地球惑星科学基礎 III
&
地球惑星科学基礎 III 演習

岩山隆寛

2005 年度版

目次

ガイダンス

0.1　地球惑星科学基礎 III

0.1.1　講義内容

本講義では，地球惑星科学の研究に必要な数学的手法について解説をする．まず，定数係数をもった 2 階の線形常微分方程式の解法について詳しく説明する．この型の微分方程式は天体の運動などを始めとして地球惑星科学を学ぶ際にほとんど常にお目にかかるものである．また地球惑星科学の諸現象は偏微分方程式の形にかかれることが多い．偏微分方程式を解くためには，変数分離法を用いたり直交関数展開などを行うことにより偏微分方程式を常微分方程式に書き直し，それを解くという方法が一般的である．したがって偏微分方程式を解く場合にも，常微分方程式の解法を知っておく必要がある．次に，偏微分方程式の解法やデータ解析に用いられる Fourier 級数，Fourier 変換，およびそれらに関連するテーマについて詳述する．最後に，和の規約もしくは Einstein's notation と呼ばれる表記法を紹介する．この方法は気象学や地震学（およびその background となる流体力学，弾性体力学）で用いられるものである．和の規約を用いることの利点は，これを用いると，ベクトル解析で現れる複雑な計算がたちどころに計算できることである．さらにスカラーでもベクトルでもない量（テンソル量）の導入に必要不可欠なものである．

本講義の内容は，理論的研究，実験的研究といった研究手法に係わらず，将来物理系の研究室（大気水圏科学，海洋・大陸ダイナミックス，地震学，太陽系物理学，宇宙科学，非線形科学の各研究室）で研究を行う上で必要不可欠なものであり，常識として知っておく必要がある．（本講義で取り扱う内容は「基礎科目」の一部として大学院入試の際に出題される．）

本講義で取り扱う項目は以下の通りである．

0.1.2　参考書

本講義に関連する内容を含んだ参考書をリストアップしておく．

- 程度は高いが, **大学生としては是非一度は手にとって眺めて欲しい**書籍.
  - R. Courant and D. Hilbert: Method of Mathematical Physics, vol. I. Weily, 1953.(Fourier 級数の話は chapter II. 邦訳: 数理物理学の方法, 東京図書出版)
  - A. Sommerfeld: Partial Differential Equation. Academic Press, 1949.（Fourier 級数の話は chapter I, 邦訳: 物理数学, 講談社）
  - 高木貞治：解析概論. 岩波書店, 1983, (Fourier 級数の話は第 6 章).
  - 寺澤寛一：自然科学のための数学概論 [増訂版], 岩波書店，1983.
  - ポントリャーギン：常微分方程式（共立出版）
- 初学者向け参考書
  - 和達三樹：物理のための数学, 岩波書店.
  - 小暮陽三：なっとくするフーリエ変換，講談社.
- 一般的程度の参考書 (微分方程式)
  - 矢野健太郎：微分方程式（裳華房）
  - 矢野健太郎：大学演習　微分方程式（裳華房）

    上記の 2 冊は，私が大学生のときに物理数学 I（1 年次，通年開講）担当の先生がテキストとして指定した本である．（物理数学のテキストは，この本以外に安達忠次著：ベクトル解析（培風館）であった．）
- 一般的程度の参考書 (Fourier-Laplace 解析, 複素関数論)
  - 木村英紀，Fourier-Laplace 解析．岩波講座「応用数学」，岩波書店，1999 年，第 1 章.
  - 矢野健太郎，石原繁，解析学概論（新版）．裳華房，1982 年，第 IV 部.

    上記の教科書は，私が大学生のときに物理数学 II（2 年次，通年開講）担当の先生がテキストとして指定した本である．
  - M. R. Spiegel, Fourier Analysis with application to boundary value problems. Schaum's outline series, McGraw-Hill, 1974, 191 pp.
- 一般的程度の参考書 (物理数学全般)
  - マージナウ，マーフィ共著，佐藤次彦，国宗真　共訳：物理と化学のための数学 I, II （共立出版）

    上記の 2 冊は，私が大学生時代に愛読した物理数学の本である．熱力学の数学から，微分方程式，特殊関数，テンソル解析，量子力学や統計力学の数学，数値計算法まで収録した大著である．
- スペクトル解析の参考書
  - 日野幹雄: スペクトル解析, 朝倉書店，1977.
  - 石岡圭一, 1998: FFT – 高速アルゴリズムの発見 –. 数学セミナー, **37** (1998 年 12 月号), 日本評論社, pp. 34 – 39.

0.2　合否判断

- **授業の合否判断**は, 2 回（中間試験，期末試験）の試験の合計点（演習の時間に黒板で解いた問題数に応じて点数を加味する）で行う．出席点は加味しない（**出席はとらない．**）

注意：　基礎 III の講義の内容は基礎 III 演習で出題される問題を解くことにより，理解が深まるので，演習の講義を履修しない人でも，演習で出題される問題を解いておくことが望ましい.

0.3　地球惑星科学基礎 III 演習

0.3.1　方針

- 地球惑星科学基礎 III で取り扱ったテーマに関連する演習問題を解くことによって，講義への理解を深める．とくに**数式を取り扱う能力**を高める.
- 演習問題は, 適当な分量の問題を隔週プリントにして配る.
- 受講生は配られた演習問題をその場で，もしくは翌週までに解いてくる．希望者が黒板に問題, 及び模範解答を示し, 模範解答の解説をする．教員は必要に応じてそれに対して補足説明を行う．これは人前で喋る**プレゼンテーション**の練習になる．なお，**解答者を教員側から指名することは行わない．あくまでも学生が自主的に黒板に出て模範解答を示し，解説を行う．演習の授業は学生が主体となって作っていく**ことを注意しておく.
- 授業中に課題を一題出題する．受講生は，この課題はその場で解いて，でき次第提出すること．その場で教員もしくは TA が添削して，課題の答案を返却します．この課題は，演習問題 1 題の模範解答を黒板に示したものとみなして，成績評価の点数に加味します.

0.4　合否判断

- **授業の合否判断**は, 講義の際に行ったテストの点数に黒板で解いた問題数に応じて点数を加味し判断する．出席点は加味しない（**出席はとらない．**）

0.5 連絡先

この講義および演習には，2 名の教員が携わっている．質問は授業時間に限らずいつでも受け付ける．各スタッフの連絡先は以下のとおりである．

- 山中大学; 電子メール: mdy@kobe-u.ac.jp ; 居室: 自然科学研究科 3 号館西棟 503 号室
- 岩山隆寛; 電子メール: iwayama@kobe-u.ac.jp ; 居室: 自然科学研究科 3 号館西棟 502 号室

本講義で配るプリントは岩山のホームページ

http://www.ahs.scitec.kobe-u.ac.jp/~iwayama/teach/teach_05.html

からダウンロードできるようにしておく．講義ノートは順次上記ページにアップロードする予定である．なお，昨年度の講義のノートは

http://www.ahs.scitec.kobe-u.ac.jp/~iwayama/teach/teach_04.html

に掲載してある．

第 1 章

定数係数を持った２階の線形常微分方程式の解法

1.1　はじめに

物理学や地球惑星科学においては，以下のような形をもった微分方程式が頻繁に登場する：

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + A\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + By = 0. \tag{1.1}$$

ここで，A, B は定数である．

例１：　質量 m の質点がバネ定数 k の線形バネにつながれている場合，質点の平衡位置からの変位 x が従う運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0 \tag{1.2}$$

である．

例２：　重力場中で長さ l の伸びない紐の端に 質量 m のおもりがつるされているとする．この振り子（錘）の平衡点からの振れ角 θ が従う運動方程式は

$$ml\frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}t^2} + mg\sin\theta = 0 \tag{1.3}$$

である．ここで，g は重力加速度である．振れ角 θ が小さい場合には (1.3) は

$$ml\frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}t^2} + mg\theta = 0 \tag{1.4}$$

と近似される．

例 3：　例 1 の状況で速度に比例する抵抗が質点に働いている場合には質点の微分方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+m\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0 \tag{1.5}$$

となる．ここで，$\gamma>0$ である．

1.2　言葉の定義（1）:“ 線形と非線形 ”

(1.1) は **2 階**の**定数係数**の**常**微分方程式と呼ばれる．なぜならば，未知変数 y の 微分の階数は 2 階が最高であること，y が一変数 x にのみ依存するので，ここで現れる微分は偏微分 ∂ ではなく常微分 d であるからである．

さらに，**線形，非線形**という言葉について説明しておく．ある関数 $f(x)$ が以下の様な性質を満足する場合，　$f(x)$ を線形関数と呼ぶ．

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2), \tag{1.6}$$
$$f(ax)=af(x). \tag{1.7}$$

ここで，a は定数である．もし $f(x)$ が上記の性質を満足しないならば，$f(x)$ は非線形関数であるという．

上記の線形・非線形という概念は，関数のみならず，微分演算子についても定義できる．すなわちある演算子 $\mathcal{L}$ が以下の性質を満足するならば，$\mathcal{L}$ は線形演算子とよぶ．

$$\mathcal{L}\left[f_1+f_2\right]=\mathcal{L}[f_1]+\mathcal{L}[f_2], \tag{1.8}$$
$$\mathcal{L}\left[af\right]=a\mathcal{L}[f]. \tag{1.9}$$

たとえば，(1.1) の左辺第一項，および第二項に現れた $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ はともに上記 (1.8), (1.9) の性質を満足する．実際，

$$\frac{\mathrm{d}(y_1+y_2)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}(ay)}{\mathrm{d}x}=a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2(y_1+y_2)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}^2y_2}{\mathrm{d}x^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2(ay)}{\mathrm{d}x^2}=a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$$

である．なお，(1.8), (1.9) の性質から，

i) (1.1) で与えられる微分方程式の独立な 2 つの解 y_1, y_2 があったとき，y_1+y_2 も解となる．

ii) (1.1) で与えられる微分方程式の解が y のとき，ay も微分方程式の解となっている．ここで a は任意定数である．

ことがわかる．上記の 2 つの性質 i), ii), を満足する微分方程式は**線形**微分方程式と呼ばれる．

1.3　言葉の定義（2）：重ね合わせの原理

線形の微分方程式に従う運動にはきわめて重要な性質がある．（実はこれは「線形」という言葉の言い換えに過ぎず，トートロジーなのだが...）

いま (1.1) を満足する解 y_1 が得られたとする．すなわち，y_1 は

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}x^2} + A\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} + By_1 = 0, \tag{1.10}$$

を満足する．(1.1) は線形微分方程式なので，y_1 が (1.1) の解であるならば，その任意定数倍 $c_1 y_1$ も微分方程式 (1.1) を満足する．ここで，c_1 は任意定数である．さらに，y_1 の他に，微分方程式 (1.1) を満足する y_2 という解が見つかったとする．このときも以前と同様に $c_2 y_2$ もまた微分方程式 (1.1) の解となる．さらに，**線形性より** $c_1 y_1 + c_2 y_2$ **も** (1.1) **の解となる．**このように微分方程式の解が複数個見つかったとき，その任意定数倍をおのおの足してもまたもとの微分方程式の解を構成できる，という性質は**重ね合わせの原理**と呼ばれている．この重ね合わせの原理は，以下で見るように線形常微分方程式の**一般解**を構成するときに必要な知識である．

1.4　2 階の線形常微分方程式の解法 (1)

ここでは，(1.1) の解法として，代表的なものを紹介する．特に，**推定法**と呼ばれるもの取り上げることにする．

(1.1) の解を

$$y = e^{\lambda x}, \tag{1.11}$$

と推定する．(1.11) を (1.1) に代入して整理すると，

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0 \tag{1.12}$$

という λ に関する代数方程式が得られる．(1.12) は (1.1) の**特性方程式**と呼ばれ，(1.11) のように微分方程式の解を推定すると，微分方程式は，代数方程式に帰着される．

特性方程式 (1.12) の解は一般に 2 個ある．なぜならば，2 次方程式の解は一般に 2 個であるからである．その解を λ_1，λ_2 は

$$\lambda_1 = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2}, \tag{1.13}$$

である．そこで，(1.13) の結果と (1.11) を考慮すると，微分方程式の解は

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \tag{1.14}$$

の二つとなる．しかしながら，前節で述べたように，y_1, y_2 がともに線形微分方程式の解であるので，

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{1.15}$$

も微分方程式の解となる．(1.15) が (1.1) の一般解である．

2 階の微分方程式は，形式的には 2 回の不定積分を実行することにより解が求まる．1 回不定積分を実行すると積分定数である任意定数が 1 つ現れる．そこで，2 階の微分方程式の一般解には，形式的な 2 度の積分により，積分定数である任意定数が 2 個現れることになる．(1.15) は任意定数 c_1, c_2 を含んでいるので，(1.15) が微分方程式 (1.1) の一般解として充分である．

