第 9 章

Laplace 変換

9.1 定義

ある関数 $F(t)$ の Laplace 変換 (Laplace transform) は以下のように定義される:

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)\, r dt. \tag{9.1}$$

ここで, s は複素数である.

Fourier 変換との類似性 ：ある関数 $F(t)$ の Fourier 変換は

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} F(t)\, \mathrm{d}t \tag{9.2}$$

と書かれる.[*1] 積分範囲の下限の違いをとりあえず無視すれば, Fourier 変換と Laplace 変換との違いは, 被積分関数に含まれる指数関数の指数の違いだけである. この指数が純虚数の場合が Fourier 変換で, それが複素数の場合が Laplace 変換になっているのがわかるであろう. Fourier 変換が Fourier 級数のナイーブな拡張であったが, Laplace 変換は Fourier 変換の拡張と考えることができる.

積分の下限, 及び応用 ：Laplace 変換を, Fourier 変換と同様に,

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} F(t)\, \mathrm{d}t. \tag{9.3}$$

のように, 独立変数に関して $-\infty$ から ∞ の積分で定義している本もある. もし変換される関数 $F(t)$ が

$$F(t) = 0,\ (t < 0) \tag{9.4}$$

[*1] 先に導入した Fourier 変換の公式 (4.10) は, 正変換, 逆変換が対称的な形になるように書いた. ここでは Laplace 変換と Fourier 変換の類似性を強調するために, あえて $1/\sqrt{2\pi}$ が現れない形に書いた.

を満足する時には, 両者の定義は一致することがわかる. このとき, (9.1) のことを片側 Laplace 変換と呼ぶ.

Laplace 変換の定義を t の関数を用いて書いたのは, Laplace 変換が特に時間発展問題の微分方程式の解法に強力な武器となることを意識しているためである. 時間発展の微分方程式では, 一般解に含まれている任意定数は, 初期条件によってその値を決定することができた. Laplace 変換を用いて微分方程式を解く場合には, Laplace 変換する際の積分の下限 $t = 0$ に初期条件の情報が含まれるようになっており, それによって任意定数の値が決定されるようになっている.[*2]

s に関する制限 : Laplace 変換の積分が存在するためには, s は任意の複素数ではなく, ある制限が設けられる. 片側 Laplace 変換の場合には $t \to \infty$ で被積分関数が 0 に収束するように選ばれる.

逆 Laplace 変換 : Laplace 変換の定義式 (9.3) で, $s = \sigma + i\omega$ (ここで, σ, ω は実数) とおくと, (9.3) は

$$\begin{aligned} f(\sigma + i\omega) = \mathcal{L}\left\{F(t)\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma+i\omega)t} F(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} F(t) e^{-\sigma t}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{9.5}$$

である. したがって, $f(\sigma + i\omega)$ は $F(t)e^{-\sigma t}$ の Fourier 変換とみなすことができる. 逆 Fourier 変換により, $F(t)e^{-\sigma t}$ は

$$F(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(\sigma + i\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

と表現できる. すなわち,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+i\omega)t} f(\sigma + i\omega)\,\mathrm{d}\omega \tag{9.6}$$

となる. もしくは,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} f(s)\,\mathrm{d}s \tag{9.7}$$

となる. (9.7) は逆 Laplace 変換の公式である.

[*2] Fourier 変換の公式では変換される関数の独立変数を x と書いた. これは空間変数の x を意識して, もしくは変換される関数が場の量であることを意識して, そのように書いた. 変換される関数が空間変数を独立変数にもつ場合には Foureir 変換後の関数は波数の関数となる. 時系列データ, 従って時刻 t の関数, を変換することも可能であり, その場合には変換される関数は t の関数として書かれる事が慣例である. この場合は Foureir 変換後の関数は周波数の関数となる.(9.2) 参照.

