第 1 章

定数係数の 2 階線形常微分方程式の解法

1.1 はじめに

物理学や地球惑星科学においては, 以下のような形をもった微分方程式が頻繁に登場する：

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + A\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + By = 0. \tag{1.1}$$

ここで, x は独立変数, y は x の未知関数で従属変数, A, B は定数である.

例 1： 質量 m の質点がバネ定数 k の線形バネ[*1]につながれている場合, 質点の平衡位置からの変位 x が従う運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0 \tag{1.2}$$

である.

例 2： 一様な重力場中で長さ l の伸びない紐の端に 質量 m のおもりがつるされているとする. この振り子（おもり）の平衡点からの振れ角 θ が従う運動方程式は

$$ml\frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}t^2} + mg\sin\theta = 0 \tag{1.3}$$

である. ここで, g は重力加速度である. なお, 振れ角 θ が小さい場合には (1.3) は

$$ml\frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}t^2} + mg\theta = 0 \tag{1.4}$$

と近似される.

[*1] バネの復元力が, バネの伸び比例するバネ

例 3：　例 1 の系で速度に比例する抵抗が質点に働いている場合には, 質点の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+m\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0 \tag{1.5}$$

となる．ここで, $\gamma>0$ である．[*2]

このように,（今紹介したのは 2〜3 例であるが）様々な状況で (1.1) の形で書ける微分方程式に従う系がある．

1.2　言葉の定義

(1.1) は**定数係数の 2 階線形常微分方程式**と呼ばれる．なぜならば, 微分を含んだ方程式は**微分方程式**と呼ばれ, 微分方程式の未知関数 y の 微分の最高階数をもって, その微分方程式の**階数**を表す．従って (1.1) は 2 階の微分方程式である．また, 係数 A, B が定数である．さらに, y が一変数 x にのみ依存するので, ここで現れる微分は偏微分 $\frac{\partial}{\partial x}$ ではなく常微分 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ であるので, 特に**常**微分方程式とも呼ぶ．未知関数と未知関数のすべての微分について 0 次もしくは 1 次の微分方程式は**線形**といわれる．(1.1) における未知関数及びその全ての微分は, y, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ であり, 全て 1 次である．

定数を $c_1, c_2, \ldots, c_n$ で表し, これらは任意の値を取るものとする．このような定数を**任意定数**と呼ぶ．微分方程式を満たす解 y が任意定数を含む形で表現されるとき, そのような y を**一般階**という．一般解に含まれる定数に特定の値を代入して得られる解は**特殊解**という．微分方程式の一般解（や特異解[*3]）を求めることを**微分方程式を解く**という．

線形という言葉についてもう少し説明しておく．

1.2.1　線形関数

ある関数 $f(x)$ が以下の様な性質を満足する場合, $f(x)$ を**線形関数**と呼ぶ:

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2), \tag{1.6}$$
$$f(ax)=af(x). \tag{1.7}$$

ここで, a は定数である．もし $f(x)$ が上記の性質を満足しないならば, $f(x)$ は**非線形関数**であるという．

[*2] 例 2 で, 振り子の振れ角が小さい場合でさらに速度に比例する抵抗力が働く場合にも, (1.1) の形の微分方程式で現象が記述される．

[*3] 一般解の任意定数にどんな値を代入しても表現できないような微分方程式の解を特異解という．特異解は本講義では解説しない．

1.2.2 線形演算子

上記の線形・非線形という概念は, 関数のみならず, **微分演算子**についても定義できる. すなわち独立変数を x とするある微分演算子 $\mathcal{L}_x$ が以下の性質を満足するならば, $\mathcal{L}_x$ を**線形微分演算子**とよぶ:

$$\mathcal{L}_x\left[f_1 + f_2\right] = \mathcal{L}_x[f_1] + \mathcal{L}_x[f_2], \tag{1.8}$$

$$\mathcal{L}_x\left[af\right] = a\mathcal{L}_x[f]. \tag{1.9}$$

ここで, f_1, f_2 は共に x の関数である.

例えば, (1.1) の左辺第一項, および第二項に現れた微分演算子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ はともに上記 (1.8), (1.9) の性質を満足する. また, (1.1) の左辺第三項 y は, 0 階微分するという演算子が y に作用していると解釈することができ, やはり (1.8), (1.9) を満足する.

