第1章　定数係数を持った２階の線形常微分方程式の解法

1.1　はじめに

物理学においては，以下のような形をもった微分方程式が頻繁に登場する：

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + A\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + By = 0. \tag{1.1}$$

ここで，A, B は定数である．

例１： 質量 m の質点がバネ定数 k の線形バネにつながれている場合，質点の平衡位置からの変位 x が従う運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0 \tag{1.2}$$

である．

例２： 重力場中で長さ l の伸びない紐の端に 質量 m のおもりがつるされているとする．この振り子（重り）の平衡点からの振れ角 θ が従う運動方程式は

$$ml\frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}t^2} + mg\sin\theta = 0 \tag{1.3}$$

である．ここで，g は重力加速度である．振れ角 θ が小さい場合には (1.3) は

$$ml\frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}t^2} + mg\theta = 0 \tag{1.4}$$

と近似される．

例３： 例１の状況で速度に比例する抵抗が質点に働いている場合には質点の微分方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + m\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0 \tag{1.5}$$

となる．ここで，$\gamma > 0$ である．

1.2　言葉の定義（1）:“ 線形と非線形 ”

(1.1) は**2階**の**定数係数**の**常**微分方程式と呼ばれる．なぜならば，未知変数 y の微分の階数は2階が最高であること，y が一変数 x にのみ依存するので，ここで現れる微分は偏微分 ∂ ではなく常微分 d であるからである．

さらに，**線形，非線形**という言葉について説明しておく．ある関数 $f(x)$ が以下の様な性質を満足する場合，　$f(x)$ を線形関数と呼ぶ．

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \tag{1.6}$$
$$f(ax) = af(x). \tag{1.7}$$

ここで，a は定数である．もし $f(x)$ が上記の性質を満足しないならば，$f(x)$ は非線形関数であるという．

上記の線形・非線形という概念は，関数のみならず，微分演算子についても定義できる．すなわちある演算子 $\mathcal{L}$ が以下の性質を満足するならば，$\mathcal{L}$ は線形演算子とよぶ．

$$\mathcal{L}\,[f_1 + f_2] = \mathcal{L}[f_1] + \mathcal{L}[f_2], \tag{1.8}$$
$$\mathcal{L}\,[af] = a\mathcal{L}[f]. \tag{1.9}$$

たとえば，(1.1) の左辺第一項，および第二項に現れた $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ はともに上記 (1.8), (1.9) の性質を満足する．実際，

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}(y_1 + y_2)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} \\
&\frac{\mathrm{d}(ay)}{\mathrm{d}x} = a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\
&\frac{\mathrm{d}^2(y_1 + y_2)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2y_2}{\mathrm{d}x^2} \\
&\frac{\mathrm{d}^2(ay)}{\mathrm{d}x^2} = a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}
\end{aligned}$$

である．なお，(1.8), (1.9) の性質から，

i) (1.1) で与えられる微分方程式の解が y のとき，ay も微分方程式の解となっている．ここで a は定数である．

ii) その微分方程式の解 y_1, y_2 があったとき，$y_1 + y_2$ も解となる．

ことがわかる．上記の2つの性質 i), ii), を満足する微分方程式は**線形**微分方程式と呼ばれる．

1.3　言葉の定義（2）：重ね合わせの原理

線形の微分方程式に従う運動にはきわめて重要な性質がある.（実はこれは「線形」という言葉の言い換えに過ぎず，トートロジーなのだが...）

いま (1.1) を満足する解 y_1 が得られたとする．すなわち，y_1 は

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}x^2} + A\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} + By_1 = 0, \tag{1.10}$$

を満足する．(1.1) は線形微分方程式なので, y_1 が (1.1) の解であるならば，その定数倍 $c_1 y_1$ も微分方程式 (1.1) を満足する．ここで，c_1 は定数である．さらに, y_1 の他に，微分方程式 (1.1) を満足する y_2 という解が見つかったとする．このときも以前と同様に $c_2 y_2$ もまた微分方程式 (1.1) の解となる．さらに，**線形性より $c_1 y_1 + c_2 y_2$ も (1.1) の解となる．**このように微分方程式の解が複数個見つかったとき，その定数倍をおのおの足してもまたもとの微分方程式の解を構成できる，という性質は**重ね合わせの原理**と呼ばれている．この重ね合わせの原理は，以下で見るように線形常微分方程式の**一般解**を構成するときに必要な知識である.

1.4　2 階の線形常微分方程式の解法 (1)

ここでは，(1.1) の解法として，代表的なものを紹介する．特に，**推定法**と呼ばれるもの取り上げることにする.

