地球惑星科学基礎III 演習(5) 問題略解

1 Fourier 変換に関する問題

i) a) 省略．すでに授業中に解答例を紹介済み.

b) 省略．すでに授業中に解答例を紹介済み.

ii) a) 省略．すでに授業中に解答例を紹介済み.

b) 省略．すでに授業中に解答例を紹介済み.

iii) a) 省略．すでに授業中に解答例を紹介済み.

b) $f(x)$ の Fourier 変換，逆 Fourier 変換をそれぞれ

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x,\\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}\,\mathrm{d}k\end{aligned}$$

と定義する．このとき

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m|x|}e^{-ikx}\,\mathrm{d}x,\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{mx}e^{-ikx}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-mx}e^{-ikx}\,\mathrm{d}x,\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{m-ik}e^{-ikx+mx}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-m-ik}e^{-ikx-mx}\bigg|_{0}^{\infty}\right\}.\end{aligned}$$

e^{-ikx} の大きさは $x \to \pm\infty$ でもせいぜい 1 である．一方 $\lim_{x\to\infty} e^{-m|x|} = 0$ なので，上記の積分は

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{m}{m^2+k^2}$$

となる．

c) Fourier 逆変換の定義式から

$$e^{-mx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{m}{m^2+k^2}e^{ikx}\,\mathrm{d}k$$

である．この積分の虚数部分は非積分関数が奇関数なので，0 となる．一方，積分の実部は非積分関数が偶関数であることに注意すると

$$e^{-mx} = \frac{2m}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{m^2+k^2}\cos kx\,\mathrm{d}k,$$

となる．これを整理すると，

$$\int_0^\infty \frac{1}{m^2+k^2}\cos kx\,\mathrm{d}k = \frac{\pi}{2m}e^{-mx}$$

が得られる．

iv) 積分方程式

$$\int_0^\infty f(x)\sin\alpha x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1-\alpha, & 0\le\alpha\le 1, \\ 0, & \alpha > 1, \end{cases}$$

の両辺に $\sin\alpha x'$ をかけて α について 0 から ∞ まで積分する:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\,f(x)\int_0^\infty \mathrm{d}\alpha\,\sin\alpha x\sin\alpha x' = \int_0^1 (1-\alpha)\sin\alpha x'\,\mathrm{d}\alpha. \tag{1}$$

左辺の計算は

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{d}\alpha\,\sin\alpha x\sin\alpha x' &= \int_0^\infty \mathrm{d}\alpha\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{2i}\frac{e^{i\alpha x'}-e^{-i\alpha x'}}{2i} \\ &= -\frac{1}{4}\int_0^\infty \left\{e^{i\alpha(x+x')}-e^{i\alpha(x-x')}-e^{-i\alpha(x-x')}+e^{-i\alpha(x+x')}\right\}\mathrm{d}\alpha, \\ &= -\frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty \left\{e^{i\alpha(x+x')}-e^{i\alpha(x-x')}\right\}\mathrm{d}\alpha.\end{aligned}$$

ここで

$$\delta(x+x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{i\alpha(x+x')}\,\mathrm{d}\alpha$$

なので

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\alpha\,\sin\alpha x\sin\alpha x' = \frac{\pi}{2}\left\{\delta(x-x')-\delta(x+x')\right\}$$

である．したがって，

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\,f(x)\int_0^\infty \mathrm{d}\alpha\,\sin\alpha x\sin\alpha x' = \int_0^\infty \frac{\pi}{2}f(x)\left\{\delta(x-x')-\delta(x+x')\right\}\mathrm{d}x. \tag{2}$$

$x'>0$ の時，(2) は $\frac{\pi}{2}f(x')$, $x'<0$ の時，(2) は $-\frac{\pi}{2}f(-x')$ である．

(1) の右辺は

$$\int_0^1 (1-\alpha)\sin\alpha x'\,\mathrm{d}\alpha = \frac{x'-\sin x'}{x'^2}. \tag{3}$$

(2) と (3) を (1) に代入すると，x の正負にかかわらず,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\frac{x - \sin x}{x^2} \tag{4}$$

が得られる.

v) Fourier 変換の定義

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x, \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}\,\mathrm{d}k \end{aligned}$$

に従えば証明できる．詳細は省略.