

# 地球惑星科学基礎III 期末テスト

2006年1月27日実施

## 1 拡散方程式の問題

以下の方程式 (1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\kappa > 0) \quad (1)$$

を, 境界条件

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (2)$$

と初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3)$$

のもとで解くことを考える. 以下の設問に答えなさい.

注意: 答えは答えのみ書くのではなく, 議論の展開がわかるように詳しく書きなさい.

(i) 方程式 (1) の名称を答えなさい.

(ii) (1) の未知変数を

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (4)$$

とおき, (1) と解く方法はなんと呼ばれているか答えなさい (ヒント:????法.)

(iii)  $X(x)$ ,  $T(t)$  がそれぞれ満たす方程式を求めなさい.

(iv) 前設問で導かれた  $T$  に関する方程式の一般解を求めなさい. (注意: 変数分離を行った後の分離定数についての議論も詳しく行いなさい.)

(v) 設問 (iii) で導かれた  $X$  に関する方程式の一般解を求めなさい.

(vi) 境界条件 (2) は  $u(x, t)$  に関する条件になっている. これを  $X(x)$  に関する条件に書き換えなさい.

- (vii) (vi) で導かれた条件を満足する  $X(x)$  を求めなさい.
- (viii) 重ね合わせの原理により  $u(x, t)$  を求めなさい.
- (ix) 初期条件を満足する  $u(x, t)$  を求めなさい.

## 2 和の規約の問題

和の規約を用いて, 以下を証明しなさい.

- (i) ベクトル三重積に関する公式

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

- (ii) ベクトル恒等式  $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$
- (iii) ベクトル恒等式  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$