第 2 章

Fourier 級数

本章と引き続く幾つかの章で, Fourier 級数と Fourier 変換, それらの応用について述べる. Fourier とはフランス人 Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830) のことで, 彼は数学者, 技術者として活躍し, Napoleon に仕えた人物である. 1822 年に熱伝導に関する書籍（Theórie analytique de la chaleur）を出版し, その中で**全ての関数は三角関数の和によって表現される（三角関数に分解される）**という原理を提唱した. これが Fourier 級数である. Fourier の原理は提唱以後, 精密化, 拡張を経てきた. Fourier 変換は彼の栄誉にちなんで名づけられたものである.

本章と次章では周期関数に関する Fourier の原理であるところの Fourier 級数について述べ, 4 章で周期を持たない関数に関する Fourier の原理である Fourier 変換を扱うことにする. Fourier 級数は物理学（地球惑星科学も含む）や工学で広く応用されていて，方程式の求解や実験・観測データの解析の手段として広く用いられている.

2.1 周期関数

関数 $f(x)$ が全ての x, $(x \in \mathbb{R})$, に対して, $f(x+T) = f(x)$ であるならば, $f(x)$ は T の周期をもつ, もしくは周期 T で周期的である，と呼ばれる. ここで T は正の定数である. 最小の T は最小周期 (the least period) もしくは, 単に $f(x)$ の周期と呼ばれる.

例 1： 関数 $\sin x$ は, $2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi, \cdots$ の周期をもつ. なぜならば, $\sin(x+2\pi),\ \sin(x+4\pi),\ \sin(x+6\pi), \cdots$ は全て $\sin x$ と同じ値を持つからである. しかしながら, 2π が $\sin x$ の (最小) 周期である.

例 2： $\sin nx$ もしくは $\cos nx$ の周期は $2\pi/n$ である. ここで, n は正の整数である.

例 3： $\tan x$ の周期は, π である.

例 4： 定数は任意の正の周期を持つ.

2.2　Fourier 級数

実関数 $f(x)$ は $-L < x < L$ の範囲内で定義され, その定義域の外側では $f(x+2L) = f(x)$ とする．すなわち, $f(x)$ は $2L$ の周期をもつ．このとき $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{2.1}$$

と表現できる．(2.1) の右辺は $f(x)$ の Fourier 級数もしくは Fourier 級数展開と呼ばれる．ここで a_n, b_n は Fourier 係数と呼ばれ

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x, \quad (n = 0, 1, 2\cdots) \tag{2.2a}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x, \quad (n = 1, 2\cdots) \tag{2.2b}$$

で与えられる．

2.3　Fourier 係数の導出

Fourier 係数は以下の様な方法で求められる．

■a_n の導出（ただし, $n \neq 0$）　(2.1) の両辺に $\cos\frac{n\pi x}{L}$ を乗じて，x について $-L$ から L まで積分する．このとき $n \in \mathbb{N}$ に対して[*1]

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = 0, \tag{2.3}$$

および，$m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = L\delta_{m,n}, \tag{2.4}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2.5}$$

ここで $\delta_{m,n}$ は Kronecker のデルタと呼ばれ,

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0, & (m \neq n \text{ のとき}), \\ 1, & (m = n \text{ のとき}), \end{cases} \tag{2.6}$$

で定義される量である．上記の関係式を用いると，a_n についての公式 (2.2a) が得られる．

[*1] 自然数の集合を $\mathbb{N}$ で表す．$n \in \mathbb{N}$ は n が自然数 $\mathbb{N}$ の集合の要素であることを表す．すなわち, n が実数であることを表している．

■b_n の導出（ただし, $n \neq 0$） a_n の導出と同様にして，(2.1) の両辺に $\sin \frac{n\pi x}{L}$ を乗じて x について $-L$ から L まで積分すると，b_n に関する公式 (2.2b) が得られる．

■a_0 の導出 (2.1) の両辺を関数の定義域全体にわたって積分し，その結果を $a_n, (n \in \mathbb{N})$ の公式と見比べると，上で求めた a_n は $n = 0$ に対しても拡張できることがわかる．

注意： Fourier 係数の導出の際には，添え字の扱いに注意が必要である．例えば，a_n を求めるために (2.1) の両辺に $\cos \frac{n\pi x}{L}$ を乗じると

$$f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} = \cos \frac{n\pi x}{L} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \right\} \tag{2.7}$$