任意定数の決定には，ある特定の x の値における，y や $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ の値を指定してやることにより決定できる．2 階の微分方程式の一般解には 2 個の任意定数を含むので，この未定係数の決定には 2 個の条件を与えればよい．（時間発展問題では，このような条件はいわゆる初期条件として与えられる．）

なお，何らかの方法によって (1.1) を満足する解が 3 個 (y_1, y_2, y_3) 得られたとする．このときには，c_1, c_2, c_3 を任意定数として，y_1, y_2, y_3 のうちの 2 個の解の重ね合わせ

$$c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_2 y_2 + c_3 y_3, \quad c_3 y_3 + c_1 y_1 \tag{1.16}$$

のどれもが，(1.1) の一般解となる．(1.16) のどれもが一般解となるのは奇異に感じるかもしれない．しかしながら，いわゆる初期条件を代入して任意定数を決定してやると，(1.16) の 3 つの一般解はすべて同じ解に帰着されるのである．以下でその例を示そう．

例:　(1.2) の解を $x = e^{\lambda t}$ と推定すると，その特性方程式は $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ となる．ここで $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ である．特性方程式の解は $\lambda = \pm i\omega$ となので，したがって，これを推定した解の形に代入することにより，2 つの解

$$x = e^{i\omega t}, \quad x = e^{-i\omega t} \tag{1.17}$$

を得る．重ね合わせの原理により，この 2 つの解をそれぞれ任意定数倍したものももとの微分方程式の解であるので，(1.2) の一般解は

$$x = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \tag{1.18}$$

である．

また，$x = \sin \omega t$ も (1.2) を満足することがこれをもとの微分方程式に代入することにより容易に確かめることができる．したがって重ね合わせの原理によって

$$x = c_1 e^{i\omega t} + c_3 \sin \omega t \tag{1.19}$$

も (1.2) の一般解である．ここで初期条件として，$t = 0$ で $x = x_0$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$ とする．この条件を満足するためには (1.18) における任意定数は

$$c_1 = c_2 = \frac{y_0}{2} \tag{1.20}$$

でなければならず，(1.20) を (1.18) に代入して整理すると

$$x = x_0 \cos \omega t \tag{1.21}$$

となる．一方， 初期条件を満足するには，(1.19) における任意定数は

$$c_1 = x_0, \quad c_3 = -ix_0 \tag{1.22}$$

でなければいけない．(1.22) を (1.19) に代入すると，(1.22) は，(1.21) となる．つまり，任意定数を含んだ一般解の表現には任意性があるが，初期条件を考慮して任意定数を決定すれば，解は一意に決まる．

1.5　2 階の線形常微分方程式の解法 (2)

前節で $y = Ce^{\lambda x}$ とおき，微分方程式の特性方程式をつくり λ を求め，件の微分方程式の一般解を構成する方法を説明した．[*1] しかし，前節の方法が適用できない場合もある．特性方程式の解 λ が重根 $\lambda = \lambda_1$ になる場合がそのような場合である．このときには解の推定 $y = Ce^{\lambda x}$ が誤りであると判断し，改めて解を $y = C(x)e^{\lambda_1 x}$ と推定する．つまり，C を定数ではなく，x に依存した関数と考えるのである．このような方法は**係数変化法**と呼ばれる．このようにすると，C に関する微分方程式が得られので，これを解いて推定した解の形に代入すればよい．なお，係数変化法を用いる場合でも，解が $e^{\lambda x}$ に比例するという推定法が基本になっていることに注意しなさい．

例:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4y = 0 \tag{1.23}$$

[*1] 前節では $y = e^{\lambda x}$ という形の推定をしたが，これを任意定数 C 倍したものもまったく同じ特性方程式を満足する．したがって，前節の解の推定は一般には，$y = Ce^{\lambda x}$ としたものと解釈するべきである．

解を $y = Ce^{\lambda x}$ と推定する．ここで，C は任意定数である．特性方程式は,

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \tag{1.24}$$

となり，この解は $\lambda = -2$ の重根となる．そこで,

$$y = C(x)e^{-2x} \tag{1.25}$$

と改めておき，(1.23) に代入する．その結果,

$$\frac{\mathrm{d}^2 C}{\mathrm{d}x^2} = 0 \tag{1.26}$$

が得られ，(1.26) の解は $C = c_1 x + c_2$ となる．ここで，c_1，c_2 は任意定数である．したがって，微分方程式 (1.23) の一般解は

$$y = (c_1 x + c_2)\, e^{-2x} \tag{1.27}$$

となる．（注：(1.27) には任意定数が 2 個含まれている．つまり，2 階の微分方程式の一般解として充分である．）

1.6　非斉次型の微分方程式の解法

物理学においては，(1.1) の右辺にいわゆる外力項を含むような形をもった微分方程式も頻繁に登場する：

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + A\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + By = f(x). \tag{1.28}$$

ここで，A, B は定数である．

例 1:　質量 m の質点がバネ定数 k の線形バネにつながれており，さらに速度に比例する抵抗と周期的な外力 $A\sin\omega_0 t$ が質点に働いている場合，質点の平衡位置からのずれ x が従う運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + m\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = A\sin\omega t \tag{1.29}$$

となる．ここで，$\gamma > 0$ である．

例 2：　インダクタンス L のコイル，抵抗値 R の 抵抗，容量 C を持ったコンデンサを直列に接続した回路に起電力 $E(t)$ を加える．この回路の方程式は次のような微分方程式に従う：

$$L\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = E(t). \tag{1.30}$$

ここで, Q はコンデンサに蓄積される電荷であり, 回路を流れる電流 I とは $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ の関係がある.

(1.28) の右辺が 0 の微分方程式を，**斉次微分方程式**と呼び，右辺が 0 でない場合を**非斉次微分方程式**とよぶ．線形の非斉次微分方程式の解は，以下のように簡単に構成できる．

線形の非斉次微分方程式 (1.28) の解は，斉次微分方程式 (1.1) の一般解 y_g と，(1.28) を満足する任意の解 (これは**特殊解**と呼ばれている) のうちのひとつ y_p の和として表現できる．

実際に方程式の線形性から $y_\mathrm{g}, y_\mathrm{p}$ がそれぞれ

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_\mathrm{g}}{\mathrm{d}x^2} + A\frac{\mathrm{d}y_\mathrm{g}}{\mathrm{d}x} + By_\mathrm{g} = 0.$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 y_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2} + A\frac{\mathrm{d}y_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x} + By_\mathrm{p} = f(x).$$

であれば，$y = y_\mathrm{g} + y_\mathrm{p}$ は (1.28) を満足することが確かめられる．

特殊解が複数個見つかったときでも，そのうちの任意の 1 個のみを一般解 y_g に加えておけば (1.28) の解としては充分である．どの特殊解を選択するか，という自由度は一般解 y_g に含まれている任意定数で調整されるからである．初期条件を考慮すればどの特解を選んでも最終的な解は唯一に決まる．特殊解を求める方法は，非斉次項 $f(x)$ がある特定の形を持つ場合，常套手段が知られている．例えば，$f(x)$ が多項式の場合や $e^{px}, \cos px, \sin px$ といった場合には，やはり解を推定して代入することにより求める．また（以下で説明する）共鳴型の場合には係数変化法によって y_p を求めることができる．

例 3　以下の様な微分方程式を考える：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = A\sin\omega t \tag{1.31}$$

これは，例 1 において質点に抵抗が働かない場合の方程式である．なお，$\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ とし，$\omega_0 \neq \omega$ とする．

微分方程式 (1.31) の斉次方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1.32}$$

の一般解は，$x_\mathrm{g} = c_1 \sin\omega_0 t + c_2 \cos\omega_0 t$ である[*2]．特殊解は，解を $x_\mathrm{p} = f\sin\omega t$ と推定し，これをもとの方程式 (1.31) に代入して係数 f を定めればよい．実際に代入すると

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x_\mathrm{p} = -\omega^2 f\sin\omega t + \omega_0^2 f \sin\omega t = A\sin\omega t.$$

[*2] $x = c_1\exp[i\omega_0 t] + c_2\exp[-i\omega_0 t]$ と表現してもよい.

従って $f = A/(\omega_0^2 - \omega^2)$ を得る．よって，(1.31) の一般解は

$$x = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t \tag{1.33}$$

である．

この推定法のコツは，右辺が $\sin \omega t$ に比例するので，左辺の第 2 項も $\sin \omega t$ に比例するであろう，また，$\sin \omega t$ を t で 2 階微分すると（符号は別にして） もとの $\sin \omega t$ に戻ること（三角関数の重要な性質）に基づいている．(特殊解の推定として，$x_{\mathrm{p}} = f_1 \sin \omega t + f_2 \cos \omega t$ としてもよいが，これは経験をつむと冗長な解の推定であることがわかる．)

例 4　次に例 1 で与えられた微分方程式を考える:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma_0 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = A \sin \omega t. \tag{1.34}$$

ここで，$\gamma_0 \equiv \gamma/m$，$\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ とし，$\omega_0 \neq \omega$ とする．

微分方程式 (1.34) の斉次方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}t^2} + \gamma_0 \frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x_{\mathrm{g}} = 0 \tag{1.35}$$

の一般解は，$x_{\mathrm{g}} = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ である．ここで λ_1, λ_2 は特性方程式 $\lambda^2 + \gamma_0 \lambda + \omega_0^2 = 0$ の 2 つの解である．特殊解は，解を $x_{\mathrm{p}} = f_1 \sin \omega t + f_2 \cos \omega t$ と推定し，これをもとの方程式 (1.34) に代入して係数 f_1, f_2 を定める．この推定法のコツは，右辺が $\sin \omega t$ に比例するので，左辺の第 3 項も $\sin \omega t$ に比例するであろう．このとき，$\sin \omega t$ を t で 2 階微分すると（符号は別にして） もとの $\sin \omega t$ に戻るので，第 3 項も $\sin \omega t$ に比例する．しかしながら，$\sin \omega t$ の 1 階微分は $\cos \omega t$ なので，cos の項が左辺第 1 項に現れる．それをうまく消すためにもともと x_p の推定に $\cos \omega t$ も加えておき，適当に係数を調整して $\cos \omega t$ を消すようにする，というものである．実際に代入すると

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 x_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t^2} + \gamma_0 \frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x_{\mathrm{p}} \\
&= -\omega^2 f_1 \sin \omega t - \omega^2 f_2 \cos \omega t \\
&\quad + \gamma_0 (\omega f_1 \cos \omega t - \omega f_2 \sin \omega t) \\
&\qquad + \omega_0^2 (f_1 \sin \omega t + f_2 \cos \omega t) \\
&= (-\omega^2 f_1 - \omega \gamma_0 f_2 + \omega_0^2 f_1) \sin \omega t + (-\omega^2 f_2 + \omega \gamma_0 f_1 + \omega_0^2 f_2) \cos \omega t \\
&= A \sin \omega t.
\end{aligned}$$

従って f_1, f_2 は

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\omega \gamma_0 \\ \omega \gamma_0 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.36}$$

を満足する．(1.36) の解は,

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma_0^2}\begin{pmatrix} (\omega_0^2-\omega^2)A \\ -\omega\gamma_0 A \end{pmatrix}$$

なので，(1.34) の一般解は

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{A}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma_0^2}\left\{(\omega_0^2-\omega^2)\sin\omega t - \omega\gamma_0\cos\omega t\right\}. \tag{1.37}$$

例 5:　最後に共鳴型の問題を取り扱う．これは，(1.31) で，外力の振動数 ω ともともとバネのもつ固有振動数 ω_0 が等しい場合である．(1.31) の一般解で，$\omega=\omega_0$ とおくと x_{p} は発散する．そこで，先の特殊解 x_{p} の推定は破綻している．物理的にはこのような場合には，振動の振幅が時間ともに増大していく．そこで，x_{p} として，ω_0 で振動し振幅が時間に比例する

$$x_{\mathrm{p}} = f_1 t\sin\omega_0 t + f_2 t\cos\omega_0 t$$

と推定する．これを (1.31) の式に代入すると,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 x_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x_{\mathrm{p}} &= 2\omega_0(f_1\cos\omega_0 t - f_2\sin\omega_0 t) - \omega_0^2(f_1 t\sin\omega_0 t + f_2 t\cos\omega_0 t) \\ &\quad + \omega_0^2(f_1 t\sin\omega_0 t + f_2 t\cos\omega_0 t) \\ &= A\sin\omega_0 t.\end{aligned}$$

