第7章　和の規約

例えば，$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_Nx_N$ は和の記号を使って短い表記で $\sum_{i=1}^{N} a_ix_i$ と書くことができることは高校数学で習った．ここではさらに短い表記，和の規約，もしくは Einstein の規約，と呼ばれるものについて紹介する．この表記を用いると，複雑なベクトルの演算が非常に簡単にできる．

7.1　表記（nonation）

位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ で表す．慣例によると $\boldsymbol{x}$ をデカルト座標系におけるその成分 x, y, z で表すと，

$$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k} \tag{7.1}$$

ととなる．ここで，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ，x, y, z 方向の単位ベクトルである．

なお，単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ を，添え字つきの文字を用いて，それぞれ $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ で表し，成分 x, y, z を x_1, x_2, x_3 と表すこともある．即ち添え字 1 が x 成分，添え字 2 が y 成分，添え字 3 が z 成分を表す．この章ではこの表記を採用する．

この表記よると (7.1) は

$$\boldsymbol{x} = x_1\,\boldsymbol{e}_1 + x_2\,\boldsymbol{e}_2 + x_3\,\boldsymbol{e}_3 \tag{7.2}$$

である．また任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = A_1\,\boldsymbol{e}_1 + A_2\,\boldsymbol{e}_2 + A_3\,\boldsymbol{e}_3 \tag{7.3}$$

と表記する．

偏微分記号，$\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ は簡単化のために，$\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z$ と記す場合がある．これも先に採用した表記を用いると $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ となるがさらにコンパクトに，$\partial_1, \partial_2, \partial_3$ と書く．このような表記では微分演算子 $\boldsymbol{\nabla}$ は

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\,\frac{\partial}{\partial z}, \tag{7.4}$$

$$= \boldsymbol{i}\,\partial_x + \boldsymbol{j}\,\partial_y + \boldsymbol{k}\,\partial_z, \tag{7.5}$$

$$= \boldsymbol{e}_1\,\partial_1 + \boldsymbol{e}_2\,\partial_2 + \boldsymbol{e}_3\,\partial_3 \tag{7.6}$$

となる．

7.2 和の規約（summation rules, Einstein's notation）

一つの項の中に同じアルファベットの添字が 2 回用いられているとき, その添字について 1 から 3 までの和をとる．すなわち,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= x_1\,\boldsymbol{e}_1 + x_2\,\boldsymbol{e}_2 + x_3\,\boldsymbol{e}_3, \\
&= \sum_{i=1}^{3} x_i\,\boldsymbol{e}_i, \\
&= x_i\,\boldsymbol{e}_i. \qquad (7.7)
\end{aligned}
$$

最後の最も簡単な表式が和の規約を用いて書かれたものである．和の規約とはつまり $\sum$ を省略することである．

注意 1: 添字はどんな記号でも良い．とにかく 2 回繰り返して出てきたら和をとればよい．つまり $x_i\,\boldsymbol{e}_i = x_j\,\boldsymbol{e}_j = x_k\,\boldsymbol{e}_k$ である．このような理由から繰り返す添字は無効添字（dummy index）と呼ばれる．

注意 2: 2 次元空間であれば, 和は $1 \sim 2$ にわたってとる．N 次元であれば，和は $1 \sim N$ にわたってとる．

例:

$$
\boldsymbol{A} = A_i\,\boldsymbol{e}_i. \qquad (7.8)
$$

$$
\nabla\psi = \boldsymbol{e}_i\,\partial_i\psi. \qquad (7.9)
$$

$$
\qquad (7.10)
$$

7.3 Kronecker のデルタ

2 つの添え字を持ち，以下のような性質を持つ量を Kronecker のデルタという:

$$
\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0, & (i, j \text{ が異なる値を持つとき}). \\ 1, & (i, j \text{ が同じ値を持つとき}). \end{cases} \qquad (7.11)
$$

Kronecker のデルタの別の定義は

$$
\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \qquad (7.12)
$$

である．または,

$$
\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \partial_j x_i = \delta_{ij}. \qquad (7.13)
$$

例： 和の規約と Kronecker のデルタを用いると $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$ は以下のようにかける：

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= (\boldsymbol{e}_i\,\partial_i)\cdot(A_j\boldsymbol{e}_j)\\ &= \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j\,\partial_i A_j\\ &= \delta_{ij}\,\partial_i A_j\\ &= \partial_j A_j.\end{aligned}\tag{7.14}$$

7.4 Eddington のイプシロン

3 つの添え字を持ち，以下のような性質を持つ量を Eddington のイプシロンという:

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1, & (i,j,k)=(1,2,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2)\text{ のとき.}\\ -1, & (i,j,k)=(3,2,1),\ (2,1,3),\ (1,3,2)\text{ のとき.}\\ 0, & \text{それ以外のとき.}\end{cases}\tag{7.15}$$

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}.\tag{7.16}$$

$\varepsilon_{ijk}=1$ となる場合は $(i,j,k)=(1,2,3)$ の偶置換, $\varepsilon_{ijk}=-1$ となる場合は $(i,j,k)=(1,2,3)$ の奇置換という.

例

行列

$$\underline{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

の行列式は, Eddington のイプシロンを用いると

$$\begin{aligned}\det\underline{\mathrm{A}} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\ &= \varepsilon_{ijk}\,a_{1i}\,a_{2j}\,a_{3k}.\end{aligned}\tag{7.17}$$

とあらわせる．また二つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ とのベクトル積は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}\\ &= \varepsilon_{ijk}\,\boldsymbol{e}_i\,A_j\,B_k.\end{aligned}\tag{7.18}$$

となる．同様にして回転演算は

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\
&= \varepsilon_{ijk}\, \boldsymbol{e}_i\, \partial_j A_k \qquad (7.19)
\end{aligned}
$$

と表現できる．