地球惑星科学基礎III 演習 (1)

2012 年 10 月 12 日配布

1 地球惑星科学基礎 I の復習

i) 次式で定義されるスカラー場 $\psi(x, y, z)$,

$$\psi(x, y, z) \equiv \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

とベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$,

$$\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{\nabla}\psi,$$

に関して, 以下の質問に答えなさい.

a) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の具体的表式を求めなさい.

b) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の発散 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}$ を求めなさい.(ただし, 原点 $\boldsymbol{r} = 0$ は除く.)

c) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ を求めなさい.(ただし, 原点 $\boldsymbol{r} = 0$ は除く.)

d) スカラー場 ψ の特徴をとらえて xy 平面上で図示しなさい.

e) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の特徴をとらえて xy 平面上で図示しなさい.

2 Euler の関係式

i) 以下の公式を Euler の関係式を用いて証明しなさい.

a) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha$

c) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

d) $\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$ を証明しなさい．ここで, n は自然数とする．(de Moivre の公式)

ii) $\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ を証明しなさい.

iii) 以下の積分を計算しなさい.

a) $\int_0^\infty e^{-z}\sin z\,\mathrm{d}z$

b) $\int_0^\infty e^{-z}\cos z\,\mathrm{d}z$

3　微分方程式について

i) 以下の微分方程式は線形の微分方程式かそれとも非線形の微分方程式か答えなさい.

a) 質量 m の質点がバネ定数 k の線形バネにつながれている場合，質点の平衡位置からの変位 x が従う運動方程式,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+kx=0. \tag{1}$$

b) 重力場中で長さ l の伸びない紐の端に 質量 m のおもりがつるされているとする．この振り子（重り）の平衡点からの振れ角 θ が従う運動方程式

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+mg\sin\theta=0. \tag{2}$$

ここで，g は重力加速度である.

c) 方程式 (2) で振れ角 θ が小さい場合

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+mg\theta=0 \tag{3}$$

d) 同じバネ定数 κ を持った 3 つの線形バネにつながれた 2 つの質点の運動方程式（連成振動の方程式）：

$$\begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_1=\kappa\left(x_2-2x_1\right), \\ m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_2=\kappa\left(x_1-2x_2\right). \end{cases} \tag{4}$$

ここで, κ は正の定数である.

e) 真空中の Maxwell 方程式

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{E}=0, \\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0, \\ c^2\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}. \end{cases} \tag{5}$$

ここで, c は光速である.

ii) 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x$$

が

$$x=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$$

の解を持つことを示しなさい．ここで, A, B は任意定数である．またこの解が以下の形に書けることを示しなさい：

$$\begin{aligned} x &= C\cos(\omega t+\alpha), \\ &= D\sin(\omega t+\beta), \end{aligned}$$

さらに, C, D, α, β を A, B で表現しなさい.

補足： C, D は**振幅**, α, β は**位相**と呼ばれる.