したがって，$f_1=0$, $f_2=-A/(2\omega_0)$．つまり特殊解は

$$x_{\mathrm{p}} = -\frac{At}{2\omega_0}\cos\omega_0 t \tag{1.38}$$

となる．

ひとりごと　：初等的な物理数学の有名な教科書に，非斉次形の微分方程式の解をロンスキー行列というものを使って表現する公式が書かれている．この公式を使って非斉次形の微分方程式を解くことを私は勧めない．むしろ，上で解説した推定法による解法を強く勧める．その理由は,

i)　この公式を使った解法は膨大な計算が必要となる．特に積分を複数回実行しなければいけない．それに比べれば，推定法による解法は計算量が格段に少なく，積分の必要はなく微分だけで解が求まるため容易である．(積分よりも微分のほうが圧倒的に計算は簡単である！)

ii)　この公式が成り立つにはある条件が必要である．公式の適用範囲を与えられた微分方程式が満足しているかをきちんと吟味しなければいけない．公式の適用

範囲と共に公式を記憶しておくことは，この公式が複雑な形をしているため（記憶力の落ちた私にとっては）難しい．

iii) 私が今までお目にかかった非斉次形の微分方程式で，推定法で解けなかったものはない．逆にロンスキー行列を使った公式にお世話になったことはない！

それでも貴方はロンスキー行列を使って非斉次形の微分方程式を解きますか？

最後に，ひとこと．

よい推定を行うには微分方程式を山ほど（もしくは星の数ほど）解いて知識と経験と勘を養うことである．

第 2 章

Fourier 級数

Fourier 級数は，有限区間で定義された関数を，その定義区間の整数分の一を周期として持つ三角関数で展開したものである．Fourier 級数は物理学（地球惑星科学も含む）や工学で広く応用されていて，方程式の求解や解析の手段として頻繁に用いられる．

2.1　級数展開

与えられた関数を有限個もしくは無限個の既知の関数の和として表現することは級数展開と呼ばれる．級数展開は

i) 関数の性質を調べる
ii) 関数を近似する
iii) 関数を具体的に計算する

というような手段を与えるので応用上きわめて重要である．

級数展開として，現在までに習ったものとしては解析関数 $f(x)$ に対する Taylor 展開がある:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dx^n}(x-a)^a + \cdots$$

Note　: Taylor 級数展開では展開の係数は展開される関数 $f(x)$ の微分によって表現されている．したがって，Taylor 級数展開が可能であるためには，$f(x)$ に連続性や微分可能性が要請される．また，Taylor 級数展開は展開の中心 $x = a$ の近傍でのみ正しい表現である．しかしながら，後で見るように Foureir 級数はそのような連続性や微分可能性を仮定することなく，関数を展開することができるために Taylor 級数よりもはるかに広いクラスの関数に対して適用できる．さらに関数の定義域全体にわたって関数を級数表現できるのである．

2.2　周期関数

関数 $f(x)$ が全ての x に対して, $f(x+T)=f(x)$ であるならば, $f(x)$ は T の周期をもつ, もしくは周期 T で周期的である，と呼ばれる．ここで T は正の定数である．最小の T は最小周期 (the least period) もしくは, 単に $f(x)$ の周期と呼ばれる．

例 1：　関数 $\sin x$ は, $2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\cdots$ の周期をもつ．なぜならば, $\sin(x+2\pi),\ \sin(x+4\pi),\ \sin(x+6\pi),\cdots$ は全て $\sin x$ と同じ値を持つからである．しかしながら, 2π が $\sin x$ の (最小) 周期である．

例 2：　$\sin nx$ もしくは $\cos nx$ の周期は $2\pi/n$ である．ここで, n は正の整数である．

例 3：　$\tan x$ の周期は, π である．

例 4：　定数は任意の正の周期を持つ．

2.3　Fourier 級数

関数 $f(x)$ は $(-L,L)$ の範囲内で定義され, その領域の外側では $f(x+2L)=f(x)$ とする．すなわち, $f(x)$ は $2L$ の周期をもつ．このとき $f(x)$ は

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{2.1}$$

と表現できる．これは $f(x)$ の Fourier 級数もしくは Fourier 級数展開と呼ばれる．ここで Fourier 係数 $a_n,\ b_n$ は

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x,\quad (n=0,1,2\cdots) \tag{2.2a}$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x,\quad (n=1,2\cdots) \tag{2.2b}$$

で与えられる．

2.4　Fourier 係数の導出

(2.1) の両辺に $\cos\frac{m\pi x}{L}$ を乗じて，x について $-L$ から L まで積分する．このとき $m\in\mathbb{N}$ に対して

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x=\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x=0, \tag{2.3}$$

および，$m,n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\ \cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x=\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\ \sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x=L\delta_{m,n}, \tag{2.4}$$

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x=0. \tag{2.5}$$

ここで $\delta_{m,n}$ は Kronecker のデルタである．上記の関係式を用いると，a_m についての公式 (2.2a) が得られる．同様にして，(2.1) の両辺に $\sin\frac{m\pi x}{L}$ を乗じて x について $-L$ から L まで積分すると，b_m に関する公式 (2.2b) が得られる．さらに，(2.1) の両辺を関数の定義域全体にわたって積分し，その結果を a_n, $(n\in\mathbb{N})$ の公式と見比べると，a_m は $m=0$ に対しても拡張できることがわかる．

2.5　Fourier 級数の例

以下の例で見るように，Fourier 級数を用いると無限級数の和を計算することができる．

例 1　$f(x)=x$, $(-\pi<x<\pi)$

Fourier 係数の公式より，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\ \cos\frac{n\pi x}{\pi}\,\mathrm{d}x=0,$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\ \sin\frac{n\pi x}{\pi}\,\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

したがって，

$$f(x)=2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots\right). \tag{2.6}$$

上式で $x=\pi/2$ とおけば，

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}&=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\end{aligned} \tag{2.7}$$

という級数が得られる．この級数は Leibniz の級数，もしくは Euler の級数と呼ばれるものである．

例 2　$f(x)=|x|$, $(-\pi\leq x\leq\pi)$

例 1 と同様にして

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \pi, \\
a_n &= \begin{cases} 0, & n \text{ が偶数} \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & n \text{ が奇数} \end{cases} \\
b_n &= 0.
\end{aligned}
$$

したがって,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right). \tag{2.8}$$

上式で $x = 0$, または $x = \pi$ とおけば,

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots . \tag{2.9}$$

例 3　$f(x) = x^2$, $(-\pi \leq x \leq \pi)$

例 1 と同様にして

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{3}\pi^2, \\
a_n &= (-1)^n \frac{4}{n^2}, \\
b_n &= 0.
\end{aligned}
$$

したがって,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots\right). \tag{2.10}$$

上式で $x = 0$ とおけば,

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots . \tag{2.11}$$

$x = \pi$ とおけば,

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots . \tag{2.12}$$

2.6　Fourier 級数展開に関するいくつかの注意

2.6.1　関数の定義域に関する注意

$f(x)$ が $c < x < c + 2L$ で定義され（ここで c は任意の実数である），$2L$ の周期をもつとする．このような場合にも $f(x)$ は (2.1) のように Fourier 級数展開できる．ただし,

Fourier 係数 a_n, b_n は

$$a_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x, \quad (n = 0, 1, 2\cdots) \tag{2.13a}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x, \quad (n = 1, 2\cdots) \tag{2.13b}$$

で与えられる．(2.13a), (2.13b) の証明は，(2.2a), (2.2b) を導出したのと同様に行える．関数 $f(x)$ の定義域が $c < x < c + 2L$ の場合にも (2.1) のように三角関数の重ね合わせとしてかけることを認めると，(2.1) の両辺に $\cos\frac{n\pi x}{L}$ を掛け, その結果を x について c から $c + 2L$ まで積分し整理すると (2.13a) が得られ，$\cos\frac{n\pi x}{L}$ の代わりに $\sin\frac{n\pi x}{L}$ を掛けて，同様の演算を行った場合には (2.13b) が得られる．

$c = -L$ の特別の場合には, (2.13a), (2.13b) はそれぞれ (2.2a), (2.2b) になる．もし $L = \pi$ ならば級数 (2.1) や係数 (2.2a), (2.2b), もしくは (2.13a), (2.13b) は特に簡単になる．この場合に関数は周期 2π をもつ．

なお，関数の定義域が変わっても関数自身の形は変わらないので，その Fourier 級数展開も変わらないはずである．実際に，(2.13a), (2.13b) は変数変換と $f(x)$ が周期 $2L$ を持つという性質を利用して，(2.2a), (2.2b) に帰着させることができる．したがって，(2.1), (2.2a), (2.2b) が Fourier 級数展開の基本形と言えるであろう．

2.6.2　係数 a_0 について

(2.1) の定数項は

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{-L}^{L}\mathrm{d}x}$$

に等しく, これは $f(x)$ の周期にわたる平均である．このことは積分を区分求積法に直すとすぐにわかる．

2.6.3　関数が不連続点を持つ場合

係数 (2.2a), (2.2b) をもつ級数 (2.1) は x_d が不連続点のときには

$$\frac{f(x_\mathrm{d}+0) + f(x_\mathrm{d}-0)}{2}$$

に収束する．

2.7 Parseval の恒等式

もし, a_n, b_n が関数 $f(x)$ の Fourier 係数のとき,

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{2.14}$$

が成り立つ．これは Parseval の恒等式と呼ばれる．この式は $f(x)$ の二乗平均値が Foureir 係数の二乗和として表現できることを示している．

2.8 Fourier 級数の収束性

先に導入した Fourier 級数 (2.1) はより厳密には,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{2.15}$$

と書き表すべきである．等号の記号を用いないで記号 $\sim$ を用いて両辺を結んだのは, (2.15) の右辺の三角関数の級数が左辺の $f(x)$ に**対応すること**を表すためである．級数の収束に関する各種の条件が満たされるときに初めて等号で結ぶことが出来る．ここでは Foureir 級数展開の収束性について，数学的な議論を紹介する．

まず言葉の定義を与えておく．

区分的に連続な関数:　次の条件を満足するときに，有限区間 $I = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ で定義された関数 $f(x)$ は区分的に連続であると呼ばれる．

i) $f(x)$ が I で有限個の点 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ をのぞいて連続

ii) 各不連続点 $x_1, x_2, \cdots x_k$ で

$$f(x_i+0) = \lim_{t\to+0} f(x_i+t),\ f(x_i-0) = \lim_{t\to-0} f(x_i+t) \tag{2.16}$$

が存在．

iii) I の左右両端点 a, b で

$$f(a+0) = \lim_{t\to+0} f(a+t),\ f(b-0) = \lim_{t\to+0} f(b-t) \tag{2.17}$$

が存在．

定理：　関数 $f(x)$ は周期 $2L$ を持つ周期関数で，区分的に連続であるとする．さらに $f'(x)$ も区分的に連続であるとする．このとき $f(x)$ の Fourier 級数は

- $f(x)$ が連続な点で，$f(x)$ に収束し

- $f(x)$ が不連続な点では $\dfrac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$ に収束する．

上記定理を証明するための方法について述べておく．なお，関数 $f(x)$ は周期が 2π であるとする．2π 以外の周期をもつ関数についても同様に証明できる．

準備 1：

$$\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos mt=\frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t} \tag{2.18}$$

を証明する．

準備 2：　(2.18) を用いて，

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}, \tag{2.19}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}, \tag{2.20}$$

を証明する．

準備 3：　定理を満足する関数 $f(x)$ について

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n^2+b_n^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x \tag{2.21}$$

を証明する．

準備 4：　(2.21) を利用すると，定理を満足する関数 $f(x)$ について

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0 \tag{2.22}$$

が証明できる．

準備 5：　さらに (2.22) を利用すると，定理を満足する関数 $f(x)$ について

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x\,\mathrm{d}x=0 \tag{2.23}$$

が証明できる．

準備 6：　$f(x)$ が周期 2π を持ち，定理の条件を満足すれば，$f(x)$ の Fourier 級数の部分和

$$S_m(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{2.24}$$

は

$$S_m(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\,\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,\mathrm{d}t \tag{2.25}$$

となることが示せる.

定理の証明（step 1）：

$$
\begin{aligned}
S_m(x) - \left(\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right) = \\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{f(t+x)-f(x-0)}{2\sin\frac{1}{2}t}\sin(m+\frac{1}{2})t\,\mathrm{d}t \\
+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{f(t+x)-f(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}\sin(m+\frac{1}{2})t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

を示す.

