

地球惑星科学基礎III 演習(5)

2010年11月5日配布

1 Fourier 級数の問題(2)

- i) a) 以下の関数に対応する Fourier 級数を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & (-5 < x < 0) \\ 3, & (0 < x < 5) \end{cases}$$

周期は 10 とする.

- b) 関数 $f(x)$ の不連続点 $x = -5, 0, 5$ において Fourier 級数はどのような値をとるか.

- ii) $-\pi < x < \pi$ において $f(x) = x^2$ となる周期 2π の関数を Fourier 級数展開しなさい.

- iii) 前設問の結果を用いて, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を証明しなさい.¹

- iv) 偶関数を Fourier 級数展開したときには $\sin$ の項は現われないことを証明しなさい.

- v) $f(x)$ が $-L < x < L$ の区間で定義され, 周期 $2L$ の奇関数のとき, この関数の Fourier 係数は

a) $a_n = 0$

b) $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx,$
となることを証明しなさい.

- vi) 以下の関数に対応する Fourier 係数を求めなさい.²

$$f(x) = \begin{cases} 3, & (0 < x < 5) \\ 0, & (5 < x < 10) \end{cases}$$

周期は 10 とする.

¹ $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は ζ 関数と呼ばれる.

²この関数は, $-\infty < x < \infty$ の範囲で眺めると, i) で考察した関数と同じである. 従って, Fourier 級数は a) で求めたものと同じになるはずである.

2 Parseval の恒等式の問題

- i) 周期 $2L$ の関数 $f(x)$ が区間 $(-L, L)$ において $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$ に収束するとき, Parseval の恒等式

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (1)$$

を証明しなさい.

- ii) 次の関数を Fourier 級数展開しなさい:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x, & (0 \leq x < 2) \\ -x, & (-2 < x < 0) \end{cases}$$

周期 4.

- b) 前設問の Fourier 級数に対応する Parseval の恒等式を書き下しなさい.
c) 前設問の結果をもちいて, 無限級数和

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots \frac{1}{n^4} + \cdots \quad (2)$$

を求めなさい.