

定数係数を持った 2 階の線形常微分方程式の解法

地球惑星科学基礎 III 演習 (6) 2003 年 11 月 14 日課題

1 はじめに

物理学においては、以下のような形をもった微分方程式が頻繁に登場する：

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = 0. \quad (1)$$

ここで、 A, B は定数である。

例 1：質量 m の質点がバネ定数 k の線形バネにつながれている場合、質点の平衡位置からの変位 x が従う運動方程式は、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (2)$$

である。

例 2：重力場中で長さ l の伸びない紐の端に質量 m のおもりがつるされているとする。この振り子（重り）の平衡点からの振れ角 θ が従う運動方程式は

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} + mg\sin\theta = 0 \quad (3)$$

である。ここで、 g は重力加速度である。振れ角 θ が小さい場合には (3) は

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} + mg\theta = 0 \quad (4)$$

と近似される。

例 3：例 1 の状況で速度に比例する抵抗が質点に働いている場合には質点の微分方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m\gamma\frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (5)$$

となる。ここで、 $\gamma > 0$ である。

2 言葉の定義 (1)：“線形と非線形”

(1) は 2 階の定数係数の常微分方程式と呼ばれる。なぜならば、未知変数 y の微分の階数は 2 階が最高であること、 y が一変数 x にのみ依存するので、ここで現れる微分は偏微分 ∂ ではなく常微分 d であるからである。

さらに、線形、非線形という言葉について説明しておく。ある関数 $f(x)$ が以下の様な性質を満足する場合、 $f(x)$ を線形関数と呼ぶ。

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad (6)$$

$$f(ax) = af(x). \quad (7)$$

ここで、 a は定数である。もし $f(x)$ が上記の性質を満足しないならば、 $f(x)$ は非線形関数であるという。

上記の線形・非線形という概念は、関数のみならず、微分演算子についても定義できる。すなわちある演算子 L が以下の性質を満足するならば、 L は線形演算子とよぶ。

$$L[f_1 + f_2] = L[f_1] + L[f_2], \quad (8)$$

$$L[af] = aL[f]. \quad (9)$$

たとえば、(1) の左辺第一項、および第二項に現れた $\frac{d}{dx}$ 、 $\frac{d^2}{dx^2}$ はともに上記 (8)、(9) の性質を満足する。実際、

$$\frac{d(y_1 + y_2)}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}$$

$$\frac{d(ay)}{dx} = a \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2(y_1 + y_2)}{dx^2} = \frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{d^2y_2}{dx^2}$$

$$\frac{d^2(ay)}{dx^2} = a \frac{d^2y}{dx^2}$$

である。なお、(8)、(9) の性質から、

i) (1) で与えられる微分方程式の解が y のとき、 ay も微分方程式の解となっている。ここで a は定数である。

ii) その微分方程式の解 y_1, y_2 があったとき、 $y_1 + y_2$ も解となる。

ことがわかる。上記の 2 つの性質 i), ii), を満足する微分方程式は線形微分方程式と呼ばれる。

3 言葉の定義 (2): 重ね合わせの原理

線形の微分方程式に従う運動にはきわめて重要な性質がある (実はこれは「線形」という言葉の言い換えに過ぎず, トートロジーなのだが ...)

いま (1) を満足する解 y_1 が得られたとする. すなわち, y_1 は

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + A \frac{dy_1}{dx} + B y_1 = 0, \quad (10)$$

を満足する. (1) は線形微分方程式なので, y_1 が (1) の解であるならば, その定数倍 $c_1 y_1$ も微分方程式 (1) を満足する. ここで, c_1 は定数である. さらに, y_1 の他に, 微分方程式 (1) を満足する y_2 という解が見つかったとする. このときも以前と同様に $c_2 y_2$ もまた微分方程式 (1) の解となる. さらに, 線形性より $c_1 y_1 + c_2 y_2$ も (1) の解となる. このように微分方程式の解が複数個見つかったとき, その定数倍をおのおの足してもまたもとの微分方程式の解を構成できる, という性質は重ね合わせの原理と呼ばれている. この重ね合わせの原理は, 以下で見るように線形常微分方程式の一般解を構成するときに必要な知識である.

4 2階の線形常微分方程式の解法 (1)

ここでは, (1) の解法として, 代表的なものを紹介する. 特に, 推定法と呼ばれるものを取り上げることにする.