定理の証明（step 2）：　(2.23) を用いて

$$
\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{f(t+x)-f(x-0)}{2\sin\frac{1}{2}t}\sin(m+\frac{1}{2})t\,\mathrm{d}t = 0, \tag{2.27}
$$

$$
\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{f(t+x)-f(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}\sin(m+\frac{1}{2})t\,\mathrm{d}t = 0 \tag{2.28}
$$

を示す．これらと (2.26) より定理が証明される.

第 3 章

Fourier 級数の複素表現 (複素 Fourier 級数展開)

3.1　実 Fourier 級数からの導出

Euler の恒等式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{3.1}$$

を使うと, 周期 $2L$ の関数 $f(x)$ の Fourier 級数はもっと簡潔に書き下すことができる. (3.1) より

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i},\end{aligned} \tag{3.2}$$

である. (2.1) の cosine, sine を Euler の関係式を用いて表せば,

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\frac{e^{in\pi x/L}+e^{-in\pi x/L}}{2} + b_n\frac{e^{in\pi x/L}-e^{-in\pi x/L}}{2i}\right\}\\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_n-ib_n}{2}\,e^{in\pi x/L} + \frac{a_n+ib_n}{2}\,e^{-in\pi x/L}\right\}\end{aligned} \tag{3.3}$$

ここで, $c_n = (a_n - ib_n)/2, (n \neq 0)$ と定義する．(2.2a), (2.2b) を用いると

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x - \frac{i}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x, \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{L} - i\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x, \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi/L}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.4}$$

また (3.4) を用いると,

$$\frac{a_0}{2} = c_0 \tag{3.5}$$

と表現できる．したがって, (3.3) は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \tag{3.6}$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}\mathrm{d}x, \tag{3.7}$$

と書ける．(3.6) を複素 Fourier 級数展開もしくは Fourier 級数展開の複素表示と呼び, c_n は複素 Fourier 係数と呼ばれる．なお, $f(x)$ は実数関数であったので, $c_n^* = c_{-n}$ であることに注意せよ. ここで, $*$ は複素共役を表す. [*1]

3.2 いくつかの注意

Note 1: 周期関数 $f(x)$ が連続で，しかも $f'(x)$ も連続であって, さらに $f''(x)$ が区分的に連続であれば, $f'(x)$ の Foureir 級数は $f(x)$ の Foureir 級数を項別に微分して得ることができる.[*2] したがって, このように Foureir 級数を Euler の関係式を用いて複素表示しておくと, Fourier 級数展開した $f(x)$ の微分や積分が容易に行うことができるようになる．(cosine や sine の微分・積分よりも指数関数の微分・積分のほうがはるかに楽であることを思い起こせばよい．)

Note 2: 複素 Fourier 係数 c_n を用いると, Parseval の恒等式は,

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)^2\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{3.8}$$

と表せる.

[*1] i は純虚数 $i = \sqrt{-1}$ である．これは万国共通の記号と思っていたが, 数年前に電気工学の分野では純虚数は j で表すらしいことを知った．電気工学では i は交流電流に用いられる記号（直流電流は I）で, それと混同しないように j を用いるらしい.

[*2] この定理の証明は省略する.

Note 3:　$c_n = c_{-n}^*$ は, 複素 Fourier 級数の導出の過程で得られたものであるが, 以下で見るように $f(x)$ が実であるための条件とみなせる．(3.6) で両辺の複素共役を取ると,

$$\text{l.h.s.} = f(x)^* = f(x),$$
$$\text{r.h.s.} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-in\pi x/L}.$$

n の符号を入れ替えると,

$$\text{r.h.s.} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}^* e^{in\pi x/L}.$$

したがって,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}^* e^{in\pi x/L}. \end{aligned}$$

つまり

$$c_n = c_{-n}^* \tag{3.9}$$

が導かれる．

Note 4:　今までは周期 $2L$ を持つ実数関数の Fourier 級数展開を考えてきたが，周期 $2L$ を持つ 2 つの実数関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$ から作られる複素数値をとる関数

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x) \tag{3.10}$$

も Fourier 級数展開や複素 Fourier 級数展開することができる．f_1, f_2 が以下のように Fourier 級数表示されるものとする：

$$f_1(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \beta_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right\}, \tag{3.11}$$

$$f_2(x) = \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \gamma_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \delta_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right\}. \tag{3.12}$$

ここで,

$$\alpha_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_1(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x, \tag{3.13}$$

$$\beta_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_1(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x, \tag{3.14}$$

$$\gamma_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_2(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x, \tag{3.15}$$

$$\delta_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_2(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x, \tag{3.16}$$

である．(3.10) の定義から $f(x)$ の Fourier 級数表示は

$$f(x) = \frac{\alpha_0 + i\gamma_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(\alpha_n + i\gamma_n)\cos\frac{n\pi x}{L} + (\beta_n + i\delta_n)\sin\frac{n\pi x}{L}\right\} \tag{3.17}$$

となるが，係数 $\alpha_n + i\gamma_n$, $\beta_n + i\delta_n$ を改めて a_n, b_n と記せば,

$$f(x) = \frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right\} \tag{3.18}$$

とおくと，a_n, b_n は (3.13) $\sim$ (3.16) と (3.10) を使って

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x, \tag{3.19}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x, \tag{3.20}$$

と書ける．さらに Euler の関係式を用いれば (3.18) は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{n\pi x/L} \tag{3.21}$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}\mathrm{d}x \tag{3.22}$$

とも書くことができる．これらの議論は，実部，虚部が周期 $2L$ の実関数で作られる複素数値をもつ関数の場合でも，今まで議論してきた Fourier 級数や複素 Fourier 級数の表式はそのまま当てはまる．なお Parseval の恒等式は

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \tag{3.23}$$

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 \tag{3.24}$$

である．したがって，(2.14) と (3.8) をそれぞれ (3.23) や (3.24) のように表現しておけば，その公式は $f(x)$ が複素数関数や実数関数の場合でも適用できる．

Note 5:　周期 $2L$ の関数 $f(x)$ が (3.6) の右辺のように展開できると仮定すれば，実 Fourier 級数の実 Fourier 係数の公式を経なくても，複素 Fourier 係数の公式を導出することができる．導出の方法は，実 Fourier 係数を導いた方法と同様である．

(3.6) の両辺に $e^{im\pi x/L}$ を乗じて，x について $-L$ から L まで積分する．

$$\text{(l.h.s.)} = \int_{-L}^{L} f(x) e^{im\pi x/L}\, \mathrm{d}x.$$

$$\text{(r.h.s.)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-L}^{L} e^{i(m+n)\pi x/L}\, \mathrm{d}x.$$

ここで，

$$\int_{-L}^{L} e^{i(m+n)\pi x/L}\, \mathrm{d}x = 2L\delta_{m,-n} \tag{3.25}$$

を用いると，

$$\text{(l.h.s)} = 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{m,-n} = 2L c_{-m} \tag{3.26}$$

以上の結果を整理すると，複素 Fourier 係数の公式

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\pi x/L}\, \mathrm{d}x. \tag{3.27}$$

が得られる．

3.3　複素 Fourier 級数の例

2.5 節の例 3 を複 Fourier 級数で表現（計算）してみる．

定義域が $(-\pi \le x \le \pi)$ で周期 2π の周期関数 $f(x) = x^2$ の複素 Fourier 係数は，

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, e^{-inx}\, \mathrm{d}x \\ &= \begin{cases} (-1)^n \frac{2}{n^2}, & (n \neq 0), \\ \frac{\pi^2}{3}, & n = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.28}$$

したがって，

$$\begin{aligned} x^2 &= \cdots - \frac{2}{3^2}e^{-3ix} + \frac{2}{2^2}e^{-2ix} - \frac{2}{1^2}e^{-ix} + \frac{\pi^2}{3} - \frac{2}{1^2}e^{ix} + \frac{2}{2^2}e^{2ix} - \frac{2}{3^2}e^{3ix} + \cdots \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots\right). \end{aligned} \tag{3.29}$$

3.4　関数を近似する

$-L < x < L$ に範囲で定義された周期 $2L$ の実周期関数 $f(x)$ は無限項の三角関数（$\exp\left[\frac{n\pi x}{L}\right]$, $n = -\infty, \ldots -1, 0, 1, \ldots \infty$）の重ねあわせで表現できるが，もし有限項の三角関数の重ねあわせで関数 $f(x)$ を表現しようとするときには，各三角関数の係数をどのように選ぶと誤差が少なくなるか，と言うことについて考えて見る．

有限項の三角関数で表現された関数を

$$g(x) = \sum_{n=-N}^{N} d_n e^{ik_n x}, \tag{3.30}$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \tag{3.31}$$

とする．$N \to \infty$ で $g(x) \to f(x)$ となる．一般に $f(x) \neq g(x)$ である．いま，$f(x)$ と $g(x)$ の間の最小自乗誤差を ϵ とする：

$$\epsilon = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |f(x) - g(x)|^2 \, \mathrm{d}x. \tag{3.32}$$

どのように d_n を選ぶと ϵ を最小にできるであろうか．Foureir 級数の知識を用いると，

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left|\sum_{n=-N}^{N}(c_n-d_n)e^{ik_nx}+\sum_{|n|>N}c_ne^{ik_nx}\right|^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-N}^{N}(c_n-d_n)(d_m-c_m)e^{i(k_n+k_m)x}\,\mathrm{d}x \\
&\quad +\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\sum_{n=-N}^{N}\sum_{|m|>N}(c_n-d_n)c_me^{i(k_n+k_m)x}\,\mathrm{d}x \\
&\qquad +\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\sum_{|n|>N}\sum_{|m|>N}c_nc_me^{i(k_n+k_m)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-N}^{N}(c_n-d_n)(d_m-c_m)\delta_{n,-m} \\
&\quad +2\sum_{n=-N}^{N}\sum_{|m|>N}(c_n-d_n)c_m\delta_{n,-m} \\
&\qquad +\sum_{|n|>N}\sum_{|m|>N}c_nc_m\delta_{n,-m} \\
&= \sum_{n=-N}^{N}|c_n-d_n|^2+\sum_{|n|>N}|c_n|^2.
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

ここで，d_n を変化させて ϵ を最小にするためには

$$
\frac{\partial\epsilon}{\partial d_n}=0 \tag{3.34}
$$

でなければならない．(3.34) に (3.33) を代入し整理すると，

$$
c_n=d_n \tag{3.35}
$$

が得られる．c_n は関数 $f(x)$ の Fourier 係数なので，有限の三角関数の重ねあわせで関数 $f(x)$ を近似するときには，重ねあわせの係数 d_n として Fourier 係数 c_n を用いれば誤差は最小となることが上の解析からわかる．[*3]

[*3] ここで用いた関数をある既知の関数の重ねあわせとして表現しておいて，その係数の変分をとることにより関数の変分を計算するやり方は，Rayleigh-Rits の変分方法と呼ばれるものである．

第 4 章

Fourier 変換と Fourier 積分

4.1 復習

4.1.1 Fourier 級数

$-L < x < L$ の範囲（即ち**有限区間**）内で定義され, $2L$ の周期を持つ**実関数** $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k_n x + b_n \sin k_n x) \tag{4.1}$$

と展開できる．ここで $k_n \equiv n\pi/L$ であり, Fourier 係数 a_n, b_n は

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos k_n x \, \mathrm{d}x, \quad (n = 0, 1, 2 \ldots) \tag{4.2}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin k_n x \, \mathrm{d}x, \quad (n = 1, 2 \ldots) \tag{4.3}$$

で与えられる．これが全ての基本である．

4.1.2 Fourier 級数の複素表現

上記の展開で，三角関数を Euler の関係式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ を用いて書き直すと Fourier 級数展開は,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik_n x} \tag{4.4}$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-ik_n x} \, \mathrm{d}x \tag{4.5}$$

と書ける．$f(x)$ が実関数のとき, 複素表示の Fourier 級数展開では $c_n = c_{-n}^*$ の関係が存在する．

4.2　Fourier 変換

有限区間で定義された**周期関数**を三角関数で展開したのが Fourier 展開であった．取り扱う関数を有限区間で定義された**周期関数**から**無限区間** $-\infty < x < \infty$ **で定義された関数**（周期は無限大, 即ち周期関数でなくてもよい）に拡張した Fourier 級数展開の複素表示が, 以下で説明する Fourier 変換である．このとき，展開は無限級数の形ではなく, 積分の形で表現される．

4.2.1　Fourier 変換の導出

Step 1　：　(4.5) を (4.4) に代入する: [*1]

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \left\{ \int_{-L}^{L} f(x') e^{-ik_n x'} \mathrm{d}x' \right\} e^{ik_n x} \tag{4.6}$$

係数 $1/(2L)$ は $1/(2L) = \Delta k/(2\pi)$ と表現できる．ここで, $\Delta k \equiv k_n - k_{n-1}$ である．従って, (4.6) は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta k}{2\pi} \left\{ \int_{-L}^{L} f(x') e^{-ik_n x'} \mathrm{d}x' \right\} e^{ik_n x} \tag{4.7}$$

と書ける．

Step 2　：　$L \to \infty$ の極限をとる．即ち，関数の周期を無限に長いとする．このとき, 離散的変数（離散的波数）であった k_n は連続的変数（連続的波数）になり, また, 和は積分に置き換えられる（n に関する和は, k に関する積分に置き換えられる）:[*2]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta k \to \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k. \tag{4.8}$$

従って, (4.7) は

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} \mathrm{d}x' \right\} e^{ikx} \tag{4.9}$$

と書ける．

[*1] c_n の積分の積分変数に注意．積分変数には任意の文字が使える．ここでは $f(x)$ の変数 x との混同を避けるため, c_n の積分変数には x' を用いることにする．

[*2] 区分求積法の極限が積分になることを思い出そう．

Step 3（final step） ： ここで,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} \mathrm{d}x' \tag{4.10}$$

と置くと, (4.9) のように表現された $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \mathrm{d}k \tag{4.11}$$

と表現できる．(4.10) は関数 $f(x)$ の **Fourier 変換**と呼ばれ, しばしば $\hat{f}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ と書かれる．一方, $f(x)$ は $\hat{f}(k)$ の**逆 Fourier 変換** (inverse Fourier transform) と呼ばれ, $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(k)\}$ と書かれる．

4.2.2 いくつかの注意

Note 1 ： (4.9) はある関数 $f(x)$ を Fourier 変換し, さらにそれを逆変換すれば, もとの関数 $f(x)$ に戻る:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\{f(x)\}\right]. \tag{4.12}$$

ことを言っているに過ぎない.