となるが，右辺の $\cos \frac{n\pi x}{L}$ を単純に総和記号の中に入れることはできない．なぜなら，(2.7) の右辺の総和に関係する項を総和の定義にしたがって表現すると

$$\begin{aligned}
&\cos \frac{n\pi x}{L} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \right\} \\
=&\cos \frac{n\pi x}{L} \left(a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + b_1 \sin \frac{\pi x}{L} \right. \\
&\qquad + a_2 \cos \frac{2\pi x}{L} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{L} \\
&\qquad + \dots \\
&\qquad \left. + a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} + \dots \right) \\
=&a_1 \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{\pi x}{L} + b_1 \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{\pi x}{L} \\
&+a_2 \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{2\pi x}{L} + b_2 \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} \\
&+ \dots \\
&+a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} + \dots
\end{aligned}$$

最後の表現を総和の記号を使って表すと，

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \tag{2.8}$$

である．添え字に注意を払わないで，単純に $\cos \frac{n\pi x}{L}$ を総和の中に入れてしまうと

$$\begin{aligned}
&\cos \frac{n\pi x}{L} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \right\} \\
&\to \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos^2 \frac{n\pi x}{L} + b_n \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \right)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

となってしまう．(2.8) と (2.9) は明らかに異なる．(2.7) において総和記号の中で n は $1 \sim \infty$ まで変化する整数であり, 整数を表すものであれば m でも k でもよい．（その場合には，総和記号はそれぞれ $\sum_{m=1}^{\infty}$ や $\sum_{k=1}^{\infty}$ となる.）一方，総和記号の前にある $\cos\frac{n\pi x}{L}$ の n はある特定の整数を表している．$\cos\frac{n\pi x}{L}$ の n と総和記号の n は別の意味を持っているので，後者を別の記号を使って書いておく方がいい.

このような混乱を避ける別の方法としては，(2.1) の両辺に $\cos\frac{m\pi x}{L}$ や $\sin\frac{m\pi x}{L}$ を乗じて，x について $-L$ から L まで積分し，a_m, b_m を導出し，結果の m を n におきかえる，という方法もある.

2.4 Fourier 級数の例

以下の例では関数の Fourier 級数を示すと共に, Fourier 級数の一つの応用例として Fourier 級数を用いた無限級数和の計算を示す.

例 1　$f(x) = x,\ (-\pi < x < \pi)$, 周期 2π

Fourier 係数の公式より,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\cos\frac{n\pi x}{\pi}\,\mathrm{d}x = 0,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\sin\frac{n\pi x}{\pi}\,\mathrm{d}x = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

したがって,

$$f(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right). \tag{2.10}$$

上式で $x = \pi/2$ とおけば,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} \tag{2.11}$$

という級数が得られる．この級数は Leibniz の級数，もしくは Euler の級数と呼ばれるものである．このようにして無限級数の和が Fourier 級数を用いて計算できる.

Fourier 級数展開によって関数が表現できることを示すために，この例で議論した関数 $f(x) = x$ およびその Fourier 級数展開 (2.10) の右辺の最初の幾つかの項ま

でを図 2.1 に示した．項が増えるにしたがって，級数は $f(x)$ に近づいていくのがわかる．

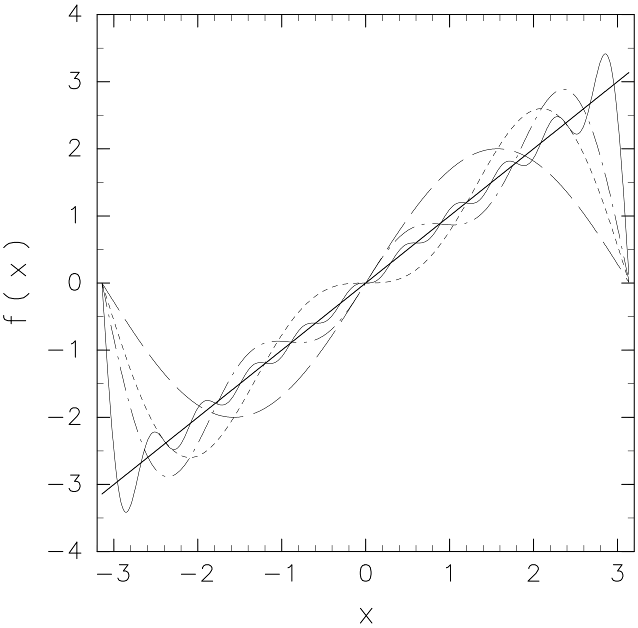

図 2.1　太実線は $f(x) = x$. 破線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の初項を，点線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の第 2 項まで，一点破線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の第 3 項まで，細実線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の第 10 項目までを図示した.