(1.1) の解を

$$y = e^{\lambda x}, \tag{1.11}$$

と推定する．(1.11) を (1.1) に代入して整理すると，

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0 \tag{1.12}$$

という λ に関する代数方程式が得られる．(1.12) は (1.1) の**特性方程式**と呼ばれ, (1.11) のように微分方程式の解を推定すると，微分方程式は，代数方程式に帰着される.

特性方程式 (1.12) の解は一般に 2 個ある．なぜならば，2 次方程式の解は一般に 2 個であるからである．その解を λ_1，λ_2 は

$$\lambda_1 = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2}, \tag{1.13}$$

である．そこで，(1.13) の結果と (1.11) を考慮すると，微分方程式の解は

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \tag{1.14}$$

の二つとなる．しかしながら，前節で述べたように，y_1, y_2 がともに線形微分方程式の解であるので，

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{1.15}$$

も微分方程式の解となる．

2 階の微分方程式は，形式的には 2 回の不定積分を実行することにより解が求まる．1 回不定積分を実行すると積分定数である任意定数が 1 つ現れる．そこで，2 階の微分方程式の一般解には，形式的な 2 度の積分により，積分定数である任意定数が 2 個現れることになる．(1.15) は任意定数 c_1, c_2 を含んでいるので，(1.15) が微分方程式 (1.1) の一般解として充分である．

任意定数の決定には，ある特定の x の値における，y や $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ の値を指定してやることにより決定できる．2 階の微分方程式の一般解には 2 個の任意定数を含むので，この未定係数の決定には 2 個の条件を与えればよい.（時間発展問題では，このような条件はいわゆる初期条件として与えられる.）

なお，何らかの方法によって (1.1) を満足する解が 3 個 $y_1, y_2, , y_3$ 得られたとする．このときには，c_1, c_2, c_3 を任意定数として，y_1, y_2, y_3 のうちの 2 個の解の重ね合わせ

$$c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_2 y_2 + c_3 y_3, \quad c_3 y_3 + c_1 y_1 \tag{1.16}$$

のどれもが，(1.1) の一般解となる．(1.16) のどれもが一般解となるのは奇異に感じるかもしれない．しかしながら，いわゆる初期条件を代入して任意定数を決定してやると，(1.16) の 3 つの一般解はすべて同じ解に帰着されるのである．以下でその例を示そう．

例: (1.2) の解を $y = e^{\lambda x}$ と推定すると，その特性方程式は $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ となる．ここで $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ である．したがって，解は

$$e^{i\omega x}, \quad e^{-i\omega x} \tag{1.17}$$

の二つとなる．また，$y = \sin \omega x$ も (1.2) を満足することがこれを代入することにより容易に確かめることができる．したがって

$$y = c_1 e^{i\omega x} + c_2 e^{-i\omega x} \tag{1.18}$$

も

$$y = c_1 e^{i\omega x} + c_3 \sin \omega x \tag{1.19}$$

も一般解である．ここで初期条件として，$x=0$ で $y=y_0$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ とする．この条件を満足するためには (1.18) における任意定数は

$$c_1 = c_2 = \frac{y_0}{2} \tag{1.20}$$

でなければならず，(1.20) を (1.18) に代入して整理すると

$$y = y_0 \cos \omega x \tag{1.21}$$

となる．一方， 初期条件を満足するには，(1.19) における任意定数は

$$c_1 = y_0,\quad c_3 = -iy_0 \tag{1.22}$$

でなければいけない．(1.22) を (1.19) に代入すると，やはり (1.21) となる．

1.5 2 階の線形常微分方程式の解法 (2)

前節で $y = Ce^{\lambda x}$ とおき，微分方程式の特性方程式をつくり λ を求め，件の微分方程式の一般解を構成する方法を説明した．[1] しかし，前節の方法が適用できない場合もある．特性方程式の解 λ が重根 $\lambda=\lambda_1$ になる場合がそのような場合である．このときには解の推定 $y = Ce^{\lambda x}$ が誤りであると判断し，改めて解を $y = C(x)e^{\lambda_1 x}$ と推定する．つまり，C を定数ではなく，x に依存した関数と考えるのである．このような方法は**係数変化法**と呼ばれる．このようにすると，C に関する微分方程式が得られので，これを解いて推定した解の形に代入すればよい．なお，係数変化法を用いる場合でも，解が $e^{\lambda x}$ に比例するという推定法が基本になっていることに注意しなさい．

例:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4y = 0 \tag{1.23}$$

解を $y = Ce^{\lambda x}$ と推定する．ここで，C は任意定数である．特性方程式は,

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \tag{1.24}$$

となり，この解は $\lambda = -2$ の重根となる．そこで,

$$y = C(x)e^{-2x} \tag{1.25}$$

[1] 前節では $y = e^{\lambda x}$ という形の推定をしたが，これを任意定数 C 倍したものもまったく同じ特性方程式を満足する．したがって，前節の解の推定は一般には，$y = Ce^{\lambda x}$ としたものと解釈するべきである．