Note 2 ： (4.9) を

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' f(x') \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} \mathrm{d}k \right\} \tag{4.13}$$

と書き換えておくと,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x-x') \mathrm{d}x' = f(x) \tag{4.14}$$

という性質を持った関数 $\delta(x-x')$,

$$\delta(x-x') \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} \mathrm{d}k, \tag{4.15}$$

が存在することが期待される．実際, このような関数は **Delta 関数** (もしくはこの関数を提唱した人の名前をつけて, Dirac の Delta 関数) と呼ばれ, 量子力学を定式化するときに Dirac が導入した関数である．この関数は一般の関数とは異なった性質を持っており超関数という部類の関数に位置付けられる.[*3] (4.14) で $f(x) = 1$

[*3] Dirac が Delta 関数を導入してから, 数学にあらたに超関数を研究する分野が出来上がったらしい. Delta 関数が量子力学にいかに導入されたかは, Dirac の量子力学のテキスト, Principles of Quantum Mechanics, Oxford Univ. Press (日本ではみすず書房が発行), 日本語訳は岩波書店が発行, を参照して欲しい．これも理学部の大学生としては一度は手にとって眺めておいて欲しい書物である.

とおくと

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{4.16}$$

が導かれる．これも Delta 関数の重要な性質の一つである．Delta 関数は Kroneker の Delta,

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases} \tag{4.17}$$

ここで m, n は整数, の連続変数版 (m, n が整数ではなく実数の場合の Kroneker の Delta) と見なせる．

Note 3　：　(4.10), (4.11) に現れる係数 $1/(\sqrt{2\pi})$ は Fourier 変換, 逆 Fourier 変換が対称的な形になるように選んである．テキストによっては,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-ikx'}\mathrm{d}x' \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k \tag{4.18}$$

や

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-ikx'}\mathrm{d}x' \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k \tag{4.19}$$

と表現している場合がある．これは (4.9) に現れている係数 $1/(2\pi)$ をどのように分解するか, という任意性に由来している．ともかく, 正変換のあと逆変換して元の関数に戻るように係数をうまく分解してくっつけておけばよい．

Note 4　：　テキストによっては, Fourier 変換, Fourier 逆変換を

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{ikx'}\,\mathrm{d}x' \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{-ikx}\,\mathrm{d}k \tag{4.20}$$

と表現している場合もある．上式は $x \to -x$, $k \to -k$ という変数変換によって, 先の公式 (4.10), (4.11) に戻る．これも, 正変換を, $\int \ldots e^{ikx}\,\mathrm{d}x$ で定義したら, 逆変換を $\int \ldots e^{-ikx}\,\mathrm{d}k$ で定義するという風に, やはり正変換のあと逆変換して元の関数に戻るようになっていればよい．（Delta 関数についても同様.）

Note 5　:　$f(x)$ が実であれば,

$$\hat{f}(-k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-ikx'}\mathrm{d}x' = \hat{f}(k)^* \tag{4.21}$$

である．これは複素表示の Fourier 級数における Fourier 係数 c_n が満足する関係 $c_{-n} = c_n^*$ に対応するものである．

Note 6 : Parseval の恒等式は,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(k)\right|^2 \mathrm{d}k \tag{4.22}$$

と表せる.

Note 7 : 複素 Fourier 級数の補足説明でも同様のことを述べたが，関数 $f(x)$ が (4.11) の右辺のように表現できることを認めれば，Fourier 変換の公式 (4.10) の公式は，以下のように導くことができる．

(4.11) の両辺に $e^{ik'x}$ を乗じて x について $-\infty$ から ∞ まで積分する．

$$\text{l.h.s} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ik'x}\,\mathrm{d}x.$$

$$\text{r.h.s} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\hat{f}(k)e^{i(k+k')x}.$$

ここで,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k+k')x}\,\mathrm{d}x = 2\pi\delta(k+k'),$$

を用いると,

$$\text{r.h.s} = \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\,\hat{f}(k)\delta(k+k') = \sqrt{2\pi}\hat{f}(-k').$$

以上を整理すると,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x,$$

すなわち (4.10) を得る．

4.3 Fourier 積分

Fourier 変換とは，周期的な関数の表現である複素 Fourier 級数展開を，周期のない関数に拡張したものであることは前節で示した．いっぽう複素 Fourier 級数展開とは，Fourier 級数展開の展開関数である三角関数を Euler の関係式を用いて単に書き直したものである．したがって，上記の 2 つの関係から，周期的な関数の表現である Fourier 級数展開を，周期のない関数に拡張した表現も存在するであろうことは容易に想像がつく．それは Fourier 積分と呼ばれるものである．

通常のテキストでは，Fourier 級数展開の拡張として Fourier 積分を導入し，さらにそれを複素表示して Fourier 変換を導入するが，ここでは順序を逆にして，Fourier 変換から Fourier 積分を導いてみる．

4.3.1　Fourier 積分の導出

Step 1　$f(x)$ の Fourier 変換を $\hat{f}(k)$ とし，

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x \tag{4.23}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \mathrm{d}k \tag{4.24}$$

と定義する．このとき，$f(x)$ が実数関数であるという要請から，

$$\hat{f}(-k)^* = \hat{f}(k) \tag{4.25}$$

となる．

Step 2　(4.24) を以下のように変形する：

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \mathrm{d}k + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} \hat{f}(k) e^{ikx} \mathrm{d}k.$$

上式右辺第二項は積分変数を $k \to -k$ と変換し，さらに (4.25) の関係式を用いると，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \mathrm{d}k + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} \hat{f}(k)^* e^{-ikx} \mathrm{d}k \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\hat{f}(k) e^{ikx} + \hat{f}(k)^* e^{-ikx} \right) \mathrm{d}k \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \mathrm{Re} \left[\hat{f}(k) e^{ikx} \right] \mathrm{d}k. \end{aligned} \tag{4.26}$$

$\hat{f}(k)$ の実部，虚部をそれぞれ $\hat{f}_{\mathrm{r}}(k)$, $\hat{f}_{\mathrm{i}}(k)$ とすると，(4.26) は

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left\{ \hat{f}_{\mathrm{r}}(k) \cos kx - \hat{f}_{\mathrm{i}}(k) \sin kx \right\} \mathrm{d}k \tag{4.27}$$

となる．

Step 3　(4.23) より

$$\hat{f}_{\mathrm{r}}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x,$$

$$\hat{f}_{\mathrm{i}}(k) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x,$$

とあたえられるので，あらためて $A(k)$, $B(k)$ として

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos kx \mathrm{d}x, \tag{4.28}$$

$$B(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin kx \mathrm{d}x, \tag{4.29}$$

を定義すると，(4.27) は

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \{A(k)\cos kx + B(k)\sin kx\}\, \mathrm{d}k \tag{4.30}$$

となる．(4.30) を $f(x)$ の Fourier 積分表示という．

4.3.2 いくつかの注意

Note 1:　テキストによっては Fourier 積分は

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{d}k \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi f(\xi) \cos k(x-\xi) \tag{4.31}$$

と表現しているものもある．これは，(4.30) の $A(k)$, $B(k)$ に (4.28), (4.29) を代入すれば直ちに得られる．

Note 2:　周期関数 $f(x)$ の Fourier 級数展開を周期のない関数に拡張するというやり方（これは Fourier 変換の導出のところで行ったものと全く同じやり方）で (4.28), (4.29), (4.30) を導くことが出来る．

4.4 まとめ

Fourier 級数，複素 Fourier 級数，Fourier 積分，Fourier 変換の相互の関係は以下のようにまとめることが出来る．

Fourier 級数	→ (Euler の関係式を用いて複素表示) →	**複素 Fourier 級数**
↓		↓
(周期関数から非周期関数へ拡張)		(周期関数から非周期関数へ拡張)
↓		↓
Fourier 積分	→ (Euler の関係式を用いて複素表示) →	**Fourier 変換**

第 5 章

Fourier 級数展開（Fourier 変換）の幾何学的意味〜直交関数展開〜

第 2 章では，周期関数の Foureir 級数を天下り的に導入し，それを出発点として複素 Fourier 級数展開, Fourier 積分，Fourier 変換と拡張を行ってきた．本節では，再び Fourier 級数展開に戻って，ベクトルという立場から, その意味 (ココロ) を説明することにする．ここに登場する考え方や概念は, ベクトルと三角関数と三角関数の積分だけ, 即ち高校の数学で習ったものだけである．

5.1　ベクトルの復習

まず, 高校生のときに習ったベクトルの復習をしておく．なお，高校の時にはベクトル量は $\vec{A}$ などと上付きの矢印を付してスカラー量と区別した．しかし，理由は知らないが大学の講義や大学で使う教科書，研究論文ではベクトル量は $\boldsymbol{A}$ など太字であらわすのが慣例である．ここでもベクトル量は太字で表すことにする．[*1]

3 次元空間内の任意のベクトルを $\boldsymbol{u}$ とする．デカルト座標系では $\boldsymbol{u}$ は次のように表現

[*1] 大学入学当初，ベクトル量を太字で書くことを習ったときには，一生懸命アルファベットの太字がうまく書けるように練習した．ベクトルを $\boldsymbol{A}$ と表記すると高校数学を超えたもっと高級なもの，程度の高いものをやっているような錯覚を覚えたからである．皆さんもそんな経験はありませんか？
例年，3 回生対象の講義「地球流体力学」を担当していると，ベクトル解析の理解がきわめて不十分な学生が少なからずいることに気づかされる．ベクトル量はスカラー量とは上に述べたように記号的に区別をつけなければいけないのに，区別をつけてない人がいる，ベクトル量の積算には内積と外積があり，やはりこれもぞれぞれ $\cdot$ と $\times$ と記号の区別があるのにこの区別もできない，（積算に何の記号もつけてない人がいた．これではいったいどのような演算をしているのかわからない．内積はその結果はスカラーになるが，外積はベクトル量である．）などなど... 力学，電磁気学，流体力学を学ぶ上ではベクトル解析は基本的な言語であるので，しっかり理解しておいてほしい．このようなことは流体力学を学ぶ以前の問題である．

される：

$$\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j} + u_z\boldsymbol{k}. \tag{5.1}$$

ここで, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルであり u_x, u_y, u_z はそれぞれ x, y, z 方向の $\boldsymbol{u}$ の成分である. [*2]ベクトルでは「内積」という演算が定義でき，単位ベクトルは内積に対して次のような性質を持つベクトルである：

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = 0, \quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = 0, \quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0, \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = |\boldsymbol{i}|^2 = 1, \quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = |\boldsymbol{j}|^2 = 1, \quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = |\boldsymbol{k}|^2 = 1. \tag{5.3}$$

(5.2) 式の性質は,

- 異なる単位ベクトルは互いに直交する

という性質を表しており, (5.3) 式の性質は,

- 単位ベクトルの大きさは 1 である

ことを表している．成分 u_x, u_y, u_z は単位ベクトルのこのような性質を用いて，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ との内積をそれぞれ計算することにより求められる．例えば $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{i}$ の内積は,

