地球惑星科学基礎III 期末テスト　予想問題

2004.1.23 実施

下記の問題のうちいくつかを出題予定

独り言 ... 下記の問題は数理物理を学ぶ上で極めて基本的な問題です．これら全ての問題を 1 時間半以内にすらすらと解けるだけの実力を今のうちにつけておくことが望ましいのですけれど…

1　複素 Fourier 級数，直交関数展開に関する問題

区間 $-L < x < L$ の間で定義された周期 $2L$ の実数関数が

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left[\frac{in\pi x}{L}\right]$$

と表現できる．このとき, 複素 Fourier 係数 c_n が

i)

$$c_n \quad = \quad \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\exp\left[\frac{-in\pi x}{L}\right]\mathrm{d}x$$

となることを，$\exp\left[\frac{in\pi}{L}\right]$ の直交性を用いて証明しなさい.

ii) $f(x)$ が実数関数であるとき，c_n はどのような性質を持たねばならないか答えなさい.

iii) Parseval の恒等式

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

を証明しなさい．なお $|c_n| = \sqrt{c_n c_n^*}$, c_n^* は c_n の複素共役であることに注意しなさい.

2　偏微分方程式の解法，および，Fourier 級数に関する問題

区間 $0 < x < L$ において，ある物理量 $u(x,\,t)$ が 1 次元拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (\kappa > 0) \tag{1}$$

を満足する．境界条件

$$u(0,\, t) = u(L,\, t) = 0 \tag{2}$$

と初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \tag{3}$$

のもとで (1) を解くことを考える．以下の設問に答えなさい．

i) 変数分離法を用いて解くことを考える．

$$u(x,\, t) = X(x)T(t) \tag{4}$$

とおく．このとき，$X(x)$, $T(t)$ がそれぞれ満たす方程式を求めなさい．

ii) 前設問で導かれた方程式の一般解 $X(x)$, $T(t)$ を求めなさい．このとき，変数分離定数の符号に関する議論も同時に行いなさい．

iii) 境界条件 (2) を $X(x)$ に関する条件に書き換えなさい．

iv) iii) で導かれた条件を満足する $X(x)$ を求めなさい．

v) 重ね合わせの原理により $u(x,\, t)$ を求めなさい．

vi) 初期条件を満足する $u(x,\, t)$ を求めなさい．

3　Gauss 積分，Gamma 関数，delta 関数に関する問題

以下の積分を実行しなさい．（ただし, $\alpha > 0$ とする.）

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha x^2\right)\, \mathrm{d}x$

ii) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x^2 \exp\left(-\alpha x^2\right)\, \mathrm{d}x$

iii) $\Gamma(n) \equiv \int_0^\infty x^{n-1}\exp(-x)\,\mathrm{d}x$ のとき $\Gamma(\frac{1}{2})$

iv) $\Gamma(\frac{3}{2})$

v) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x)\,\mathrm{d}x$. ここで, a は任意の実数で, $f(x)$ は任意関数である．

4　常微分方程式，Laplace 変換に関する問題

以下の 2 階の線形常微分方程式を初期条件

$$x(0) = x_0, \qquad \frac{\mathrm{d}x(0)}{\mathrm{d}t} = 0$$

のもとで解くことを考える．以下の設問に従って問題を解きなさい:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0. \tag{5}$$

i) 推定法を用いて解くことを考える．(5) の特性方程式を求めなさい.

ii) 特性方程式の解から，(5) の一般解を求めなさい.

iii) 初期条件を満足する (5) の解を求めなさい.

iv) Laplace 変換を用いて (5) を解きなさい．なお関数 $f(t)$ の Laplace 変換を以下のように定義する：

$$\mathsf{L}\left\{f(t)\right\} \equiv \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

ここで, s は正の実数である．なお，最後の結果は $\mathsf{L}\left\{x(t)\right\}$ の形で与えなさい.

v) 前設問で得た結果を逆 Lalpace 変換し，微分方程式 (5) の解 $x(t)$ を求めなさい．必要ならば

$$\mathsf{L}\left\{e^{i\omega t}\right\} = \frac{1}{s - i\omega}$$

を用いなさい.