

地球惑星科学基礎III 演習(9,10)

2003年12月5, 12日課題(レポート提出期限12月19日)

1 拡散方程式の問題

i) 1次元拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\kappa > 0) \quad (1)$$

を, 境界条件

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

と初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3)$$

のもとで解くことを考える. 以下の設問に答えなさい.

a) 変数分離法を用いて解く.

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (4)$$

とおく. このとき, $X(x)$, $T(t)$ がそれぞれ満たす方程式を求めなさい.

- b) 前設問で導かれた方程式の一般解を求めなさい.
- c) 境界条件(2)を $X(x)$ に関する条件に書き換えなさい.
- d) ic)で導かれた条件を満足する $X(x)$ を求めなさい.
- e) 重ね合わせの原理により $u(x, t)$ を求めなさい.
- f) 初期条件を満足する $u(x, t)$ を求めなさい.

- ii) 長さ L の棒の両端は常に温度 0 に保たれている . すなわち , $u(0, t) = u(L, t) = 0$. 初期の温度分布が以下のように与えられるとき , 熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\kappa > 0) \quad (5)$$

の解を求めなさい .

- a) a, b, c を定数として

$$u(x, 0) = f(x) = a \sin \frac{4\pi x}{L} + b \sin \frac{8\pi x}{L} + c \sin \frac{12\pi x}{L}. \quad (6)$$

- b)

$$u(x, 0) = f(x) = ax(L - x). \quad (7)$$

- iii) 無限に長い棒において , 熱の初期分布 $u(x, 0)$ が次のように与えられているとする . このとき , $t > 0$ での熱の伝わり方を調べなさい . ここで , a, b は定数とする .

- a) $u(x, 0) = a$
b) $u(x, 0) = a\delta(x)$
c) $u(x, 0) = a \cos bx$