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{i} = u_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} + u_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = u_x|\boldsymbol{i}|^2.$$

従って,

$$u_x = \frac{1}{|\boldsymbol{i}|^2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{i}. \tag{5.4}$$

同様にして u_y, u_z は,

$$u_y = \frac{1}{|\boldsymbol{j}|^2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{j}, \quad u_z = \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{k}. \tag{5.5}$$

と求められる．ここでは, あるデカルト座標系でベクトル $\boldsymbol{u}$ を表現したが, いま考えた座標系を例えば z 軸を回転軸にして任意の角度回転させたような座標系 (単位ベクトルが

[*2] ベクトル $\boldsymbol{u}$ を高校数学では $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ と書いていたが，大学では $\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j} + u_z\boldsymbol{k}$ と単位ベクトルを使って書く．このような表式もぜひ採用してほしい．ベクトルの微分を考えるときに，デカルト座標系では単位ベクトルの空間微分は 0 なので，デカルト座標で成分表示されたベクトルの空間微分では，それは単に各成分を微分すればよかった．しかしながら，円柱座標系や極座標系では単位ベクトルの方向が場所によって異なるために，ベクトルをこれらの座標系で成分表示したときの空間微分は，ベクトルの成分の微分のほかに単位ベクトルの微分も残ってくる．また，回転座標系では単位ベクトルは時々刻々回転しその向きを変えていくので，やはりベクトルを回転座標系で成分表示したときには，その時間微分は単位ベクトルの時間微分を含むことになる．高校数学のようにベクトルの成分表示を (u_x, u_y, u_z) と書いていると，このようなことに気づかずに大きな過ちを犯すことになる．

$\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}$, これも直交座標系である) を考えることができる．つまり空間の中にはいろいろな直交座標系を張ることができる．そして各座標系で全く同じようにベクトル $\boldsymbol{u}$ を表現できる (展開できる)．このとき, 各座標系における $\boldsymbol{u}$ の成分の値は異なる (表現は異なる) が, $\boldsymbol{u}$ はあくまでも $\boldsymbol{u}$ である．どういう座標系を用いて $\boldsymbol{u}$ を表現するればよいか? それは問題が最も簡単に取り扱えるような座標系を選べばよい.

5.2 Fourier 級数展開のココロ

ここでは Fourier 級数展開 (4.1) 式とは関数 $f(x)$ を (5.1) 式の様な形に展開したものであることを説明する．即ち，関数 $f(x)$ がベクトル $\boldsymbol{u}$ に，可算無限個[*3]の三角関数 $\cos(k_n x)$, $\sin(k_n x)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ が単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, に，可算無限個の Fourier 係数 a_n, b_n が成分 u_x, u_y, u_z に対応する．関数を可算無限次元のベクトルと見做すことがミソである.

ベクトル - 関数 対応表		
$\boldsymbol{u}$	$\Longleftrightarrow$	$f(x)$
$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$	$\Longleftrightarrow$	$\cos(k_n x)$, $\sin(k_n x)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$
u_x, u_y, u_z	$\Longleftrightarrow$	a_n, b_n, $(n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$

関数 $f(t)$ が (5.1) 式の様な形に展開できるということは, 単位ベクトルに相当する三角関数が, (5.2) 式に相当する性質を持っていなければならない．そこで, まず「関数の内積」を定義する．関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との内積を (f, g) で表し,

$$(g, f) \equiv \int_{-L}^{L} g^*(x) f(x) \, \mathrm{d}x, \tag{5.6}$$

と定義する．ここで, $*$ は複素共役を表す．即ち, $f(x)$ の複素共役と $g(x)$ の積を関数の定義域で積分する．今の場合は実関数を考えているので, ”複素共役”を定義に持ち込まなくてもよいが, Fourier 変換のように複素関数を取り扱うときに必要となる．(5.6) 式の定義のもと, 三角関数の内積を計算する.

$$\Big(\sin(k_m x), \cos(k_n x)\Big) = \int_{-L}^{L} \sin(k_m x) \cos(k_n x) \, \mathrm{d}x = 0, \tag{5.7}$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \ldots, \infty).$$

[*3] 1, 2, 3, . . . と勘定できる無限大のこと．例えば自然数全体の集合の要素の個数がこれに相当する．これに対し, 数えられない無限大（非可算無限）とは実数全体の集合の要素の個数のようなもの.

$$\Big(\sin(k_m x), \sin(k_n x)\Big) = \int_{-L}^{L} \sin(k_m x)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{5.8}$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \ldots, \infty.\ \text{但し},\ m \neq n).$$

$$\Big(\cos(k_m x), \cos(k_n x)\Big) = \int_{-L}^{L} \cos(k_m x)\cos(k_n x)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{5.9}$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \ldots, \infty.\ \text{但し},\ m \neq n).$$

$$\Big(\sin(k_n x), \sin(k_n x)\Big) = \int_{-L}^{L} \sin^2(k_n x)\,\mathrm{d}x = L, \tag{5.10}$$

$$(n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

但し, $\sin(k_0 x)$ は恒等的にゼロであるから (5.10) 式において $n = 0$ は考えなくてよい.[*4]

$$\Big(\cos(k_n x), \cos(k_n x)\Big) = \int_{-L}^{L} \cos^2(k_n x)\,\mathrm{d}x = L, \tag{5.11}$$

$$(n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

但し, $\cos(k_0 x)$ は恒等的に 1 であるから (5.11) 式において $n = 0$ は別に考える必要がある.

$$\Big(\cos(k_0 x), \cos(k_0 x)\Big) = (1, 1) = \int_{-L}^{L} \mathrm{d}x = 2L. \tag{5.12}$$

三角関数の内積で考えられるものは, 上にすべて列挙した. (5.7) 式〜(5.9) 式は三角関数は互いに直交している (単位ベクトルは互いに直交することに対応：(5.2) 式参照) ことを表している. 一方 (5.10) 式〜(5.12) 式は三角関数の大きさの二乗を表している. 上で見たように三角関数は内積の大きさが 1 になっていない. 即ち単位 (ベクトル) ではないことが特徴である.

三角関数の上に挙げた性質を利用して, 関数 $f(x)$ の (4.1) 式の表現と三角関数との内積を計算する. これは, ベクトルを (5.1) 式のように展開したときの係数を求めるときの操作と全く同様である.

[*4] $k_0 = 0$ であるから, $\sin(k_0 x) = 0$, すなわち $\sin(k_0 x)$ という (単位) ベクトルは存在しない.

$$\Big(\sin(k_n x), f(x)\Big) = b_n \Big(\sin(k_n x), \sin(k_n x)\Big),$$
$$b_n = \frac{\Big(\sin(k_n x), f(x)\Big)}{\Big(\sin(k_n x), \sin(k_n x)\Big)} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.13}$$
$$(n = 1, 2, \ldots, \infty.)$$

$$\Big(\cos(k_n x), f(x)\Big) = a_n \Big(\cos(k_n x), \cos(k_n x)\Big),$$
$$a_n = \frac{\Big(\cos(k_n x), f(x)\Big)}{\Big(\cos(k_n x), \cos(k_n x)\Big)} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(k_n x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.14}$$
$$(n = 1, 2, \ldots, \infty.)$$

$n = 0$ の時は,

$$\Big(\cos(k_0 x), f(x)\Big) = (f, 1) = \frac{a_0}{2}\Big(\cos(k_0 x), \cos(k_0 x)\Big) = \frac{a_0}{2}(1, 1),$$
$$a_0 = \frac{(1, f(x))}{(1,1)/2} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.15}$$

である．(5.15) 式は (5.14) 式において, $n = 0$ としたものと一緒なので，(5.14) 式の定義に含めてよい．このようにして, Fourier 級数展開における Fourier 係数の公式が得られた．((4.2) 式, (4.3) 式参照.)

これら (5.13) 式〜(5.15) 式が (5.4) 式〜(5.5) 式に相当していることは一目瞭然である．従って, 3 次元空間内の任意のベクトルが, 直交する単位ベクトルで (5.1) 式のように展開されるのと同様に, 関数を可算無限次元のベクトルと見做せば, Fourier 級数展開とは三角関数という可算無限個の規格化されていない互いに直交する関数で周期関数を展開したものである, といえる．このような，互いに直交する関数の組を**直交関数系**と言う．もしそれらの大きさが 1 に規格化されたいれば，**正規直交関数系**と呼ばれる．例えば,

$$\frac{1}{\sqrt{2L}}, \tag{5.16}$$
$$\frac{1}{\sqrt{L}}\cos k_n x, \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5.17}$$
$$\frac{1}{\sqrt{L}}\sin k_n x, \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5.18}$$

さらに，(5.16)〜(5.18) のうちどれか一つでもかけると，それらの重ね合わせでは周期 $2L$ の関数を表現できなくなる．3 次元空間のベクトルを表現するには単位ベクトルが，2 つ

以下では不十分で 3 つ必要であったのと同様である．このように，関数を表現するのに充分な数の直交関数系は，**完全系**と呼ばれ (5.16)〜(5.18) は**完全正規完全直交系**と呼ばれる．

上で見たように Fourier 係数，a_n，b_n に $1/L$ という因子が現れるのは，関数を展開する時に用いた直交関数の大きさが 1 に規格化されていないために現れたものであり，また，a_0 に $1/2$ の因子が現れるのも $\Big(\cos(k_n x), \cos(k_n x)\Big), (n = 1, 2, \ldots, \infty)$ と $\Big(\cos(k_0 x), \cos(k_0 x)\Big)$ とで大きさが因子 2 だけ異なるところから来ていることが容易にわかる．

5.3 まとめ

このように Fourier 級数展開がベクトルの展開と対応していることは, 単なる偶然ではなく, 関数をベクトルと見做すことはきちんとした数学の概念である．従って, いま考えているような有限区間を定義域とする関数の展開だけでなく, 実数全体を定義域とする関数の展開も同じように考えることができる．実数全体を定義域とする関数を $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(ikx)$ という完全正規直交関数系で展開したものが Fourier 変換である.*5

三角関数以外にも直交関数系は存在し, その直交関数系を用いて関数を展開することができる．直交関数系の代表的なものとしては, **円筒関数**, **球面調和関数**と呼ばれるものがある.*6 前者は, 境界が円形をした領域内での関数の展開に最適な関数（例えば太鼓の膜の振動を表現する）で, 後者は球面上で定義された関数を展開するときに威力を発揮する．実際に, 大気大循環モデルと呼ばれる天気予報や温暖化などの気候研究に用いられている数値モデルは, 風速, 気温, 気圧等の物理量を（水平方向には）球調和関数で展開し, 展開係数の時間発展を計算し, それを再び重ね合わせて場の量に表現しなおす, という操作を行っている.*7

先に, 空間内にはさまざまな直交座標が存在し, その直交座標でベクトルを表現することができるが, どのような座標系を用いようがベクトル $\boldsymbol{u}$ の実体は変わることが無く, 単に表現の仕方が異なるだけである．どの座標系を用いるかは, 解く問題が一番簡単になる座標系を選べばよいことを注意した．これと全く同様に, 関数 $f(x)$ をどのような直交関数で展開しても $f(x)$ の実体は変わりなく, ただ表現が異なるだけであり, どのような直交関数で展開してもよいのであるが, 解く問題が一番簡単になる直交関数を選び展開するの

*5 展開に用いた直交関数の個数が可算無限個か不可算無限個か, に応じて展開したときの表現が和で表されたり, 積分で表される.

*6 より詳しく知りたい人は Strum-Liouville 型の微分方程式の解の性質（あまり数学的なものではなく, 異なる固有値に属する固有関数は直交するというような性質）を勉強して欲しい.

*7 これには, 計算の技術的な理由もあるのだが.