例 2　$f(x) = |x|$, $(-\pi \leq x \leq \pi)$, 周期 2π

例 1 と同様にして

$$a_0 = \pi,$$
$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ が偶数} \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & n \text{ が奇数} \end{cases}$$
$$b_n = 0.$$

したがって，

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right). \tag{2.12}$$

上式で $x = 0$, または $x = \pi$ とおけば,

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots . \tag{2.13}$$

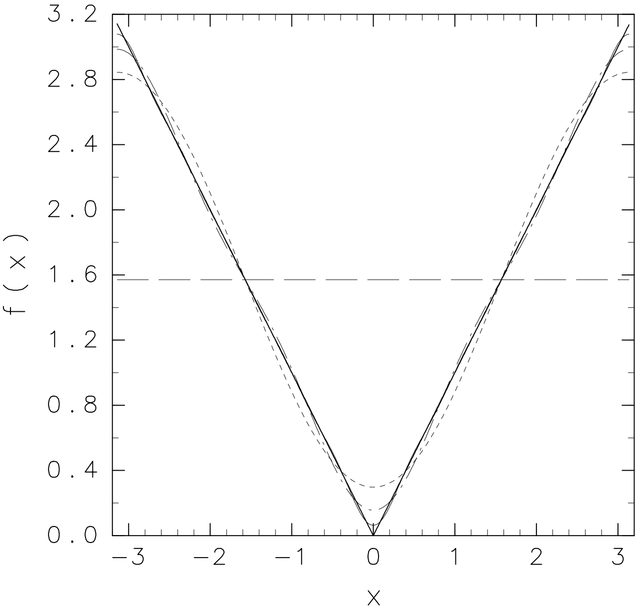

図 2.2　太実線は $f(x) = |x|$．破線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の初項．点線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の第 2 項まで．一点破線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の第 3 項まで．細実線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の第 10 項目まで．

例 3　$f(x) = x^2$, $(-\pi \leq x \leq \pi)$, 周期 2π

例 1 と同様にして

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{3}\pi^2, \\ a_n &= (-1)^n \frac{4}{n^2}, \\ b_n &= 0. \end{aligned}$$

したがって，

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots\right). \tag{2.14}$$

上式で $x = 0$ とおけば，

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots \tag{2.15}$$

が，一方 $x = \pi$ とおけば，

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots. \tag{2.16}$$

が得られる．[*2]

[*2] (2.16) の無限級数和は，P. Mengoli によって 1644 年に提起され，L. Euler が 1735 年に解いたもので

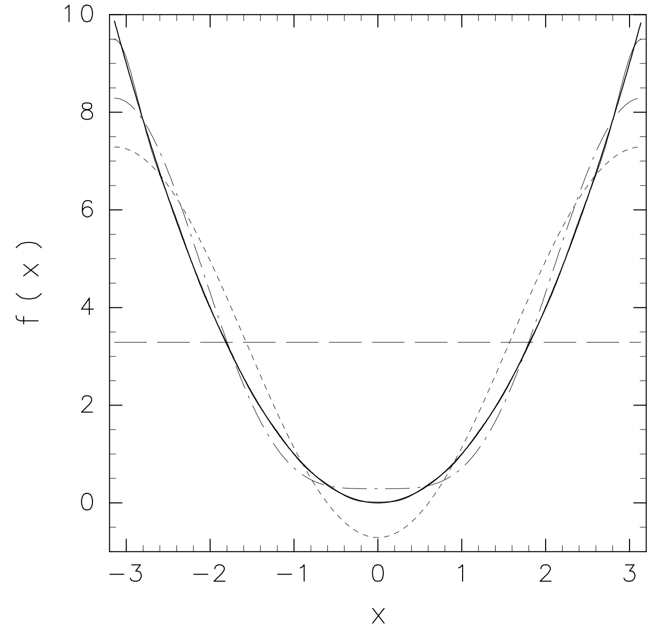

図 2.3　太実線は $f(x) = x^2$．破線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の初項．点線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の第 2 項まで．一点破線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の第 3 項まで．細実線は $f(x)$ の Fourier 級数展開の第 10 項目まで．

2.5　Fourier 級数展開に関するいくつかの注意

2.5.1　関数の定義域に関する注意

実関数 $f(x)$ が $c < x < c + 2L$ で定義され（ここで c は任意の実数である），$2L$ の周期をもつとする．このような場合にも $f(x)$ は (2.1) のように Fourier 級数展開できる．ただし，Fourier 係数 a_n，b_n は

$$a_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x, \quad (n = 0, 1, 2\cdots) \tag{2.17a}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x, \quad (n = 1, 2\cdots) \tag{2.17b}$$