一般に微分方程式は演算子を使って,

$$\mathcal{L}_x\left[y\right] = X(x) \tag{1.10}$$

の形に表現できる. ここで $X(x)$ は x の既知関数である. 例えば, (1.1) は

$$\mathcal{L}_x = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + B\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}x^0}, \tag{1.11}$$

$$X(x) = 0 \tag{1.12}$$

となる (1.10) である. ここで, (1.11) は線形演算子である.

1.2.3 線形微分方程式

線形演算子 $\mathcal{L}_x$ を使って,

$$\mathcal{L}_x[y] = 0$$

と表される微分方程式は次のような 2 つの性質を満足することがわかる：

i) 微分方程式の独立な 2 つの解 y_1, y_2 （つまり $\mathcal{L}_x[y_1] = 0$, $\mathcal{L}_x[y_2] = 0$）があったとき, $y_1 + y_2$ も元の微分方程式の解になっている. 実際に

$$\mathcal{L}_x[y_1 + y_2] = \mathcal{L}_x[y_1] + \mathcal{L}_x[y_2] = 0 + 0 = 0.$$

ii) 微分方程式の解 y を任意定数倍したもの, 即ち ay, も元の微分方程式の解になっている. ここで a は任意定数である. 実際に

$$\mathcal{L}_x[ay] = a\mathcal{L}_x[y] = a \times 0 = 0.$$

上記の 2 つの性質 i), ii), を満足する微分方程式を**線形**微分方程式と呼ぶ．もしくは, 上記の i), ii) の性質をひとつにまとめて,

> “微分方程式 $\mathcal{L}_x[y] = 0$ の独立な 2 つの解 y_1, y_2 があったとき, 任意定数を c_1, c_2 として $c_1 y_1 + c_2 y_2$ も微分方程式の解となっているとき, その微分方程式は**線形**微分方程式と呼ばれる”

と言える．

1.2.4　重ね合わせの原理

微分方程式の独立な解が複数個 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ が見つかったとき, それらをおのおの定数倍して足し合わせる操作

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots c_n y_n \tag{1.13}$$

を解を**重ね合わせる**といい, 個々の独立した解を重ね合わせたものも元の微分方程式の解になっていることを**重ね合わせの原理が成り立つ**という．従って, 線形微分方程式では重ね合わせの原理が成り立っている．もしくは, 重ね合わせの原理が成り立つ微分方程式が線形微分方程式である, ともいえる．

この重ね合わせの原理は, 以下で見るように線形常微分方程式の**一般解**を構成するときに必要な知識である．

1.3　定数係数の 2 階線形常微分方程式の解法 (1)

ここでは, (1.1) の解法として, 代表的なものを紹介する．特に, “ **推定法** ” と呼ばれるもの取り上げることにする．[*4]

[*4] 2000 年度から本講義を担当してきたが, 2007 年度の前期にある人からの指摘を受けて, “ 推定法 ” という言い方は一般的ではないことに気づいた．私は大学 1 年生の物理数学の講義でここで紹介する “ 推定法” という方法を呼び名も含めて習った．講義を担当していた先生は, 原子核物理学の理論を専門とする先生で, 講義のうまさには定評があった．その先生がいい加減なことを教えていたとは思えない．しかしながら, 指摘されて改めて調べてみると, 本講義で紹介する方法を推定法と呼んでいる物理数学の本が見当たらないのである．ためしに Google でネット検索してみても, “ 推定法, 微分方程式 ” のキーワード検索で上位にかかるものは別の推定法である．（因みに, 私の講義ノートが結構上位でヒットする．）ただし, ネット検索していて気づいたのであるが, 東海大学理学部物理学科（私の出身大学）のシラバスには微分方程式の解法として, 推定法の名前が挙げられている．私が東海大学で物理数学を習ったのは 20 年以上前であり, それを教えていた先生は今は既に退職している．しかしながら, 推定法の名前はいまだに東海大学に残っているのである．以上の様なわけで, “ 推定法 ” という呼び名は, 時と場所と場合に注意し

(1.1) の解を

$$y = e^{\lambda x}, \tag{1.14}$$

と推定する．(1.14) を (1.1) に代入して整理すると,

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0 \tag{1.15}$$

という λ に関する代数方程式が得られる．[*5] (1.15) は (1.1) の**特性方程式**と呼ばれ, (1.14) のように微分方程式の解を推定すると, 微分方程式は, 代数方程式に帰着される．