表 9.1　Laplace 変換の代表例

$F(t)$	$\mathcal{L}\{F(t)\}$
a	$\dfrac{a}{s},\qquad \mathrm{Re}[s]>0$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a},\qquad \mathrm{Re}[s]>a$
$\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2},\qquad \mathrm{Re}[s]>0$
$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2},\qquad \mathrm{Re}[s]>0$
$t^n,\ \ n=1,2,3,\ldots$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}},\qquad \mathrm{Re}[s]>0$
$f'(t)$	$s\mathcal{L}\{f(t)\}-f(0)$
$f''(t)$	$s^2\mathcal{L}\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$

逆 Laplace 変換の計算には複素積分の知識が必要で, かなり面倒である．代表的な関数の Laplace 変換, 逆 Laplace 変換の例が数学公式集に載っているので, 実際にはそれを利用する場合が多い.

9.2　Laplace 変換の幾つかの例

Laplace 変換の代表例を Table9.1 にあげておく.
その他の Laplace 変換, Laplace 逆変換は数学公式集を参照するとよい.

9.3　Laplace 変換を用いた微分方程式の解法 ～例題～

Laplace 変換を用いて微分方程式 $f''(t)+f(t)=t$ を初期条件 $f(0)=0, f'(0)=2$ のもとに解く.[*3]

与えられた微分方程式の両辺を Laplace 変換する:

$$\mathcal{L}\{f''(t)+f(t)\}=\mathcal{L}\{t\}. \tag{9.8}$$

前節で与えた公式を参考にすると,

$$s^2\mathcal{L}\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)+\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{s^2}. \tag{9.9}$$

[*3] この問題は振動数 $\omega=1$ の単振動の微分方程式に, 時間に比例する外力項が加わった, 強制振動問題の微分方程式である．通常の方法で解いて見て, Laplace 変換による解法と答えが一致することを確かめておくことを勧める.

従って,

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{2s^2+1}{s^2\left(s^2+1\right)} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1}. \tag{9.10}$$

上式を逆 Laplace 変換する:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}. \end{aligned} \tag{9.11}$$

やはり前節で与えた公式より逆変換は,

$$f(t) = t + \sin t, \tag{9.12}$$

となる.

Laplace 変換を用いて微分方程式を解く場合には, ここで述べた例のように公式集を参照して解くことが多い. また, 正変換に比べて逆変換は計算が複雑なので, 公式集を参照しない場合には, Laplace 変換された形の解（上の例では (9.10)）で, 方程式がとけて解が与えられたと満足する場合が多い.

第 10 章

熱力学の数学

熱力学は熱に関する現象を巨視的な少数個（基本的には 2 個）の物理量で記述するように構成した学問である．従って，考える対象の状態を表す物理量は 2 変数関数となり，その状態変化は偏微分で表現されることが多い．偏微分の計算には，常微分の計算のときとは違って少々注意が必要である．この章では

i) 偏微分の計算における注意点
ii) 偏微分の計算に便利な表記法とその使い方

について解説する．なお，この章の知識や方法は，熱力学のみならず流体力学（気象学）における座標変換の際にも極めて役に立つものである．[*1]

10.1 状態方程式

温度 T, 圧力 p, 体積 V を結びつける関係式は状態方程式と呼ばれる．熱力学において最もよく知られた状態方程式は理想気体の状態方程式

$$pV = nRT \tag{10.1}$$

である．ここで，n はモル数，R は気体定数である．理想気体は気体の密度が薄いときにはよい近似で成り立つといわれており，気象学でも大気を理想気体として扱う．理想気体以外にも van der Waals の状態方程式

$$(p+a)(V-b) = nRT \tag{10.2}$$

[*1] 気象学では，鉛直方向の座標系として，地面から計った幾何学的な高度を用いる以外に，気圧や温位（気圧の変化を考慮した温度であり，エントロピーと関係した量）を鉛直座標に用いることがしばしばある．このような座標系を用いるときには，幾何学的な座標から変数変換を行う．その際にこの章の知識が必要となる．