で与えられる．(2.17a), (2.17b) の証明は，(2.2a), (2.2b) を導出したのと同様に行える．実関数 $f(x)$ の定義域が $c < x < c + 2L$ の場合にも (2.1) のように三角関数の重ね合わせとしてかけることを認めると，(2.1) の両辺に $\cos\frac{n\pi x}{L}$ を掛け, その結果を x について c から $c + 2L$ まで積分し整理すると (2.17a) が得られ，$\cos\frac{n\pi x}{L}$ の代わりに $\sin\frac{n\pi x}{L}$ を掛

ある．Basel とは Euler の故郷である．

けて，同様の演算を行った場合には (2.17b) が得られる．

$c = -L$ という特別な場合には, (2.17a), (2.17b) はそれぞれ (2.2a), (2.2b) になる．

なお，関数の定義域が変わっても関数自身の形は変わらないので，その Fourier 級数展開も変わらないはずである．実際に，(2.17a), (2.17b) は変数変換と $f(x)$ が周期 $2L$ を持つという性質を利用して，(2.2a), (2.2b) に帰着させることができる．したがって，(2.1), (2.2a), (2.2b) が Fourier 級数展開の基本形と言える．

2.4 節の図 2.1 では，$-\pi < x < \pi$ の範囲のみを図示したが，$-3\pi < x < 3\pi$ の範囲を図示すると図 2.4 のようになる．このとき，"関数 $f(x)$ が $-\pi < x < \pi$ の範囲で与えられていて，その外側では 2π 周期をもつ"，と考えても，"ある適当な正の整数 c に対して，$c < x < c + 2\pi$ で関数形 $f(x)$ が与えられていて，その外側で 2π を持つ" としても両者は等価であることがわかるであろう．

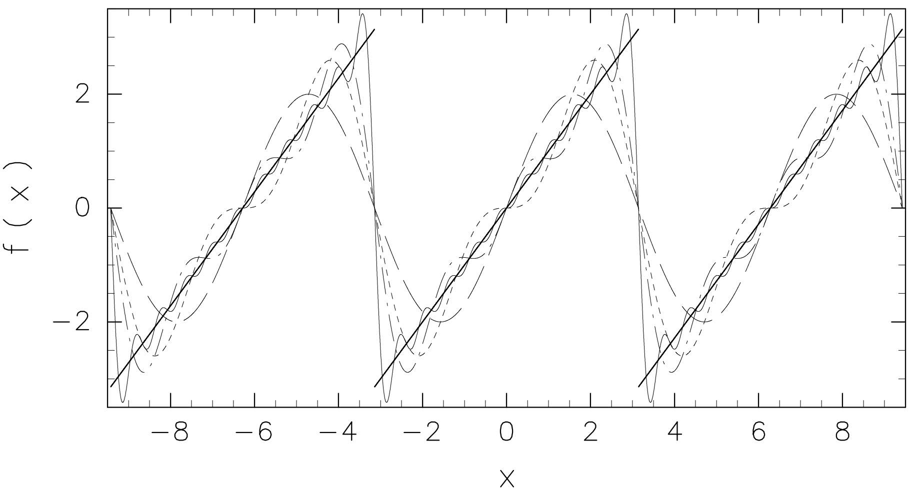

図 2.4　図 2.1 と同様．ただし，$-3\pi < x < 3\pi$ の範囲を図示した．

2.5.2　係数 a_0 について

(2.1) の定数項は

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{-L}^{L} \mathrm{d}x}$$

に等しく, これは $f(x)$ の周期にわたる平均である．このことは積分を区分求積法に直すとすぐにわかる．

2.5.3 関数が不連続点を持つ場合

x_{d} において実関数 $f(x)$ が不連続である場合には，係数 (2.2a), (2.2b) をもつ級数 (2.1) は $x = x_{\mathrm{d}}$ において

$$\frac{f(x_{\mathrm{d}}+0)+f(x_{\mathrm{d}}-0)}{2}$$

の値に収束する．

図 2.4 の $x = \pm\pi$ では $f(x)$ は不連続である．しかしながら，(2.10) の右辺の値は，$\frac{f(x_{\mathrm{d}}+0)+f(x_{\mathrm{d}}-0)}{2}$ の値，即ち 0 に収束していることがわかる．