と改めておき，(1.23) に代入する．その結果，

$$\frac{\mathrm{d}^2C}{\mathrm{d}x^2} = 0 \tag{1.26}$$

が得られ，(1.26) の解は $C = c_1x + c_2$ となる．ここで，c_1，c_2 は任意定数である．したがって，微分方程式 (1.23) の一般解は

$$y = (c_1x + c_2)\,e^{-2x} \tag{1.27}$$

となる.（注：(1.27) には任意定数が2個含まれている．つまり，2階の微分方程式の一般解として充分である.）

1.6　非斉次型の微分方程式の解法

物理学においては，(1.1) の右辺にいわゆる外力項を含むような形をもった微分方程式も頻繁に登場する：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + A\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + By = f(x). \tag{1.28}$$

ここで，A, B は定数である．

例1：質量 m の質点がバネ定数 k の線形バネにつながれており，さらに速度に比例する抵抗と周期的な外力 $A\sin\omega_0 t$ が質点に働いている場合，質点の平衡位置からのずれ x が従う運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + m\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = A\sin\omega t \tag{1.29}$$

となる．ここで，$\gamma > 0$ である．

例2：インダクタンス L のコイル，抵抗値 R の 抵抗，容量 C を持ったコンデンサを直列に接続した回路に起電力 $E(t)$ を加える．この回路の方程式は次のような微分方程式に従う：

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = E(t). \tag{1.30}$$

ここで，Q はコンデンサに蓄積される電荷であり，回路を流れる電流 I とは $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ の関係がある．

(1.28) の右辺が 0 の微分方程式を，**斉次微分方程式**と呼び，右辺が 0 でない場合を**非斉次微分方程式**とよぶ．線形の非斉次微分方程式の解は，以下のように簡単に構成できる．

線形の非斉次微分方程式 (1.28) の解は，斉次微分方程式 (1.1) の一般解 $y_{\rm g}$ と，(1.28) を満足する任意の解 (これは**特殊解**と呼ばれている) のうちのひとつ $y_{\rm p}$ の和として表現できる．

実際に方程式の線形性から $y_{\rm g}, y_{\rm p}$ がそれぞれ

$$\frac{{\rm d}^2 y_{\rm g}}{{\rm d}x^2} + A\frac{{\rm d}y_{\rm g}}{{\rm d}x} + By_{\rm g} = 0.$$
$$\frac{{\rm d}^2 y_{\rm p}}{{\rm d}x^2} + A\frac{{\rm d}y_{\rm p}}{{\rm d}x} + By_{\rm p} = f(x).$$

であれば，$y = y_{\rm g} + y_{\rm p}$ は (1.28) を満足することが確かめられる．

特殊解が複数個見つかったときでも，そのうちの任意の 1 個のみを一般解 $y_{\rm g}$ に加えておけば (1.28) の解としては充分である．どの特殊解を選択するか，という自由度は一般解 $y_{\rm g}$ に含まれている任意定数で調整されるからである．初期条件を考慮すればどの特解を選んでも最終的な解は唯一に決まる．特殊解を求める方法は，非斉次項 $f(x)$ がある特定の形を持つ場合，常套手段が知られている．例えば，$f(x)$ が多項式の場合や $e^{px}, \cos px, \sin px$ といった場合には，やはり解を推定して代入することにより求める．また（以下で説明する）共鳴型の場合には係数変化法によって $y_{\rm p}$ を求めることができる．

例 3 以下の様な微分方程式を考える：

$$\frac{{\rm d}^2 x}{{\rm d}t^2} + \omega_0^2 x = A\sin\omega t \tag{1.31}$$

これは，例 1 において質点に抵抗が働かない場合の方程式である．なお，$\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ とし，$\omega_0 \neq \omega$ とする．

微分方程式 (1.31) の斉次方程式

$$\frac{{\rm d}^2 x}{{\rm d}t^2} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1.32}$$

の一般解は，$x_{\rm g} = c_1 \sin\omega_0 t + c_2 \cos\omega_0 t$ である[2]．特殊解は，解を $x_{\rm p} = f\sin\omega t$ と推定し，これをもとの方程式 (1.31) に代入して係数 f を定めればよい．実際に代入すると

$$\frac{{\rm d}^2 x_{\rm p}}{{\rm d}t^2} + \omega_0^2 x_{\rm p} = -\omega^2 f\sin\omega t + \omega_0^2 f\sin\omega t = A\sin\omega t.$$

