地球惑星科学基礎III 中間テスト

2003.11.13 作成

i) Fourier 級数，複素 Fourier 級数，Fourier 変換の間の関係を簡潔に述べなさい.（図解でもよい.）

ii) 関数 $f(x)$ の Fourier 変換，逆 Fourier 変換を以下のように定義する：

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}\,\mathrm{d}k \tag{2}$$

このとき，次の関数の Fourier 変換を求めなさい.（ただし，$\alpha > 0$ とする.）

$$f(x) = e^{-\alpha|x|} \tag{3}$$

iii) $-L < x < L$ の範囲で定義された周期 $2L$ の関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \tag{4}$$

と表現できる．このとき，複素 Fourier 係数 c_n は

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}\mathrm{d}x \tag{5}$$

で与えられることを証明しなさい.（ヒント：$f(x)$ の Fourier 級数展開 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L})$ から証明してもよいが，(4) から直接 c_n の表現を導くほうが簡単です．a_n や b_n を導出したのと同じような方法を用いればよい．）

iv) 複素 Fourier 級数に関する Parseval の等式

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{6}$$

を証明しなさい.