が最も便利である．ではなぜ, Fourier 級数展開や Fourier 変換がよく用いられるのか? それは我々に最も馴み深い “波”, $\sin kx$, $\cos kx, \exp(ikx)$ の集合体という目で問題を理解・解釈できるからである．

第 6 章

拡散方程式

Fourier 級数，Fourier 変換の応用として拡散方程式を取り上げる．まず，拡散方程式の導出を行い，その解法に Fourier 変換を用いる．

6.1 拡散方程式の導出

本節では確率的な考え方から, 拡散方程式の導出を行う．　ここでは 2 次元空間を考える．

$a \times a$ の大きさを持った 2 次元正方格子を考え, 各格子上にはある物理量 $C(x, y, t)$ が割り当てられているものとする．ここで, $(x,\, y) = (m,\, n)a$, m, n は整数とする．いま, 時刻 t から $t + \Delta t$ の間に, 各格子上の物理量が隣の格子に確率的に飛び移ることを考える．(簡単化のため, 斜めの格子には飛び移らないとしておく.)

model 1: 飛び移りは等方的である．即ち, $(x,\, y)$ にあった物理量は Δt の間に, 1/4 の確率で $(x + a,\, y)$ に, 1/4 の確率で $(x - a,\, y)$ に, 1/4 の確率で $(x,\, y + a)$ に, 1/4 の確率で $(x,\, y - a)$ に飛び移るものとする．このとき $t + \Delta t$ における $(x,\, y)$ の格子上の物理量 $C(x,\, y,\, t + \Delta t)$ の期待値は

$$\begin{aligned} C(x,\, y,\, t + \Delta t) = \frac{1}{4}C(x + a,\, y,\, t) \\ + \frac{1}{4}C(x - a,\, y,\, t) \\ + \frac{1}{4}C(x,\, y + a,\, t) \\ + \frac{1}{4}C(x,\, y - a,\, t), \end{aligned} \tag{6.1}$$

と表現できる．ここで, 期待値 C の値もその期待値も同じ記号で示した．a, Δt が

小さいとして, (6.1) を Taylor 展開すると,

$$\frac{\partial C}{\partial t}\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right)a^2 + \mathcal{O}(a^3). \tag{6.2}$$

を得る．ここで $\mathcal{O}(\Delta t^2), \mathcal{O}(a^3)$ を無視し, (6.2) を整理すると, 2 次元の拡散方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)C, \tag{6.3}$$

$$\kappa = \frac{a^2}{4\Delta t} > 0, \tag{6.4}$$

が得られる．正方格子を, 立方格子に変えて同じ議論を行えば, 3 次元の拡散方程式が得られる．

このような物理的考察によって, “微視的なゆらぎによって輸送される物理量の発展方程式” は拡散方程式に従う，ということが示された．*1 したがって輸送される物理量としては物質であっても, 温度（熱）, 運動量等, 何でもよい．つまり, 広範な現象に対して同様の方程式に従う現象が存在する．

Note:　拡散方程式の性質として, 現象を考える空間を $\mathcal{D}$ で表すと,

$$I = \int_{\mathcal{D}} C(x,\, y,\, t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{6.5}$$

の値が保存するという性質がある．上の物理的モデルで見たように, 各格子上の物理量は確率的に隣の格子に飛び移るが, 飛び移る際には値は変化しない．そこで上記の積分が時間と共に保存していることがこの微視的モデルでも満足されていることがわかる．

model 2:　飛び移りは等方的である．ただし, 同じ格子上に留まる確率を q とし, 隣の格子に飛び移る確率を p とする．したがって, $(x,\, y)$ にあった物理量は Δt の間に, $p/4$ の確率で $(x+a,\, y)$ に, $p/4$ の確率で $(x-a,\, y)$ に, $p/4$ の確率で $(x,\, y+a)$ に, $p/4$ の確率で $(x,\, y-a)$ に飛び移るものとする．$q+p=1$ に注意．前と同様に $t+\Delta t$ における $(x,\, y)$ の格子上の物理量 $C(x,\, y,\, t+\Delta t)$ の期待値は

$$\begin{aligned} C(x,\, y,\, t+\Delta t) = &\frac{p}{4}C(x+a,\, y,\, t) \\ &+ \frac{p}{4}C(x-a,\, y,\, t) \\ &+ \frac{p}{4}C(x,\, y+a,\, t) \\ &+ \frac{p}{4}C(x,\, y-a,\, t), \\ &+ qC(x,\, y,\, t) \end{aligned} \tag{6.6}$$

*1 そもそも ” 拡散 ” 現象の本質が微視的揺らぎによる輸送なのであるが.

と表現でき, Taylor 展開を行い, (6.6) を整理すると拡散方程式 (6.3) を得る．ただしこのときの拡散係数 κ は

$$\kappa = \frac{a^2}{4\Delta t}p, \tag{6.7}$$

となる．$0 < p < 1$ なので, case 2 の拡散係数は case 1 の拡散係数よりも小さい.

このモデルによって, 拡散係数の値は物理量の輸送される, もしくは散らばっていく, 速さを表すパラメターであることがわかる．(拡散係数の値が大きいと, 物理量が速く散らばっていく.)

6.2　Fourier 変換を用いた拡散方程式の解法

簡単化のために 1 次元の拡散方程式を解くことを考える:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \tag{6.8}$$

ここで, κ は正の定数, 考察する領域は, $-\infty < x < \infty$ でとする．拡散方程式 (6.8) は時間に関して 1 階，空間に関して 2 階の偏微分方程式であるので，これを解いて解を決定するにはある時刻における C に関する条件（通常は初期条件）が 1 個，空間のある点における C に関する条件（通常は境界条件）が 2 個必要である．初期条件は $C(x,0) = C_0(x)$, 境界条件は

$$C(x,t)e^{-ikx}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0, \qquad \frac{\partial C(x,t)}{\partial x}e^{-ikx}\bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

とする．[*2], [*3]

[*2] 物理学の問題では境界が $\pm\infty$ にある場合には, 境界に近づくにつれて物理量はすみやかに 0 になるものとして問題を解くことが極めて多い.

[*3] 以下の導出の方法では，上記の境界条件がどこで使用されているか判然としない．もし，(6.8) に e^{-ikx} を乗じて x について $-\infty \sim \infty$ で積分すると，上記の条件が必要なことがただちにわかる．なお，上記の条件は $C(x,t)$ が Fourier 変換で表現されるとしたときに，それが x について 2 階微分可能であるための必要条件である．実際に，(6.12) が成り立つとき

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ik\hat{C}(k,t)e^{ikx}\,\mathrm{d}k$$

となる．Fourier 変換を行って，

$$ik\hat{C}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \tag{6.9}$$

が得られる．一方，(6.12) の逆変換

$$\hat{C}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} C(x,t)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \tag{6.10}$$

偏微分方程式を解く方法で代表的なものは, 変数分離法である．変数分離法を用いてもこの問題を解くことはできるが, ここでは Fourier 変換を直接利用して解く方法を紹介する．

考察する領域は, $-\infty < x < \infty$ であることから, 物理量 $C(x,t)$ は Fourier 変換を用いて,

$$C(x,\, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{C}(k,\, t) e^{ikx} \mathrm{d}k, \tag{6.12}$$

と表現できる．ここで (6.12) は，物理量の空間依存性に対しては波 e^{ikx} による分解し，波数 k, もしくは波長 $2\pi/k$ を持った波の振幅 $\hat{C}(k,\, t)$ が時間と共に変動していくことを表している．

(6.12) を (6.8) に代入して整理する:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\mathrm{d}\hat{C}}{\mathrm{d}t} + \kappa\, k^2 \hat{C} \right\} e^{ikx}\, \mathrm{d}k = 0.$$

任意の x について上式が成り立つためには, 被積分関数が 0 でなければならない．そこで,

$$\frac{\mathrm{d}\hat{C}}{\mathrm{d}t} + \kappa\, k^2 \hat{C} = 0, \tag{6.13}$$

を得る．すなわち，拡散方程式を満足する C の Fourier 変換 $\hat{C}$ は (6.13) を満足する．この式はさまざまな k の値に対して成り立つ．k は実数なのでしたがって (6.13) は非加算無限個の方程式になっている．つまり, 偏微分方程式 (6.8) は Foureir 変換を用いると無限個の常微分方程式に書き直すことができる．

(6.13) の解は,

$$\hat{C}(k,t) = A(k) e^{-\kappa k^2 t} \tag{6.14}$$

で与えられる．ここで, 任意定数 A は各 k について任意定数が違うであろうことを考慮して, $A(k)$ とした．(6.14) を (6.12) に代入して

$$C(x,\, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx - \kappa\, k^2 t} \mathrm{d}k, \tag{6.15}$$

を部分積分して整理すると

$$ik\hat{C}(k,t) = \left\{ -\, C(x,t)e^{-ikx}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} e^{-ikx}\, \mathrm{d}x \right\} \tag{6.11}$$

となる．(6.9) と (6.11) が等しくなるためには，$C(x,t)e^{-ikx}\big|_{-\infty}^{\infty} = 0$ が必要である．同様にして 2 階微分について考えると，$\frac{\partial C(x,t)}{\partial x} e^{-ikx}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$ が得られる．

を得る．次に初期条件を考慮する．

$$C(x,\,0) = C_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ikx}\mathrm{d}k, \tag{6.16}$$

(6.16) を満足する $A(k)$ は Fourier 変換（逆変換）の知識から，

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} C_0(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \tag{6.17}$$

となることがわかる．したがって, (6.15) は

$$C(x,\,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\,C_0(x')e^{ik(x-x')-\kappa\,k^2 t} \tag{6.18}$$

となる．(6.18) を整理すると，

$$C(x,\,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\,C_0(x')e^{-\frac{(x-x')^2}{4\kappa t}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\,e^{-\kappa t\left\{k-\frac{i(x-x')}{2\kappa t}\right\}^2}\right] \tag{6.19}$$

を得る．

ここで複素関数論と Gauss 積分の知識を用いると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa t\left\{k-\frac{i(x-x')}{2\kappa t}\right\}^2}\mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa t x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\kappa t}}. \tag{6.20}$$

そこで (6.19) は

$$C(x,\,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\,C_0(x')e^{-\frac{(x-x')^2}{4\kappa t}} \tag{6.21}$$

と書き換えられる．これが任意の初期条件 $C_0(x)$ に対する拡散方程式の解である．

初期条件として場 $C_0(x)$ が δ 関数で与えられる場合を考える:

$$C_0(x) = \delta(x). \tag{6.22}$$

このとき, δ 関数の性質

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\delta(x')f(x-x') = f(x) \tag{6.23}$$

を用いると, (6.21) は次のようになる．

$$C(x,\,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}}\,e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} \tag{6.24}$$

この解は，初期に $x=0$ に局在していた C の分布が時間と共に拡がって行き，$t\to\infty$ ではいたるところで 0 になることを示している．ただし，先に注意したように初期に存

在していた C の総量は変化しない．このことは Gauss 積分 (6.20) を再び用いて，(6.24) を x について $-\infty \sim \infty$ で積分する．

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(x,t)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \times \sqrt{4\pi\kappa t} = 1. \tag{6.25}$$

すなわち，時刻に関係なく $C(x,t)$ の総量は 1 である．また，初期時刻においても

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1 \tag{6.26}$$

であり，無矛盾である．天下り的に与えた積分 (6.20)，について引き続く節で解説する．

6.3　Gauss 積分

Gauss 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \alpha > 0 \tag{6.27}$$

の公式の証明を紹介する．この積分や, これに関連する積分は極めて多くの分野で登場する．例えば, 正規分布に従う確率過程では確率密度関数は

$$p(x) = Ae^{-\alpha x^2} \tag{6.28}$$

の形で表される．A の値は事象の全確率が 1 であるという条件 $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1$ から決まる．これはまさに Gauss 積分である．また, このような分布に従う確率変数の n 次のモーメント $M_n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,p(x)\,\mathrm{d}x$ の計算にも Gauss 積分が利用される．なお, 2 次のモーメント $\sigma = M_n$ を使って α を表現することができる．

証明:

$$I_0(\alpha) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x, \tag{6.29}$$

と定義する．

$$\begin{aligned} I_0(\alpha)^2 &= \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x\right\} \times \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2}\mathrm{d}y\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\, e^{-\alpha(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

極座標 (r,θ) を用いて積分変数を変換する．

$$\begin{aligned} I_0(\alpha)^2 &= \int_0^{\infty} r\mathrm{d}r \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\, e^{-\alpha r^2} \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r\mathrm{d}r\, e^{-\alpha r^2} \end{aligned}$$

さらに $r^2 \to \xi$ と変数変換すると,

$$I_0(\alpha)^2 = \pi \int_0^\infty \mathrm{d}\xi\, e^{-\alpha\xi} = \frac{\pi}{\alpha}.$$

したがって, $I_0(\alpha) = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$.