[2] $x = c_1 \exp[i\omega_0 t] + c_2 \exp[-i\omega_0 t]$ と表現してもよい．

従って $f = A/(\omega_0^2 - \omega^2)$ を得る．よって，(1.31) の一般解は

$$x = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t \tag{1.33}$$

である．

この推定法のコツは，右辺が $\sin \omega t$ に比例するので，左辺の第2項も $\sin \omega t$ に比例するであろう，また，$\sin \omega t$ を t で2階微分すると（符号は別にして）もとの $\sin \omega t$ に戻ること（三角関数の重要な性質）に基づいている．(特殊解の推定として，$x_{\mathrm{p}} = f_1 \sin \omega t + f_2 \cos \omega t$ としてもよいが，これは経験をつむと冗長な解の推定であることがわかる．)

例 4 次に例1で与えられた微分方程式を考える:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma_0 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = A \sin \omega t. \tag{1.34}$$

ここで，$\gamma_0 \equiv \gamma/m$，$\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ とし，$\omega_0 \neq \omega$ とする．

微分方程式 (1.34) の斉次方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}t^2} + \gamma_0 \frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x_{\mathrm{g}} = 0 \tag{1.35}$$

の一般解は，$x_{\mathrm{g}} = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} t$ である．ここで λ_1, λ_2 は特性方程式 $\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$ の2つの解である．特殊解は，解を $x_{\mathrm{p}} = f_1 \sin \omega t + f_2 \cos \omega t$ と推定し，これをもとの方程式 (1.34) に代入して係数 f_1, f_2 を定める．この推定法のコツは，右辺が $\sin \omega t$ に比例するので，左辺の第3項も $\sin \omega t$ に比例するであろう．このとき，$\sin \omega t$ を t で2階微分すると（符号は別にして） もとの $\sin \omega t$ に戻るので，第3項も $\sin \omega t$ に比例する．しかしながら，$\sin \omega t$ の1階微分は $\cos \omega t$ なので，cos の項が左辺第1項に現れる．それをうまく消すためにもともと x_p の推定に $\cos \omega t$ も加えておき，適当に係数を調整して $\cos \omega t$ を消すようにする，というものである．実際に代入すると

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 x_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t^2} + \gamma_0 \frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x_{\mathrm{p}} \\
&= -\omega^2 f_1 \sin \omega t - \omega^2 f_2 \cos \omega t \\
&\quad + \gamma_0(-\omega f_1 \cos \omega t + \omega f_2 \sin \omega t) \\
&\qquad + \omega_0^2 (f_1 \sin \omega t + f_2 \cos \omega t) \\
&= (-\omega^2 f_1 - \omega\gamma_0 f_2 + \omega_0^2 f_1) \sin \omega t + (-\omega^2 f_2 + \omega\gamma_0 f_1 + \omega_0^2 f_2) \cos \omega t \\
&= A \sin \omega t.
\end{aligned}$$

従って f_1, f_2 は

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2-\omega^2 & -\omega\gamma \\ \omega\gamma & \omega_0^2-\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.36}$$

を満足する．(1.36) の解は,

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)+\omega^2\gamma^2} \begin{pmatrix} (\omega_0^2-\omega^2)A \\ -\omega\gamma A \end{pmatrix}$$

なので，(1.34) の一般解は

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{A}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}\left\{(\omega_0^2-\omega^2)\sin\omega t - \omega\gamma\cos\omega t\right\}. \tag{1.37}$$

例 5: 最後に共鳴型の問題を取り扱う．これは，(1.31) で，外力の振動数 ω ともともとバネのもつ固有振動数 ω_0 が等しい場合である．(1.31) の一般解で, $\omega=\omega_0$ とおくと x_{p} は発散する．そこで，先の特殊解 x_{p} の推定は破綻している．物理的にはこのような場合には，振動の振幅が時間ともに増大していく．そこで，x_{p} として，ω_0 で振動し振幅が時間に比例する

$$x_{\mathrm{p}} = f_1 t\sin\omega_0 t + f_2 t\cos\omega_0 t$$

と推定する．これを (1.31) の式に代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 x_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x_{\mathrm{p}} &= 2\omega_0(f_1\cos\omega_0 t - f_2\sin\omega_0 t) - \omega_0^2(f_1 t\sin\omega_0 t + f_2 t\cos\omega_0 t) \\ &\quad + \omega_0^2(f_1 t\sin\omega_0 t + f_2 t\cos\omega_0 t) \\ &= A\sin\omega_0 t. \end{aligned}$$

したがって，$f_1=0$, $f_2=-A/(2\omega_0)$. つまり特殊解は

$$x_{\mathrm{p}} = -\frac{At}{2\omega_0}\cos\omega_0 t \tag{1.38}$$

となる．

最後に，ひとこと．

よい推定を行うには微分方程式を山ほど（もしくは星の数ほど）解いて知識と経験と勘を養うことである．