# 地球惑星科学基礎III 演習(6)

2011年11月11日配布

## 1　複素Fourier級数に関する問題

i) $-L < x < L$ の範囲で定義される周期 $2L$ の周期関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \tag{1}$$

で与えられるとき, $c_n$ が

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\pi x/L}\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

であることを証明しなさい. (実Fourier級数を経ずに, (1)を出発点とした議論を行う.)

ii) $-L < x < L$ の範囲で $f(x) = e^{kx}$ と与えられる周期 $2L$ の関数の複素Fourier級数表示は

$$f(x) = \frac{\sinh(kL)}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n \frac{k + i(n\pi/L)}{k^2 + (n\pi/L)^2} e^{in\pi x/L} \tag{3}$$

となることを証明しなさい．ここで $k$ は $k > 0$ である．

iii) $0 < x < T$ において $f(x) = \frac{ax}{T}$ で与えられ, 周期 $T$ の関数（こぎり波）を図示し, さらに複素Fourier級数を求めなさい．ただし，$a$ は正の実数とする．

iv) $0 < x < 1$ において $f(x) = A \sin \pi x$ で与えられ, 周期 1 で定義される関数の複素Fourier級数を求めなさい．ここで $A$ はある定数とする．

v) $-\pi < x < \pi$ の範囲で, $f(x) = \cos \alpha x$ の関数について, 以下の問いに答えなさい. ここで, $\alpha$ は整数でないとする.

a) $f(x)$ の複素Fourier級数表示を求めなさい.

b)

$$\pi \cos \alpha x = 2 \sin \alpha\pi \left\{ \frac{1}{2\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\alpha \cos nx}{\alpha^2 - n^2} \right\} \tag{4}$$

を証明しなさい.

c) 前設問で $x=\pi$, $\alpha=z$ とおくことにより,

$$\pi \cot \pi z - \frac{1}{z} = 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2-n^2}$$

となる．この式が,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \ln\left(\frac{\sin \pi z}{\pi z}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \tag{5}$$

となることを示しなさい.

d)

$$\sin \pi z = \pi z \Pi_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \tag{6}$$

を証明しなさい.

vi) $-L<x<L$ の範囲で $f(x)$ で定義され, 周期 $2L$ の実関数 $f(x)$ の Parseval の等式

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)^2 \mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{7}$$

を実 Fourier 級数の Parseval の恒等式を使って証明しなさい.

vii) $-L<x<L$ の範囲で $f(x)$ で定義され, 周期 $2L$ の関数 $f(x)$ の Parseval の等式

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{8}$$

を証明しなさい．(注意：ここで $f(x)$ は実関数ではない.)

viii) $a$ を整数でない実数とする．関数 $f(x)=e^{iax}$, $(-\pi<x<\pi)$, (周期 $2\pi$) を複素 Fourier 級数に展開せよ．さらに Parseval の恒等式を用いて

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 a\pi}$$

を証明しなさい．注意：この問題では $f(x)$ は複素関数なので，Parseval の恒等式は

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{9}$$

であることに注意しなさい.