も知られている．これは実在の気体の状態をよく表す式として知られている．

より一般的には状態方程式は，その定義から，p, V, T を変数とする任意関数 f が，以下のようにかけるとき，それを状態方程式と呼ぶ：

$$f(p, V, T) = 0. \tag{10.3}$$

実際に (10.1), (10.2) は (10.3) の形にかける．

(10.3) は次の様な関係式を満足する：

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -1 \tag{10.4}$$

(10.4) **の証明**　(10.3) の全微分は

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{V,T} \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{T,p} \mathrm{d}V + \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{p,V} \mathrm{d}T = 0 \tag{10.5}$$

である．ここで，$\mathrm{d}p = 0$ の状態を考える．このとき，(10.5) から dV/dT を作ると，これは $(\partial V/\partial T)_p$ と解釈できる．そこで，

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{p,V}}{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{T,p}}$$

同様に，$\mathrm{d}V = 0$ の状態を考える．このとき，(10.5) から dT/dp を作ると，これは $(\partial T/\partial p)_v$ と解釈できる．また $\mathrm{d}T = 0$ の状態を考える．このとき，(10.5) から dp/dV を作ると，これは $(\partial p/\partial V)_T$ と解釈できる．これらの量はそれぞれ，

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}p} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{V,T}}{\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{p,V}},$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{T,p}}{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{V,T}}$$

以上より，(10.4) が証明できた．

(10.4) は合成関数の微分と対応付けると一見奇妙である．g は x の関数とし，さらに x は t の関数であるとする．このとき g を t で微分するには

$$\frac{\mathrm{d}g(x(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \tag{10.6}$$

となる．ここで，微分記号を分数のように扱うと，dx があたかも約分され，右辺と左辺が等しいことは理にかなっているように見える．

しかしながら，$\partial *$ を微分記号 $\mathrm{d}*$ のように扱うと，(10.4) の値は -1 でなく 1 になる．このことは，偏微分の場合には微分記号を分数のように扱ってはいけないことを表している．偏微分の計算をする場合には一定と置く変数に注意しなければいけない．この失敗は実は，一定に置く変数を無視して偏微分記号をあたかも分数のように扱かったために起こったのである．

10.2 Jacobian

この節では，偏微分の計算を容易にする表記について紹介する．$f,\,g$ を $x,\,y$ を変数とする関数であるとする．このとき，Jacobian $J(f,\,g)$ を以下のように定義する：

$$J(f,\,g) \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x . \tag{10.7}$$

Jacobian $J(*,*)$ はしばしば $\partial(*,*)$ と書かれることもある．Jacobian の性質として重要なものは，skew symmetry と呼ばれるものである：

$$J(f,\,g) = -J(g,\,f). \tag{10.8}$$

Jacobian $J(*,*)$ は分数のように取り扱えることが次の例からわかる．Jacobian を用いると，

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = \frac{J(p,\,T)}{J(V,\,T)} \tag{10.9}$$

とかける．実際，p は $V,\,T$ の関数なので，

$$\begin{aligned} J(p,T) &= \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial T}\right)_V}_{=1} - \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_T}_{=0} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T , \\ J(V,T) &= \left(\frac{\partial V}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial T}\right)_V - \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_V \\ &= 1. \end{aligned}$$

同様に，

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = \frac{J(T,\,V)}{J(p,\,V)}, \tag{10.10}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{J(V,\,p)}{J(T,\,p)}. \tag{10.11}$$

(10.9)〜(10.11) と skew symmetry より

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p &= \frac{J(p,\,T)}{J(V,\,T)} \times \frac{J(T,\,V)}{J(p,\,V)} \times \frac{J(V,\,p)}{J(T,\,p)} \\ &= (-1)\frac{J(p,\,T)}{J(T,\,V)} \times (-1)\frac{J(T,\,V)}{J(V,\,p)} \times (-1)\frac{J(V,\,p)}{J(p,\,T)} \\ &= -1 \times \frac{J(p,\,T)}{J(T,\,V)} \times \frac{J(T,\,V)}{J(V,\,p)} \times \frac{J(V,\,p)}{J(p,\,T)}. \end{aligned} \tag{10.12}$$

ここで，Jacobian $J(*,*)$ は約分されて，(10.4) に帰着される．

10.3　Legendre 変換

来年度までの宿題！