地球惑星科学基礎III 演習 (7)

2011 年 12 月 9 日配布

1　Fourier 変換に関する問題

関数 $f(x)$ の Fourier 変換, 逆変換をそれぞれ $\hat{f}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$, $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(k)\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}\,\mathrm{d}k$, と定義する.

i) a) 次の関数の Fourier 変換を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \tag{1}$$

b) $a = 3$ として, $f(x)$ とその Fourier 変換を図示しなさい.

ii) a) 前問の結果を用いて, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ka\ \cos kx}{k}\,\mathrm{d}k$ の値を見積もりなさい.

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$ の値を求めなさい.

iii) a) $f(x)$ が偶関数の時, Fourier 変換の公式は以下のように与えられることを示しなさい.

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \hat{f}(k)\cos kx\,\mathrm{d}k. \tag{3}$$

ヒント： $\hat{f}(k)$ が (2) で与えられるとき, $\hat{f}(k)$ は偶関数か奇関数か.

b) $f(x) = e^{-m|x|}$, $m > 0$ の Fourier 変換を求めなさい.

c) 前設問の結果を用いて,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2 + m^2}\,\mathrm{d}k = \frac{\pi}{2m}e^{-mx}, \qquad (m > 0,\ x > 0)$$

を示しなさい.

iv) Fourier 変換に関する以下の性質を証明しなさい. α, β, γ は定数とする.

a) $\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha\mathcal{F}\{f(x)\} + \beta\mathcal{F}\{g(x)\}$

b) $\mathcal{F}\{f(x-\alpha)\} = e^{-ik\alpha}\mathcal{F}\{f(x)\}$

c) $\mathcal{F}\{e^{-\alpha x}f(x)\} = \hat{f}(k-i\alpha)$

d) $\mathcal{F}\{f(\gamma x)\} = \dfrac{1}{|\gamma|}\hat{f}\left(\dfrac{k}{\gamma}\right), \qquad (\gamma \neq 0)$

e) $f(x)$ が微分可能で, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ のとき, $\mathcal{F}\left\{\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right\} = ik\mathcal{F}\{f(x)\}$