた X, T に関する微分方程式に戻って, 変数分離定数が正や 0 の場合にどのような不都合が起こるのかを議論する. 変数分離定数が正の場合は, T の $t \to \infty$ における解の振る舞いに, 変数分離定数が 0 の場合は, X について境界条件を考慮してみるとよい. ）

問題 2:　$0 \leq x \leq L$ の領域内で, $u(x,t)$ が満たす偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (c > 0) \tag{6}$$

を境界条件

$$\frac{\partial u(0,\,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L,\,t)}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

と初期条件

$$u(x,0) = \cos\frac{\pi x}{L}, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \tag{8}$$

のもとで解きなさい．なお, ここでは非自明（u が恒等的にゼロでない）で, なおかつ $t \to \infty$ において u が発散しない解にのみ注目する．最後の結果は, d'Alembert 解の形で示しなさい.[*1]

問題 3:　$u(x,t)$　が満たす以下の方程式,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{9}$$

は, Burgers 方程式と呼ばれる方程式で, ある条件のもとでの流体（気体や液体の総称）の運動を記述する方程式である．(1) との違いは, 流体が流れて物理量を運ばれる効果を表す左辺第 2 項が付け加わっている点で, この項は移流項と呼ばれる．以下の設問に答えなさい.

(i)　(9) は線形の微分方程式かもしくは非線形の微分方程式かを, その理由とともに答えなさい.

(ii)　場 $u(x,t)$ が, $-\infty < x < \infty$ の範囲で与えられているとする．このとき, $u(x,t)$ は Fourier 変換を用いて,

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k,t)e^{ikx}\,\mathrm{d}k \tag{10}$$

で与えられる.[*2] (10) を (9) に代入して整理することにより, (9) を $\hat{u}(k,t)$ に関する方程式に書き直すと,

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}(k)}{\mathrm{d}t} + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(l+m)}{2}\,\hat{u}(l)\hat{u}(m)\delta(l+m-k)\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}m = -k^2\nu\hat{u}(k), \tag{11}$$

[*1] $x + ct$, $x - ct$ を変数とする関数の和で表す.

[*2] 講義のときと $1/\sqrt{2\pi}$ の因子だけ異なっていることに注意.

となることを示しなさい．ここで, t の依存性は省略した．(ヒント:テキストの6 章で, 同様なことを行いました．)

(iii) 前設問で得られた方程式と, テキストの (6.12) を比較して, この方程式の特徴を述べなさい.

(iv) Cole-Hopf 変換,

$$u = -2\nu \frac{\partial}{\partial x} \ln \phi, \tag{12}$$

を行うことにより, Burgers 方程式は, ϕ に関する拡散方程式,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \tag{13}$$

になることを示しなさい.

ヒント: Burgers 方程式は,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{1}{2}u^2)}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{14}$$

と書ける．これに, (12) を代入して,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{-2\nu \frac{\partial}{\partial t} \ln \phi + 2\nu^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \phi\right)^2 + 2\nu^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \phi\right\} = 0, \tag{15}$$

を導く．$\{\bullet\}$ の中身は, x によらない定数となるが, これをゼロとおいて結果の式を整理すると, 求めたい式が得られる.

(v) テキストの (6.20) を利用し, Burgers 方程式の解が,

$$u(x,t) = -2\nu \frac{\partial}{\partial x} \ln \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi \nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4\nu t} - \frac{1}{2\nu}\int_{-\infty}^{x'} u(x'', 0)\,\mathrm{d}x''\right\} \mathrm{d}x'\right], \tag{16}$$

となることを導きなさい.