2.6 Parseval の恒等式

もし，a_n, b_n が実関数 $f(x)$ の Fourier 係数のとき，

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \tag{2.18}$$

が成り立つ．これは Parseval の恒等式と呼ばれる．この式は $f(x)$ の二乗平均値が Foureir 係数の二乗和として表現できることを示している．[*3]

2.7 ちょっと高度な話題〜Fourier 級数の収束性〜

先に導入した Fourier 級数 (2.1) はより厳密には，

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{2.20}$$

と書き表すべきである．等号の記号を用いないで記号 $\sim$ を用いて両辺を結んだのは，(2.20) の右辺の三角関数の級数が左辺の $f(x)$ に**対応すること**を表すためである．級数の収束に関する各種の条件が満たされるときに初めて等号で結ぶことが出来る．ここでは Foureir 級数展開の収束性について，数学的な議論を紹介する．

まず言葉の定義を与えておく．

[*3] $a_0/2$ が $f(x)$ の平均値であるので，$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\{f(x)-\frac{a_0}{2}\}^2\mathrm{d}x$ は $f(x)$ の偏差の平均値つまり分散である．この値は Parseval の恒等式を用いると，$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ となる．つまり，Parseval の恒等式は

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left\{f(x)-\frac{a_0}{2}\right\}^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2), \tag{2.19}$$

とも書ける．$f(x)$ の分散は Fourier 係数の自乗和で表される，と述べた方が Parceval の恒等式の意味が理解しやすいかもしれない．

区分的に連続な関数:　次の条件を満足するときに，有限区間 $I = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ で定義された実関数 $f(x)$ は区分的に連続であると呼ばれる．

i)　$f(x)$ が I で有限個の点 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ をのぞいて連続

ii)　各不連続点 $x_1, x_2, \cdots x_k$ で

$$f(x_i + 0) = \lim_{t \to +0} f(x_i + t),\ f(x_i - 0) = \lim_{t \to -0} f(x_i + t) \tag{2.21}$$

が存在．

iii)　I の左右両端点 a, b で

$$f(a + 0) = \lim_{t \to +0} f(a + t),\ f(b - 0) = \lim_{t \to +0} f(b - t) \tag{2.22}$$

が存在．

定理：　実関数 $f(x)$ は周期 $2L$ を持つ周期関数で，区分的に連続であるとする．さらに $f'(x)$ も区分的に連続であるとする．このとき $f(x)$ の Fourier 級数は

- $f(x)$ が連続な点で，$f(x)$ に収束し
- $f(x)$ が不連続な点では $\dfrac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$ に収束する．

上記定理を証明するための方法について述べておく．なお，実関数 $f(x)$ は周期が 2π であるとする．2π 以外の周期をもつ関数についても同様に証明できる．

準備 1：

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos mt = \frac{\sin(m + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2} t} \tag{2.23}$$

を証明する．

準備 2：　(2.23) を用いて，

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(m + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2} t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}, \tag{2.24}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin(m + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2} t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}, \tag{2.25}$$

を証明する．

準備 3：　定理を満足する実関数 $f(x)$ について

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x \tag{2.26}$$

を証明する．

準備 4：　(2.26) を利用すると，定理を満足する実関数 $f(x)$ について

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0 \tag{2.27}$$

が証明できる．

準備 5：　さらに (2.27) を利用すると，定理を満足する実関数 $f(x)$ について

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x\,\mathrm{d}x = 0 \tag{2.28}$$

が証明できる．

準備 6：　$f(x)$ が周期 2π を持ち，定理の条件を満足すれば，$f(x)$ の Fourier 級数の部分和

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{2.29}$$

は

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\,\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,\mathrm{d}t \tag{2.30}$$

となることが示せる．

定理の証明（step 1）：

$$\begin{aligned}
S_m(x) - \left(\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right) = \\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{f(t+x)-f(x-0)}{2\sin\frac{1}{2}t}\sin(m+\frac{1}{2})t\,\mathrm{d}t \\
+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(t+x)-f(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}\sin(m+\frac{1}{2})t\,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{2.31}$$

を示す．

定理の証明（step 2）：　(2.28) を用いて

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{f(t+x)-f(x-0)}{2\sin\frac{1}{2}t}\sin(m+\frac{1}{2})t\,\mathrm{d}t = 0, \tag{2.32}$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(t+x)-f(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}\sin(m+\frac{1}{2})t\,\mathrm{d}t = 0 \tag{2.33}$$

を示す．これらと (2.31) より定理が証明される．