特性方程式 (1.15) の解は一般に 2 個ある．なぜならば, 2 次方程式の解は一般に 2 個であるからである．その解 λ_1, λ_2 は

$$\lambda_1 = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2}, \tag{1.16}$$

である．そこで, (1.16) の結果と (1.14) を考慮すると, 微分方程式の解は

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \tag{1.17}$$

の二つとなる．しかしながら, 前節で述べたように, y_1, y_2 がともに線形微分方程式の解であるので, 重ね合わせの原理により

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{1.18}$$

も微分方程式の解となる．(1.16)**,** (1.17) **を持つ** (1.18) **が** (1.1) **の一般解である．**

■補足 1　2 階の微分方程式は, 形式的には 2 回の不定積分を実行することにより解が求まる．1 回不定積分を実行すると積分定数である任意定数が 1 つ現れる．そこで, 2 階の微分方程式の一般解には, 形式的な 2 度の積分により, 積分定数である任意定数が 2 個現れることになる．(1.18) は任意定数 c_1, c_2 を含んでいるので, (1.18) が微分方程式 (1.1) の一般解として充分であることが理解されるであろう．

■補足 2　任意定数の決定には, ある特定の x の値における, y や $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ の値を指定してやることにより決定できる．2 階の微分方程式の一般解には 2 個の任意定数を含むので, この任意定数の決定には 2 個の条件を与えればよい．（時間発展問題では, このような条件はいわゆる初期条件として与えられる．）

て使って欲しい．ただし, 以下に解説するようにこの言葉はよく手法を反映していることは理解してくれるだろう．

[*5] (1.14) を (1.1) に代入すると $(\lambda^2 + A\lambda + B)e^{\lambda x} = 0$ が得られる．ただし, $e^{\lambda x} = 0$ となる解は $y = 0$ という自明な解である．非自明な解は (1.15) を満たす．

■補足 3　なお, 何らかの方法によって (1.1) を満足する解が 3 個 (y_1, y_2, y_3) 得られたとする（通常はそのようなことはないと思うのだが. . . ）. このときには, c_1, c_2, c_3 を任意定数として, y_1, y_2, y_3 のうちの 2 個の解の重ね合わせ

$$c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_2 y_2 + c_3 y_3, \quad c_3 y_3 + c_1 y_1 \tag{1.19}$$

のどれもが, (1.1) の一般解となる. (1.19) のどれもが一般解となるのは奇異に感じるかもしれない. しかしながら, いわゆる初期条件を代入して任意定数を決定してやると, (1.19) の 3 つの一般解はすべて同じ解に帰着されるのである. 以下でその例を示そう.

例:　(1.2) の解を $x = e^{\lambda t}$ と推定すると, その特性方程式は $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ となる. ここで $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ である. 特性方程式の解は $\lambda = \pm i\omega$ となるので, したがって, これを推定した解の形に代入することにより, 2 つの解

$$x = e^{i\omega t}, \quad x = e^{-i\omega t} \tag{1.20}$$

を得る. 重ね合わせの原理により, この 2 つの解をそれぞれ任意定数倍したものももとの微分方程式の解であるので, (1.2) の一般解は

$$x = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \tag{1.21}$$

である.

また, $x = \sin\omega t$ も (1.2) を満足することがこれをもとの微分方程式に代入することにより容易に確かめることができる. したがって重ね合わせの原理によって

$$x = c_1 e^{i\omega t} + c_3 \sin\omega t \tag{1.22}$$

も (1.2) の一般解である. ここで初期条件として, $t = 0$ で $x = x_0$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$ とする. この条件を満足するためには (1.21) における任意定数は

$$c_1 = c_2 = \frac{x_0}{2} \tag{1.23}$$

でなければならず, (1.23) を (1.21) に代入して整理すると

$$x = x_0 \cos\omega t \tag{1.24}$$

となる. 一方, 初期条件を満足するには, (1.22) における任意定数は

$$c_1 = x_0, \quad c_3 = -ix_0 \tag{1.25}$$

でなければいけない. (1.25) を (1.22) に代入すると, (1.22) は, (1.24) となる. つまり, 任意定数を含んだ一般解の表現には任意性があるが, 初期条件を考慮して任意定数を決定すれば, 解は一意に決まる.

