

地球惑星科学基礎 III 演習 (4)

2005 年 10 月 28 日配布 (11 月 4 日改訂)

1 Fourier 級数の問題

i) 以下の関数を図示しなさい .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 3, & (0 < x < 5) \\ -3, & (-5 < x < 0) \end{cases}$$

周期は 10 とする .

b) 上記の関数の Fourier 級数表示を求めなさい .

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \sin x, & (0 \leq x \leq \pi) \\ 0, & (\pi < x < 2\pi) \end{cases}$$

周期は 2π とする .

d) 上記の関数の Fourier 級数表示を求めなさい .

ii) $k = 1, 2, 3, \dots$ のとき , $\int_{-L}^L \sin \frac{k\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} dx = 0$ となることを証明しなさい .

iii) 以下の関係式を証明しなさい . ただし , $m \neq 0, n \neq 0$ とする .

$$\text{a) } \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & (m \neq n) \\ L, & (m = n) \end{cases}$$

$$\text{b) } \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0$$

iv) 以下の関数の Fourier 級数表示を求めなさい .¹

a) $\sin^2 x$ ($-\pi/2 < x < \pi/2$ で定義され , 周期は π)

b) $\cos^2 x$ ($-\pi/2 < x < \pi/2$ で定義され , 周期は π)

c) $\sin^3 x$ ($-\pi < x < \pi$ で定義され , 周期は 2π)

d) $\cos^3 x$ ($-\pi < x < \pi$ で定義され , 周期は 2π)

¹この問題は , Fourier 級数の知識がなくても三角関数の公式を使えばすぐに計算できるものである . ただ , それが Fourier 級数という見方もできるということを示したかった .