(1) の解を

$$y = e^{\lambda x}, \quad (11)$$

と推定する. (11) を (1) に代入して整理すると,

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0 \quad (12)$$

という λ に関する代数方程式が得られる. (12) は (1) の特性方程式と呼ばれ, (11) のように微分方程式の解を推定すると, 微分方程式は, 代数方程式に帰着される.

特性方程式 (12) の解は一般に 2 個ある. なぜならば, 2 次方程式の解は一般に 2 個であるからである. その解を λ_1, λ_2 は

$$\lambda_1 = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2}, \quad (13)$$

である. そこで, (13) の結果と (11) を考慮すると, 微分方程式の解は

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \quad (14)$$

の二つとなる. しかしながら, 前節で述べたように, y_1, y_2 がともに線形微分方程式の解であるので,

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad (15)$$

も微分方程式の解となる。

2階の微分方程式は，形式的には2回の不定積分を実行することにより解が求まる。1回不定積分を実行すると積分定数である任意定数が1つ現れる。そこで，2階の微分方程式の一般解には，形式的な2度の積分により，積分定数である任意定数が2個現れることになる。(15)は任意定数 c_1, c_2 を含んでいるので，(15)が微分方程式(1)の一般解である。

任意定数の決定には，ある特定の x の値における， y や $\frac{dy}{dt}$ の値を指定してやることにより決定できる。2階の微分方程式の一般解には2個の任意定数を含むので，この未定係数の決定には2個の条件を与えればよい(時間発展問題では，このような条件はいわゆる初期条件として与えられる。)

なお，何らかの方法によって(1)を満足する解が3個 y_1, y_2, y_3 得られたとすると，このときには， c_1, c_2, c_3 を任意定数として， y_1, y_2, y_3 のうちの2個の解の重ね合わせ

$$c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_2 y_2 + c_3 y_3, \quad c_3 y_3 + c_1 y_1 \quad (16)$$

のどれもが，(1)の一般解となる。(16)のどれもが一般解となるのは奇異に感じるかもしれない。しかしながら，いわゆる初期条件を代入して任意定数を決定してやると，(16)の3つの一般解はすべて同じ解に帰着されるのである。以下でその例を示そう。

例：(2)の解を $y = e^{\lambda x}$ と推定すると，その特性方程式は $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ となる。ここで $\omega = \frac{k}{m}$ である。したがって，解は

$$e^{i\omega x}, \quad e^{-i\omega x} \quad (17)$$

の二つとなる。また， $y = \sin \omega x$ も(2)を満足することがこれを代入することにより容易に確かめることができる。したがって

$$y = c_1 e^{i\omega x} + c_2 e^{-i\omega x} \quad (18)$$

も

$$y = c_1 e^{i\omega x} + c_3 \sin \omega x \quad (19)$$

も一般解である。ここで初期条件として， $x = 0$ で $y = y_0, \frac{dy}{dx} = 0$ とする。この条件を満足するためには(18)における任意定数は

$$c_1 = c_2 = \frac{y_0}{2} \quad (20)$$

でなければならず，(20)を(18)に代入して整理すると

$$y = y_0 \cos \omega x \quad (21)$$

となる。一方，初期条件を満足するには，(19)における任意定数は

$$c_1 = y_0, \quad c_3 = -iy_0 \quad (22)$$

でなければいけない。(22)を(19)に代入すると，やはり(21)となる。

5 2階の線形常微分方程式の解法 (2)

前節で $y = Ce^{\lambda x}$ とおき，微分方程式の特性方程式をつくり λ を求め，件の微分方程式の一般解を構成する方法を説明した。¹ しかし，前節の方法が適用できない場合もある．特性方程式の解 λ が重根 $\lambda = \lambda_1$ になる場合がそのような場合である．このときには解の推定 $y = Ce^{\lambda x}$ が誤りであると判断し，改めて解を $y = C(x)e^{\lambda_1 x}$ と推定する．つまり， C を定数ではなく， x に依存した関数と考えるのである．このようにすると， C に関する微分方程式が得られるので，これを解いて推定した解の形に代入すればよい．

例:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0 \quad (23)$$

解を $y = Ce^{\lambda x}$ と推定する．ここで， C は任意定数である．特性方程式は，

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \quad (24)$$

となり，この解は $\lambda = -2$ の重根となる．そこで，

$$y = C(x)e^{-2x} \quad (25)$$

と改めておき，(23) に代入する．その結果，

$$\frac{d^2C}{dx^2} = 0 \quad (26)$$

が得られ，(26) の解は $C = c_1x + c_2$ となる．ここで， c_1, c_2 は任意定数である．したがって，微分方程式 (23) の一般解は

$$y = (c_1x + c_2)e^{-2x} \quad (27)$$

となる（注：(27) には任意定数が 2 個含まれている．つまり，2 階の微分方程式の一般解として充分である．）

6 非斉次型の微分方程式の解法

物理学においては，(1) の右辺にいわゆる外力項を含むような形をもった微分方程式も頻繁に登場する：

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = f(x). \quad (28)$$

ここで， A, B は定数である．

¹前節では $y = e^{\lambda x}$ という形の推定をしたが，これを任意定数 C 倍したのもまったく同じ特性方程式を満足する．したがって，前節の解の推定は一般には， $y = Ce^{\lambda x}$ としたものと解釈すべきである．

例 1: 質量 m の質点がバネ定数 k の線形バネにつながれており, さらに速度に比例する抵抗と周期的な外力 $A \sin \omega_0 t$ が質点に働いている場合, 質点の平衡位置からのずれ x が従う運動方程式は,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + kx = A \sin \omega t \quad (29)$$

となる. ここで, $\gamma > 0$ である.

例 2: インダクタンス L のコイル, 抵抗値 R の抵抗, 容量 C を持ったコンデンサを直列に接続した回路に起電力 $E(t)$ を加える. この回路の方程式は次のような微分方程式に従う:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t). \quad (30)$$

ここで, Q はコンデンサに蓄積される電荷であり, 回路を流れる電流 I とは $I = \frac{dQ}{dt}$ の関係がある.

(28) の右辺が 0 の微分方程式を, 斉次微分方程式と呼び, 右辺が 0 でない場合を非斉次微分方程式とよぶ. 線形の非斉次微分方程式の解は, 以下のように簡単に構成できる.

線形の非斉次微分方程式 (28) の解は, 斉次微分方程式 (1) の一般解 y_g と, (28) を満足する任意の解 (これは特殊解と呼ばれている) のうちのひとつ y_p の和として表現できる.

実際に方程式の線形性から y_g, y_p がそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_g}{dx^2} + A \frac{dy_g}{dx} + B y_g &= 0. \\ \frac{d^2 y_p}{dx^2} + A \frac{dy_p}{dx} + B y_p &= f(x). \end{aligned}$$

であれば, $y = y_g + y_p$ は (28) を満足することが確かめられる.

特殊解が複数個見つかったときでも, そのうちの任意の 1 個のみを一般解 y_g に加えておけば (28) の解としては充分である. どの特殊解を選択するか, という自由度は一般解 y_g に含まれている任意定数で調整されるからである. 初期条件を考慮すればどの特解を選んでも最終的な解は唯一に決まる. 特殊解を求める方法は, 非斉次項 $f(x)$ がある特定の形を持つ場合, 常套手段が知られている. 例えば, $f(x)$ が多項式の場合や $e^{px}, \cos px, \sin px$ といった場合には, 係数変化法と呼ばれるものによって y_p を求めることができる. より詳しくは下記のテキストを参照のこと.

7 おわりに：お勧めの参考書

本稿で紹介した2階の定数係数常微分方程式以外にも物理学（系の研究）で頻りに登場するタイプの微分方程式があり，これらについては各自で微分方程式や物理数学の教科書を参照して勉強してほしい．以下に参考書をあげておく．

7.1 微分方程式の本

- 矢野健太郎：微分方程式（裳華房）

- 矢野健太郎：大学演習 微分方程式（裳華房）

上記の2冊は，私が大学時代に物理数学（1年次，通年開講）担当の先生がテキストとして指定した本である（物理数学のテキストは，この本以外に安達忠次著：ベクトル解析（培風館）であった．）

- ポントリヤーギン：常微分方程式（共立出版）

上記の書籍は，大学生としては一度は手にとって眺めてほしい本である．

7.2 物理数学の本

- マージナウ，マーフィ共著，佐藤次彦，国宗真 共訳：物理と化学のための数学 I, II（共立出版）

上記の2冊は，私が大学時代に愛読した物理数学の本である．熱力学の数学から，微分方程式，特殊関数，テンソル解析，量子力学や統計力学の数学，数値計算法まで収録した本である．

- 寺沢寛一：自然科学者のための数学概論〔増訂版〕（岩波書店）

上記の書籍は，大学生としては一度は手にとって眺めてほしい本である．