1.4　定数係数の 2 階線形常微分方程式の解法 (2)

前節で $y = Ce^{\lambda x}$ と与えられた微分方程式の解を推定し, それを微分方程式に代入して微分方程式の特性方程式を作り, それを解くことによって λ を求め, 件の微分方程式の一般解を構成する方法を説明した．[*6] しかし, 前節の方法が適用できない場合もある．特性方程式の解 λ が重根 $\lambda = \lambda_1$ になる場合 (特性方程式の解が 1 つしか求まらない場合) がそのような場合である．このときには解の推定 $y = Ce^{\lambda x}$ が誤りであると判断し, 改めて解を $y = C(x)e^{\lambda_1 x}$ と推定する．つまり, C を定数ではなく, x に依存した関数と考えるのである．このような方法は**係数変化法**と呼ばれる．このようにすると, C に関する微分方程式が得られるので, これを解いて推定した解の形に代入すればよい．なお, 係数変化法を用いる場合でも, 解が $e^{\lambda x}$ に比例するという先に紹介した “ 推定法 ” が基本になっていることに注意してほしい.

例:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4y = 0 \tag{1.26}$$

解を $y = Ce^{\lambda x}$ と推定する．ここで, C は任意定数である．特性方程式は,

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \tag{1.27}$$

となり, この解は $\lambda = -2$ の重根となる．そこで,

$$y = C(x)e^{-2x} \tag{1.28}$$

と改めておき, (1.26) に代入する．その結果,

$$\frac{\mathrm{d}^2 C}{\mathrm{d}x^2} = 0 \tag{1.29}$$

が得られ, (1.29) の解は $C = c_1 x + c_2$ となる．ここで, c_1, c_2 は任意定数である．したがって, 微分方程式 (1.26) の一般解は

$$y = (c_1 x + c_2)\, e^{-2x} \tag{1.30}$$

となる．（注：(1.30) には任意定数が 2 個含まれている．つまり, 2 階の微分方程式の一般解として充分である．）

[*6] 前節では $y = e^{\lambda x}$ という形の推定をしたが, これを任意定数 C 倍したものもまったく同じ特性方程式を満足する．したがって, 前節の解の推定は一般には, $y = Ce^{\lambda x}$ としたものとも解釈できる.

1.5　非斉次型の微分方程式の解法

物理学においては, (1.1) の右辺にいわゆる外力項を含むような形をもった微分方程式も頻繁に登場する：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + A\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + By = f(x). \tag{1.31}$$

ここで, A, B は定数である.

例1:　質量 m の質点がバネ定数 k の線形バネにつながれており, さらに速度に比例する抵抗と周期的な外力 $A\sin\omega_0 t$ が質点に働いている場合, 質点の平衡位置からのずれ x が従う運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + m\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = A\sin\omega t \tag{1.32}$$

となる. ここで, $\gamma > 0$ である.

例2：　インダクタンス L のコイル, 抵抗値 R の 抵抗, 容量 C を持ったコンデンサを直列に接続した回路に起電力 $E(t)$ を加える. この回路の方程式は次のような微分方程式に従う：

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = E(t). \tag{1.33}$$

ここで, Q はコンデンサに蓄積される電荷であり, 回路を流れる電流 I とは $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ の関係がある.

一般に (1.10) のような微分方程式で, 右辺の $X(x)$ がゼロであるような方程式, すわなち前節までに扱ってきたものを**斉次**微分方程式と呼び, 右辺が 0 でない場合を**非斉次**微分方程式とよぶ. 斉次微分方程式が線形であれば, 非斉次微分方程式の解は, 以下のように簡単に構成できる.

非斉次微分方程式 (1.31) の解は, 斉次微分方程式 (1.1) の一般解 y_g と, (1.31) を満足する任意の解 (これは**特殊解**と呼ばれている) のうちのひとつ y_p の和として表現できる. 即ち, $y = y_\mathrm{g} + y_\mathrm{p}$ である.

実際に方程式の線形性から y_g, y_p がそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x[y_\mathrm{g}] &= 0. \\ \mathcal{L}_x[y_\mathrm{p}] &= X(x) \end{aligned} \tag{1.34}$$

であれば, $y = y_{\rm g} + y_{\rm p}$ は

$$\mathcal{L}_x[y_{\rm g} + y_{\rm p}] = \mathcal{L}_x[y_{\rm g}] + \mathcal{L}_x[y_{\rm p}] = 0 + X(x) = X(x).$$

すなわち, 非斉次微分方程式の解になっている.

