

地球惑星科学基礎 III 演習 (5)

2005 年 11 月 4 日 配布

1 Fourier 級数の問題 (2)

- i) a) 以下の関数に対応する Fourier 係数を求めなさい .

$$f(x) = \begin{cases} 0, & (-5 < x < 0) \\ 3, & (0 < x < 5) \end{cases} \text{ 周期は } 10 \text{ とする .}$$

- b) 対応する Fourier 級数を書き下しなさい .

- c) $-5 \leq x \leq 5$ の区間で Fourier 級数が $f(x)$ に収束するためには, $f(x)$ は $x = -5, 0, 5$ においてどのように定義されるべきであるか .

- ii) $-\pi < x < \pi$ において $f(x) = x^2$ となる周期 2π の関数を Fourier 級数展開しなさい .

- iii) 前設問の結果を用いて, $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$ を証明しなさい .

- iv) 偶関数を Fourier 級数展開したときには sine の項は現われないことを証明しなさい .

- v) $f(x)$ が $-L < x < L$ の区間で定義され, 周期 $2L$ の奇関数のとき, この関数の Fourier 係数は

a) $a_n = 0$

b) $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx,$
となることを証明しなさい .

2 Parseval の恒等式の問題

- i) 周期 $2L$ の関数 $f(x)$ が区間 $(-L, L)$ において $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$ に収束するとき, Parseval の恒等式

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (1)$$

を証明しなさい.

- ii) 次の関数を Fourier 級数展開しなさい:

$$a) f(x) = \begin{cases} x, & (0 \leq x < 2) \\ -x, & (-2 \leq x < 0) \end{cases}$$

周期 4.

- b) 前設問の Fourier 級数に対応する Parseval の恒等式を書き下しなさい.

- c) 前設問の結果をもちいて, 級数

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots + \frac{1}{n^4} + \cdots \quad (2)$$

を求めなさい.

- iii) 正の定数 M について,

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n^2 + b_n^2) \quad (3)$$

となることを証明しなさい. ただし, ここで a_n, b_n は $f(x)$ の Fourier 係数で $f(x)$ は Dirichlet の条件を満足するものとする.¹

¹すなわち, $f(x)$ が Fourier 級数展開できるものとする.