

# 地球惑星科学基礎 III 演習 (7)

2003 年 11 月 21 日課題 (レポート提出期限 11 月 28 日)

## 1 Delta 関数の問題

i)  $\delta$  関数に関する以下の関係式を証明しなさい (ヒント:  $\delta$  関数の関係式を証明するには, 件の式に任意関数  $f(x)$  をかけて  $x$  について  $-\infty \sim \infty$  まで積分し, 両辺が等価であることを示せばよい.)

a)  $\delta(x - x') = \delta(x' - x)$ .

b)  $x\delta(x) = 0$

c)  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ .

d)  $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} \{\delta(x + a) + \delta(x - a)\}$ . ここで  $a$  は任意の正の定数.

e)  $\frac{d}{dx}H(x) = \delta(x)$ . ここで  $H(x)$  は Heaviside 関数と呼ばれ,  $x < 0$  では  $H(x) = 0$ ,  $x > 0$  では  $H(x) = 1$  である.

ii) a) 次の関数の Fourier 変換を求めなさい.<sup>1</sup>

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$$

b)  $a \rightarrow 0$  の極限では  $f(x)$  およびその Fourier 変換はどのような関数になるか述べなさい.

## 2 畳み込みに関する問題

$f(x)$  と  $g(x)$  の畳み込みを

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x - u) du$$

で定義する. このとき以下の設問に答えなさい.

---

<sup>1</sup>不連続点  $x = \pm a$  における  $f(x)$  の値は,  $\{f(x + 0) + f(x - 0)\}/2$  とする.

- i) 畳み込みの定理  $F\{f * g\} = F\{f\}F\{g\}$  を証明しなさい。ここで  $f(x)$  の Fourier 変換を  $\hat{f}(k) \equiv \int_0^\infty f(x)e^{-ikx} dx$  で定義する。<sup>2</sup>
- ii)  $f * g = g * f$  を証明しなさい。
- iii)  $f * (g * h) = (f * g) * h$  を証明しなさい。
- iv)  $f * (g + h) = f * g + f * h$  を証明しなさい。

---

<sup>2</sup>Fourier 変換，Fourier 逆変換を対称的な形で定義しておくこと，係数  $\sqrt{2\pi}$  が余計に出てくるが，畳み込みの Fourier 変換が，各々の関数の Fourier 変換の積で書けるという本質的な性質は変わらない。