■補足　特殊解が複数個見つかったときでも, そのうちの任意の 1 個のみを一般解 $y_{\rm g}$ に加えておけば (1.31) の解としては充分である．どの特殊解を選択するか, という自由度は一般解 $y_{\rm g}$ に含まれている任意定数で調整されるからである．初期条件を考慮すればどの特殊解を選んでも最終的な解は唯一に決まる．特殊解を求める方法は, 非斉次項 $f(x)$ がある特定の形を持つ場合, 常套手段が知られている．例えば, $f(x)$ が多項式の場合や e^{px}, $\cos px$, $\sin px$ といった場合には, やはり解を推定して代入することにより求める．また（以下で説明する）共鳴型の場合には係数変化法によって $y_{\rm p}$ を求めることができる.

例 3　以下の様な微分方程式を考える：

$$\frac{{\rm d}^2 x}{{\rm d}t^2} + \omega_0^2 x = A \sin \omega t \tag{1.35}$$

これは, 例 1 において質点に抵抗が働かない場合の方程式である．なお, $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ とし, $\omega_0 \neq \omega$ とする.

微分方程式 (1.35) の斉次方程式

$$\frac{{\rm d}^2 x}{{\rm d}t^2} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1.36}$$

の一般解は, $x_{\rm g} = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t$ である[*7]．特殊解は, 解を $x_{\rm p} = f \sin \omega t$ と推定し, これをもとの方程式 (1.35) に代入して係数 f を定めればよい．実際に代入すると

$$\frac{{\rm d}^2 x_{\rm p}}{{\rm d}t^2} + \omega_0^2 x_{\rm p} = -\omega^2 f \sin \omega t + \omega_0^2 f \sin \omega t = A \sin \omega t.$$

従って $f = A/(\omega_0^2 - \omega^2)$ を得る．よって, (1.35) の一般解は

$$x = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t \tag{1.37}$$

である.

この推定法のコツは, 右辺が $\sin \omega t$ に比例するので, 左辺の第 2 項も $\sin \omega t$ に比例するであろう, また, $\sin \omega t$ を t で 2 階微分すると（符号は別にして） もとの $\sin \omega t$ に戻ること（三角関数の重要な性質）に基づいている. (特殊解の推定とし

[*7] $x = c_1 \exp[i\omega_0 t] + c_2 \exp[-i\omega_0 t]$ と表現してもよい.

て, $x_\mathrm{p} = f_1 \sin\omega t + f_2 \cos\omega t$ としてもよいが, これは経験をつむと冗長な解の推定であることがわかる．)

例 4　次に例 1 で与えられた微分方程式を考える:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma_0 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = A \sin\omega t. \tag{1.38}$$

ここで, $\gamma_0 \equiv \gamma/m$, $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ とし, $\omega_0 \neq \omega$ とする．

微分方程式 (1.38) の斉次方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_\mathrm{g}}{\mathrm{d}t^2} + \gamma_0 \frac{\mathrm{d}x_\mathrm{g}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x_\mathrm{g} = 0 \tag{1.39}$$

の一般解は, $x_\mathrm{g} = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ である．ここで λ_1, λ_2 は特性方程式 $\lambda^2 + \gamma_0 \lambda + \omega_0^2 = 0$ の 2 つの解である．特殊解は, 解を $x_\mathrm{p} = f_1 \sin\omega t + f_2 \cos\omega t$ と推定し, これをもとの方程式 (1.38) に代入して係数 f_1, f_2 を定める．この推定法のコツは, 右辺が $\sin\omega t$ に比例するので, 左辺の第 3 項も $\sin\omega t$ に比例するであろう．このとき, $\sin\omega t$ を t で 2 階微分すると（符号は別にして） もとの $\sin\omega t$ に戻るので, 第 3 項も $\sin\omega t$ に比例する．しかしながら, $\sin\omega t$ の 1 階微分は $\cos\omega t$ なので, cos の項が左辺第 1 項に現れる．それをうまく消すためにもともと x_p の推定に $\cos\omega t$ も加えておき, 適当に係数を調整して $\cos\omega t$ を消すようにする, というものである．実際に代入すると