Gauss 積分を利用して, 次のような積分を実行することができる.

$$I_n(\alpha) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2}\, \mathrm{d}x. \tag{6.30}$$

$$\frac{\partial I_0(\alpha)}{\partial\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} -x^2\, e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x$$

なので,

$$I_1(\alpha) = -\frac{\partial I_0(\alpha)}{\partial\alpha}. \tag{6.31}$$

以下, 系統的に

$$I_n(\alpha) = -\frac{\partial I_{n-1}(\alpha)}{\partial\alpha}. \tag{6.32}$$

6.4　複素関数の積分

Gauss 積分に似た積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x+i\beta)^2}\, \mathrm{d}x, \quad \alpha > 0 \tag{6.33}$$

は，複素関数の知識を用いて実行することができる．ここで β は実数であるとする．複素変数 $z \equiv x + i\beta$ を導入すると (6.33) は

$$\int_{-\infty+i\beta}^{\infty+i\beta} e^{-\alpha z^2}\, \mathrm{d}z \tag{6.34}$$

と書ける．なお，複素関数論によれば，正則な関数 $f(z)$ を複素平面内で周回積分するとゼロになることが知られている．そこで $(-L,0) \to (L,0) \to (L,i\beta) \to (-L,i\beta) \to (-L,0)$ という矩形領域 C で周回積分を行うと，この領域内で (6.34) の被積分関数は正則であるから

$$\begin{aligned}\oint_C e^{-\alpha z^2}\, \mathrm{d}z =& \int_{-L}^{L} e^{-\alpha x^2}\, \mathrm{d}x + i\int_0^\beta e^{-\alpha(L+iy)^2}\, \mathrm{d}y \\ &+ \int_{L+i\beta}^{-L+i\beta} e^{-\alpha z^2}\, \mathrm{d}z + i\int_\beta^0 e^{-\alpha(-L+iy)^2}\, \mathrm{d}y = 0.\end{aligned} \tag{6.35}$$

(6.35) の左辺第 2 項および左辺第 4 項の被積分関数は $e^{-\alpha L^2}$ に比例するので $L \to \infty$ でこれらの項はゼロに収束する．そこで，左辺第 1 項および左辺第 3 項のみが残る．これを整理すると

$$\int_{-\infty+i\beta}^{\infty+i\beta} e^{-\alpha z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x \tag{6.36}$$

が得られる．前節と本節の結果より (6.20) が証明された．

第 7 章

和の規約

例えば，$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_Nx_N$ は和の記号を使って短い表記で $\sum_{i=1}^{N} a_ix_i$ と書くことができることは高校数学で習った．ここではさらに短い表記，和の規約，もしくは Einstein の規約，と呼ばれるものについて紹介する．この表記を用いると，複雑なベクトルの演算が非常に簡単にできる．

7.1　表記（nonation）

位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ で表す．慣例によると $\boldsymbol{x}$ をデカルト座標系におけるその成分 x, y, z で表すと，

$$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k} \tag{7.1}$$

ととなる．ここで，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ，x, y, z 方向の単位ベクトルである．

なお，単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ を，添え字つきの文字を用いて，それぞれ $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ で表し，成分 x, y, z を x_1, x_2, x_3 と表すこともある．即ち添え字 1 が x 成分，添え字 2 が y 成分，添え字 3 が z 成分を表す．この章ではこの表記を採用する．

この表記よると (7.1) は

$$\boldsymbol{x} = x_1\,\boldsymbol{e}_1 + x_2\,\boldsymbol{e}_2 + x_3\,\boldsymbol{e}_3 \tag{7.2}$$

である．また任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = A_1\,\boldsymbol{e}_1 + A_2\,\boldsymbol{e}_2 + A_3\,\boldsymbol{e}_3 \tag{7.3}$$

と表記する．

偏微分記号，$\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ は簡単化のために，$\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z$ と記す場合がある．これも先に採用した表記を用いると $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ となるがさらにコンパクトに，$\partial_1, \partial_2, \partial_3$ と

書く．このような表記では微分演算子 $\boldsymbol{\nabla}$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} &= \boldsymbol{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\,\frac{\partial}{\partial z}, &(7.4)\\ &= \boldsymbol{i}\,\partial_x + \boldsymbol{j}\,\partial_y + \boldsymbol{k}\,\partial_z, &(7.5)\\ &= \boldsymbol{e}_1\,\partial_1 + \boldsymbol{e}_2\,\partial_2 + \boldsymbol{e}_3\,\partial_3 &(7.6)\end{aligned}$$

となる．

7.2　和の規約（summation rules, Einstein's notation）

一つの項の中に同じアルファベットの添字が 2 回用いられているとき, その添字について 1 から 3 までの和をとる．すなわち,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= x_1\,\boldsymbol{e}_1 + x_2\,\boldsymbol{e}_2 + x_3\,\boldsymbol{e}_3,\\ &= \sum_{i=1}^{3} x_i\,\boldsymbol{e}_i,\\ &= x_i\,\boldsymbol{e}_i. &(7.7)\end{aligned}$$

最後の最も簡単な表式が和の規約を用いて書かれたものである．和の規約とはつまり $\sum$ を省略することである．

注意 1:　添字はどんな記号でも良い．とにかく 2 回繰り返して出てきたら和をとればよい．つまり $x_i\,\boldsymbol{e}_i = x_j\,\boldsymbol{e}_j = x_k\,\boldsymbol{e}_k$ である．このような理由から繰り返す添字は無効添字（dummy index）と呼ばれる．

注意 2:　2 次元空間であれば, 和は $1 \sim 2$ にわたってとる．N 次元であれば，和は $1 \sim N$ にわたってとる．

例:

$$\boldsymbol{A} = A_i\,\boldsymbol{e}_i. \tag{7.8}$$

$$\nabla\psi = \boldsymbol{e}_i\,\partial_i\psi. \tag{7.9}$$

7.3　Kronecker のデルタ

2 つの添え字を持ち，以下のような性質を持つ量を Kronecker のデルタという:

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0, & (i, j \text{ が異なる値を持つとき}).\\ 1, & (i, j \text{ が同じ値を持つとき}).\end{cases} \tag{7.10}$$

Kronecker のデルタの別の定義は

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{7.11}$$

である．または,

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \partial_j x_i = \delta_{ij}. \tag{7.12}$$

例： 和の規約と Kronecker のデルタを用いると $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$ は以下のようにかける：

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= (\boldsymbol{e}_i\,\partial_i)\cdot(A_j\boldsymbol{e}_j)\\ &= \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j\,\partial_i A_j\\ &= \delta_{ij}\,\partial_i A_j\\ &= \partial_j A_j.\end{aligned} \tag{7.13}$$

7.4 Eddington のイプシロン

3 つの添え字を持ち，以下のような性質を持つ量を Eddington のイプシロンという:

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1, & (i,j,k)=(1,2,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2)\ \text{のとき}.\\ -1, & (i,j,k)=(3,2,1),\ (2,1,3),\ (1,3,2)\ \text{のとき}.\\ 0, & \text{それ以外のとき}.\end{cases} \tag{7.14}$$

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}. \tag{7.15}$$

$\varepsilon_{ijk}=1$ となる場合は $(i,j,k)=(1,2,3)$ の偶置換, $\varepsilon_{ijk}=-1$ となる場合は $(i,j,k)=(1,2,3)$ の奇置換という.

例

行列

$$\underline{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

の行列式は, Eddington のイプシロンを用いると

$$\begin{aligned}\det\underline{\mathrm{A}} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\ &= \varepsilon_{ijk}\,a_{1i}\,a_{2j}\,a_{3k}.\end{aligned} \tag{7.16}$$

とあらわせる．また二つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ とのベクトル積は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}\\ &= \varepsilon_{ijk}\,\boldsymbol{e}_i\,A_j\,B_k.\end{aligned} \tag{7.17}$$

となる．同様にして回転演算は

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\
&= \varepsilon_{ijk}\, \boldsymbol{e}_i\, \partial_j A_k \qquad (7.18)
\end{aligned}
$$

と表現できる．

第 8 章

熱力学の数学（1）

熱力学は熱に関する現象を巨視的な少数個（基本的には 2 個）の物理量で記述するように構成した学問である．従って，考える対象の状態を表す物理量は 2 変数関数となり，その状態変化は偏微分で表現される．偏微分の計算には，常微分の計算のときとは違って少々注意が必要である．この章では

i) 偏微分の計算における注意点
ii) 偏微分の計算に便利な表記法とその使い方

について解説する．なお，この章の知識や方法は，熱力学のみならず流体力学（気象学）における座標変換の際にも極めて役に立つものである．[*1]

8.1 状態方程式

温度 T, 圧力 p, 体積 V を結びつける関係式は状態方程式と呼ばれる．熱力学において最もよく知られた状態方程式は理想気体の状態方程式

$$pV = nRT \tag{8.1}$$

である．ここで，n はモル数，R は気体定数である．理想気体は気体の密度が薄いときにはよい近似で成り立つといわれており，気象学でも大気を理想気体として扱う．理想気体以外にも van der Waals の状態方程式

$$(p + a)(V - b) = nRT \tag{8.2}$$

[*1] 気象学では，鉛直方向の座標系として，地面から計った幾何学的な高度を用いる以外に，気圧や温位（気圧の変化を考慮した温度でエントロピーと関係した量）を鉛直座標に用いることがしばしばある．このような座標系を用いるときには，幾何学的な座標から変数変換を行う．このときにこの章の知識が必要となる．

も知られている．これは実在の気体の状態をよく表す式として知られている．

より一般的には状態方程式は，その定義から，p, V, T を変数とする任意関数 f が，以下のようにかけるとき，それを状態方程式と呼ぶ：

$$f(p, V, T) = 0. \tag{8.3}$$

実際に (8.1), (8.2) は (8.3) の形にかける．

(8.3) は次の様な関係式を満足する：

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -1 \tag{8.4}$$

(8.4) **の証明**　(8.3) の全微分は

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{V,T} \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{T,p} \mathrm{d}V + \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{p,V} \mathrm{d}T = 0 \tag{8.5}$$

である．ここで，$\mathrm{d}p = 0$ の状態を考える．このとき，(8.5) から dV/dT を作ると，これは $(\partial V/\partial T)_p$ と解釈できる．そこで，

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{p,V}}{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{T,p}}$$

同様に，$\mathrm{d}V = 0$ の状態を考える．このとき，(8.5) から dT/dp を作ると，これは $(\partial T/\partial p)_v$ と解釈できる．また $\mathrm{d}T = 0$ の状態を考える．このとき，(8.5) から dp/dV を作ると，これは $(\partial p/\partial V)_T$ と解釈できる．これらの量はそれぞれ，

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}p} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{V,T}}{\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{p,V}},$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{T,p}}{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{V,T}}$$

以上より，(8.4) が証明できた．

(8.4) は合成関数の微分と対応付けると一見奇妙である．g は　x の任意関数とし，さらに x は t の関数であるとする．このとき g と t で微分するには

$$\frac{\mathrm{d}g(x(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \tag{8.6}$$

となる．ここで，微分記号を分数のように扱うと，dx があたかも約分され，右辺と左辺が等しいことは理にかなっている．

しかしながら，$\partial *$ を微分記号のように扱うと，(8.4) の値は -1 でなく 1 になる．このことは，偏微分の場合には微分記号を分数のように扱ってはいけないことを表している．偏微分の計算をする場合には一定と置く変数に注意しなければいけない．この失敗は実は，一定に置く変数を無視して偏微分記号をあたかも分数のように扱かったために起こったのである．

8.2 Jacobian

この節では，偏微分の計算を容易にする表記について紹介する．f, g を x, y を変数とする関数であるとする．このとき，Jacobian $J(f, g)$ を以下のように定義する：

$$J(f,\, g) \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x . \tag{8.7}$$

Jacobian $J(*, *)$ はしばしば $\partial(*, *)$ と書かれることもある．Jacobian の性質として重要なものは，skew symmetry と呼ばれるものである：

$$J(f,\, g) = -J(g,\, f). \tag{8.8}$$

Jacobian を用いると，

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = \frac{J(p,\, T)}{J(V,\, T)} \tag{8.9}$$

とかける．実際，p は V, T の関数なので，

$$\begin{aligned} J(p, T) &= \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial T}\right)_V}_{=1} - \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_T}_{=0} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T , \\ J(V, T) &= \left(\frac{\partial V}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial T}\right)_V - \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_V \\ &= 1. \end{aligned}$$

同様に，

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = \frac{J(T,\, V)}{J(p,\, V)}, \tag{8.10}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{J(V,\, p)}{J(T,\, p)}. \tag{8.11}$$

(8.9)〜(8.11) と skew symmetry より

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p &= \frac{J(p,\,T)}{J(V,\,T)}\times\frac{J(T,\,V)}{J(p,\,V)}\times\frac{J(V,\,p)}{J(T,\,p)}\\ &= (-1)\frac{J(p,\,T)}{J(T,\,V)}\times(-1)\frac{J(T,\,V)}{J(V,\,p)}\times(-1)\frac{J(V,\,p)}{J(p,\,T)}\\ &= -1\times\frac{J(p,\,T)}{J(T,\,V)}\times\frac{J(T,\,V)}{J(V,\,p)}\times\frac{J(V,\,p)}{J(p,\,T)}. \end{aligned} \tag{8.12}$$

ここで，Jacobian $J(*,*)$ は約分されて，(8.4) に帰着される．