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 x_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t^2} + \gamma_0 \frac{\mathrm{d}x_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x_\mathrm{p} \\
&= -\omega^2 f_1 \sin\omega t - \omega^2 f_2 \cos\omega t \\
&\quad + \gamma_0 (\omega f_1 \cos\omega t - \omega f_2 \sin\omega t) \\
&\qquad + \omega_0^2 (f_1 \sin\omega t + f_2 \cos\omega t) \\
&= (-\omega^2 f_1 - \omega\gamma_0 f_2 + \omega_0^2 f_1) \sin\omega t + (-\omega^2 f_2 + \omega\gamma_0 f_1 + \omega_0^2 f_2) \cos\omega t \\
&= A \sin\omega t.
\end{aligned}$$

従って f_1, f_2 は

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\omega\gamma_0 \\ \omega\gamma_0 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.40}$$

を満足する．(1.40) の解は,

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma_0^2} \begin{pmatrix} (\omega_0^2 - \omega^2) A \\ -\omega\gamma_0 A \end{pmatrix}$$

なので, (1.38) の一般解は

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma_0^2} \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2) \sin\omega t - \omega\gamma_0 \cos\omega t \right\}. \tag{1.41}$$

例 5:　最後に共鳴型の問題を取り扱う．これは, (1.35) で, 外力の振動数 ω ともともともとバネのもつ固有振動数 ω_0 が等しい場合である．(1.35) の一般解で, $\omega = \omega_0$ とおくと x_{p} は発散する．そこで, 先の特殊解 x_{p} の推定は破綻している．物理的にはこのような場合には, 振動の振幅が時間ともに増大していく．そこで, x_{p} として, ω_0 で振動し振幅が時間に比例する

$$x_{\mathrm{p}} = f_1 t \sin \omega_0 t + f_2 t \cos \omega_0 t$$

と推定する．これを (1.35) の式に代入すると,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 x_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x_{\mathrm{p}} &= 2\omega_0(f_1 \cos \omega_0 t - f_2 \sin \omega_0 t) - \omega_0^2(f_1 t \sin \omega_0 t + f_2 t \cos \omega_0 t) \\ &\quad + \omega_0^2(f_1 t \sin \omega_0 t + f_2 t \cos \omega_0 t) \\ &= A \sin \omega_0 t.\end{aligned}$$

したがって, $f_1 = 0$, $f_2 = -A/(2\omega_0)$．つまり特殊解は

$$x_{\mathrm{p}} = -\frac{At}{2\omega_0} \cos \omega_0 t \tag{1.42}$$

となる．

ひとりごと　：初等的な物理数学の有名な教科書に, 非斉次型の微分方程式の解をロンスキー行列というものを使って表現する公式が書かれている．この公式を使って非斉次型の微分方程式を解くことを私は勧めない．むしろ, 上で解説した推定法による解法を強く勧める．その理由は,

i)　この公式を使った解法は膨大な計算が必要となる．特に積分を複数回実行しなければいけない．それに比べれば, 推定法による解法は計算量が格段に少なく, 積分の必要はなく微分だけで解が求まるため容易である．（積分よりも微分のほうが圧倒的に計算は簡単である！）

ii)　この公式が成り立つにはある条件が必要である．公式の適用範囲を与えられた微分方程式が満足しているかをきちんと吟味しなければいけない．公式の適用範囲と共に公式を記憶しておくことは, この公式が複雑な形をしているため（記憶力の落ちた私にとっては）難しい．

iii)　私が今までお目にかかった非斉次型の微分方程式で, 推定法で解けなかったものはない．逆にロンスキー行列を使った公式にお世話になったことはない！

それでも貴方はロンスキー行列を使って非斉次型の微分方程式を解きますか？

■最後に...　　推定法が成功するためには, 与えられた微分方程式を眺めてどのような解が存在するのかをうまく推定してやらなければいけない．よい推定をしないと解は求ま

らない．それでは，よい推定をするにはどうしたらいいのであろうか？それはいたって簡単で，

> **よい推定を行うには微分方程式を山ほど（もしくは星の数ほど）解いて知識と経験と勘を養うことである．**

1.6　最後に

本稿で紹介した定数係数の 2 階線形常微分方程式以外にも物理学（系の研究）で頻繁に登場するタイプの微分方程式があり，これらについては各自で微分方程式や物理数学の教科書を参照して勉強してほしい．